Chapitre 15. Suites et séries matricielles

Plan du chapitre

1 Etude de quelques normes sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour être capable d'étudier la convergence et la limite éventuelle d'une suite de matrices (ou d'endomorphismes) ou d'une série de matrices (ou d'endomorphismes), nous avons besoin d'une norme. Dans la pratique, de nombreuses normes sont utilisées.

Commençons par rappeler le fait que, puisque $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, les normes sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont deux à deux équivalentes. De même, si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, les normes sur $\mathscr{L}(E,F)$ sont deux à deux équivalentes.

Les trois premiers exemples que nous allons rappeler sont $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$:

- $\forall A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\|A\|_1=\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}|a_{i,j}|$.
- $\forall A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\|A\|_2=\sqrt{\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}|a_{i,j}|^2}$ (si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on peut enlever $|\ |$).
  Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2=\sqrt{\mathrm{Tr}\left(A^TA\right)}$. Cette norme est la norme euclidienne associée au produit scalaire $(A,B)\mapsto\mathrm{Tr}\left(A^TB\right)$.
- $\forall A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\|A\|_\infty=\mathrm{Max}\{|a_{i,j}|,\ (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]\}$.

On suppose de plus que $n=p$ et on étudie le comportement de ces trois normes avec le produit matriciel.

• Soit $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Comparons $\|AB\|_\infty$ et $\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. Posons $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]$, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice AB est $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$. Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right|\leqslant\sum_{k=1}^n|a_{i,k}|\,|b_{k,j}|\leqslant\sum_{k=1}^n\|A\|_\infty\|B\|_\infty=n\|A\|_\infty\|B\|_\infty.$$

On en déduit que

$$\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ \|AB\|_\infty\leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty.$$

On ne peut pas améliorer cette inégalité car si $A=B=(1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors $AB=A^2=nA$ et donc $\|AB\|_\infty=n$. D'autre part, $n\|A\|_\infty\|B\|_\infty=n\times1\times1=n$. Dit autrement

$$\mathrm{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\}=\mathrm{Max}\left\{\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\}=n.$$

• Soit $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Comparons $\|AB\|_1$ et $\|A\|_1\|B\|_1$.

$$\begin{aligned}\|AB\|_1&=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right|\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{k=1}^n|a_{i,k}|\,|b_{k,j}|\\&\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n}|a_{i,k}|\,|b_{l,j}|=\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n}|a_{i,k}|\,|b_{l,j}|=\left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n}|a_{i,k}|\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n}|b_{l,j}|\right)\\&=\|A\|_1\|B\|_1.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ \|AB\|_1\leqslant\|A\|_1\|B\|_1.$$

• Soit $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Comparons $\|AB\|_2$ et $\|A\|_2\|B\|_2$.

$$\begin{aligned}
\|AB\|_2 &= \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right|^2}\\
&\leqslant \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n}|b_{l,j}|^2\right)} \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)}\\
&= \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n}|a_{i,k}|^2\,|b_{l,j}|^2} = \sqrt{\left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n}|a_{i,k}|^2\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n}|b_{l,j}|^2\right)} = \|A\|_2\|B\|_2.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ \|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2\|B\|_2.$$

Ainsi, $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ sont sous-multiplicatives $\|\|_\infty$ et $\|\ \|_\infty$ ne l'est pas. On rappelle à ce sujet que :

DÉFINITION 1. Soit $(\mathscr{A},+,.,\times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathscr{A}$.

$\|\ \|$ est une norme **sous-multiplicative** (ou aussi une **norme d'algèbre**) si et seulement si, pour tout $(x,y)\in\mathscr{A}^2$, $\|x\times y\|\leqslant\|x\|\times\|y\|$.

On a donné dans le chapitre « Topologie des espaces vectoriels normés » une famille de normes sous-multiplicatives sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathscr{L}(E)$ à partir d'une norme donnée sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (ou E) : les normes subordonnées.

• Pour les matrices : soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$|||A||| = \operatorname{Sup}\left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|},\ X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\setminus\{0\}\right\}.$$

On rappelle que

* Pour tout $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $|||A|||$ existe dans $\mathbb{R}$.
* Pour tout $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $|||A|||=\operatorname{Sup}\{\|AX\|,\ X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \|X\|=1\}=\operatorname{Max}\{\|AX\|,\ X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \|X\|=1\}$.
* $|||\ |||$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
* Pour tout $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\|AX\|\leqslant|||A|||\,\|X\|$.
* Pour tout $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $|||AB|||\leqslant|||A|||\,|||B|||$.

