Planche n° 16. Ensembles dénombrables

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (***)

1) Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

2) Montrer que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable (si f est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, considérer $A = \{n \in \mathbb{N}/\ n \notin f(n)\}$.

Exercice n° 2 (*)

Montrer que $\{\sin(n)\ n \in \mathbb{N}\} \neq [-1, 1]$.

Exercice n° 3 (***)

Montrer que tout ensemble infini contient au moins une partie dénombrable.

Exercice n° 4 (****)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, croissante sur $\mathbb{R}$. Dans ce qui suit, $f\left(x_0^+\right)$ (resp. $f\left(x_0^-\right)$) désigne $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$).

1) a) Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $E_n = \left\{x \in]a, b[/\ f\left(x^+\right) - f\left(x^-\right) \geqslant \dfrac{1}{n}\right\}$ est fini.

b) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f dans $]a, b[$ est au plus dénombrable.

2) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice n° 5 (**)

Montrer que l'ensemble de tous les programmes en Python est dénombrable.