Planche n° 16. Ensembles dénombrables. Corrigé

Exercice n° 1

1) Notons $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $E_n = \{A \in \mathscr{P}_f(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}/ \text{ Max}(A) = n\}$ et $E_{-1} = \{\varnothing\}$. $(E_n)_{n \geqslant -1}$ est une partition de $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$, chaque E_n, $n \in \mathbb{N}$, est fini (de cardinal 2^n) de même que E_{-1} (de cardinal 1). Donc, $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis. On en déduit que $\mathscr{P}_f(n)$ est dénombrable.

2) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Soit $A = \{n \in \mathbb{N}/\ n \notin f(n)\}$. A est une partie de $\mathbb{N}$ (éventuellement vide). Supposons par l'absurde que A ait un antécédent n par f dans $\mathbb{N}$.
Si $n \in A$, alors $n \notin f(n) = A$ ce qui est impossible. Si $n \notin A$, alors $n \in f(n) = A$ ce qui est impossible. Donc, A n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{N}$ puis f n'est pas surjective.

Ainsi, si f est une application quelconque de $\mathbb{N}$ vers $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, f ne peut être surjective. Donc, il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ou encore $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice n° 2

$\{\sin(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et $[-1, 1]$ ne l'est pas. Donc, $\{\sin(n),\ n \in \mathbb{N}\} \underset{\neq}{\subset} [-1, 1]$.

Exercice n° 3

Soit E un ensemble infini. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E contient $n + 1$ éléments deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_n$.

- E est infini et en particulier non vide. Donc, E contient un élément x_0.
- Soit $n \neq 0$. Supposons avoir construit $n + 1$ éléments deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_n$. Si $E = \{x_k,\ k \in [\![0, n]\!]\}$, alors E est fini ce qui est faux. Donc, $E \setminus \{x_k,\ k \in [\![0, n]\!]\}$ n'est pas vide et il existe un élément x_{n+1} de E, distinct de x_0, de x_1, ...et de x_n.

Le résultat est démontré par récurrence. $A = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie dénombrable de E (l'application $x \mapsto x_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur A).

Exercice n° 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, croissante sur $\mathbb{R}$. Soit E l'ensemble des points de discontinuité de f.

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si E_n est vide, E_n est fini. Supposons dorénavant $E_n \neq \varnothing$. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ puis $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$, p éléments de E_n. On note $y_0, y_1, \ldots, y_p$ des éléments de $]a, b[$ tels que

$$a < y_0 < x_1 < y_1 < \ldots < y_{p-1} < x_p < y_p < b.$$

Puisque f est croissante sur $[a, b]$, on sait que pour tout $k \in [\![0, p - 1]\!]$,

$$f(a) \leqslant f(y_k) \leqslant f\left(x_{k+1}^-\right) \leqslant f\left(x_{k+1}^+\right) \leqslant f(y_{k+1}) \leqslant f(b)$$

et donc, $f(y_{k+1}) - f(y_k) \geqslant f\left(x_{k+1}^+\right) - f\left(x_{k+1}^-\right) \geqslant \dfrac{1}{n}$. Mais alors,

$$\frac{p}{n} \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} (f(y_{k+1}) - f(y_k)) = f(y_p) - f(y_0) \leqslant f(b) - f(a)$$

et donc, $p \leqslant n(f(b) - f(a))$. Ainsi, $\text{card}(E_n) \leqslant n(f(b) - f(a)) < +\infty$.

b) $E\cap]a, b[$ est la réunion des E_n, $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $E\cap]a, b[$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis. $E\cap]a, b[$ est donc au plus dénombrable.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E'_n = E\cap] - n, n[$. Chaque E'_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est au plus dénombrable d'après la question précédente et $E = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E'_n$. E est donc une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrable. A ce titre, E est au plus dénombrable.

Exercice n° 5

Un programme en Python est une succession de caractères appartenant à un alphabet $\mathscr{A}$ fini (lettres, chiffres, ponctuations, espaces, sauts, indentations, ...). Posons $p = \text{card}(\mathscr{A})$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons E_n l'ensemble programmes Python composés de n caractères ou encore l'ensemble des mots de longueur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{card}(E_n) = p^n < +\infty$.

L'ensemble des programmes en PYTHON « est » la réunion des ensembles finis non vides E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, (puisqu'un programme est constitué d'un nombre fini de caractères). L'ensemble des programmes en PYTHON est donc dénombrable.

Exercice n° 6

Notons E l'ensemble des indices $i \in I$ tels que $u_i \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $E_n = \left\{ i \in I / \ |u_i| \geqslant \dfrac{1}{n} \right\}$.

$$\sum_{i \in I} |u_i| \geqslant \sum_{i \in E_n} |u_i| \geqslant \frac{\mathrm{card}\,(E_n)}{n}$$

(y compris si E_n est vide avec la convention qu'une somme vide est nulle) et donc, $\mathrm{card}\,(E_n) \leqslant n \sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$. Ainsi, chaque E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est fini (éventuellement vide). Puisque E est la réunion des E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, E est au plus dénombrable.