• Pour les endomorphismes d'un espace normé de dimension finie : soit $\|\ \|$ une norme sur E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimenison finie. Pour $f\in\mathscr{L}(E)$, on pose

$$|||f||| = \operatorname{Sup}\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|},\ x\in E\setminus\{0\}\right\}.$$

On rappelle que

* Pour tout $f\in\mathscr{L}(E)$, $|||f|||$ existe dans $\mathbb{R}$ (car $\dim(E)<+\infty$ et donc f est continu sur $(E,\|\ \|)$.
* Pour tout $f\in\mathscr{L}(E)$, $|||f|||=\operatorname{Sup}\{\|f(x)\|,\ x\in E,\ \|x\|=1\}=\operatorname{Max}\{\|f(x)\|,\ x\in E,\ \|x\|=1\}$ (car la boule unité est compacte en dimension finie).
* $|||\ |||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$.
* Pour tout $f\in\mathscr{L}(E)$ et tout $x\in E$, $\|f(x)\|\leqslant|||f|||\,\|x\|$.
* Pour tout $(f,g)\in(\mathscr{L}(E))^2$, $|||f\circ g|||\leqslant|||f|||\,|||g|||$.

Dans tous les cas, on peut énoncer :

Théorème 1.

1) Il existe au moins une norme sous-multiplicative sur l'algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,.,\times)$.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Il existe au moins une norme sous-multiplicative sur l'algèbre $(\mathscr{L}(E),+,.,\circ)$.

Exercice 1. Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $k>0$ tel que kN soit une norme sous-multiplicative.

Solution 1. Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $k>0$, il est immédiat que kN est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

N et $\|\ \|_1$ sont équivalentes. Donc, il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $\alpha\|\ \|_1\leqslant N\leqslant\beta\|\ \|_1$. Soit $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

$$N(AB) \leqslant \beta\|AB\|_1 \leqslant \beta\|A\|_1\|B\|_1 \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B),$$

puis

$$\frac{\beta}{\alpha^2}N(AB) \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)\frac{\beta}{\alpha^2}N(B).$$

Le réel $k = \dfrac{\beta}{\alpha^2} > 0$ convient.

---

2 Suites de matrices ou d'endomorphismes

Dans cette section, on énonce (très brièvement) dans le cadre particulier des matrices (ou des endomorphismes d'un espace de dimension finie), les résultats généraux sur les suites énoncés dans le chapitre « Topologie ». Il est clair que tout résultat sur les matrices trouve son analogue dans les résultats sur les endomorphismes d'un espace de dimension finie. Dans ce qui suit, nous énoncerons explicitement les définitions ou théorèmes concernant les deux situations mais s'il y a lieu de faire une démonstration, nous ne le ferons que pour les matrices.

Définition 2.

1) Soit $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}} \in \left(\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})\right)^{\mathbb{N}}$. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. La suite $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si la suite numérique $\left(\|A_p - A\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (où $\|\ \|$ est une norme donnée sur $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$). On écrit dans ce cas $A = \lim\limits_{p\to+\infty} A_p$.

2) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie puis $\left(f_p\right)_{p\in\mathbb{N}} \in \left(\mathscr{L}(E,F)\right)^{\mathbb{N}}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. La suite $\left(f_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers f si et seulement si la suite numérique $\left(\|f_p - f\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (où $\|\ \|$ est une norme donnée sur $\mathscr{L}(E,F)$). On écrit dans ce cas $f = \lim\limits_{p\to+\infty} f_p$.

⇛ **Commentaire**. *On rappelle que les normes sur $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ (où $\mathscr{L}(E,F)$ si dim$(E) < +\infty$) sont deux à deux équivalentes et donc que la notion de convergence et de limite ne dépend pas du choix d'une norme. En conséquence, on peut toujours choisir une norme adaptée à la situation.*

On sait qu'une suite d'un espace vectoriel normé de dimension finie converge si et seulement si les « suites coordonnées dans une base » convergent. Pour une suite de matrices, cela donne :

Théorème 2.

Soit $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}} \in \left(\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})\right)^{\mathbb{N}}$. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{N})$. Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $A_p = \left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}$. Posons de même $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}$.

La suite $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, la suite $\left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$. En cas de convergence, $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = \left(\lim\limits_{p\to+\infty} a_{i,j}^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$

Exemple. $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{\ln n}{n} & n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$. ❏

Exercice 2. Soit a un réel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^n$.

Solution 2.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\theta_n = \text{Arcsin}\left(\dfrac{a/n}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}\right) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Alors, (puisque $\cos(\theta_n) \geqslant 0$),

$$\cos(\theta_n) = \sqrt{1-\sin^2(\theta_n)} = \sqrt{1-\dfrac{\dfrac{a^2}{n^2}}{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} & -\dfrac{\dfrac{a}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} \\ \dfrac{\dfrac{a}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} \end{pmatrix} = \sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$

puis

$$A_n^n = \left(1+\dfrac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

- $\left(1+\dfrac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{n}{2}o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{o(1)}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = 1$.
- $n\theta_n = n\,\text{Arcsin}\left(\dfrac{a/n}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\,\text{Arcsin}\left(\dfrac{a}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\left(\dfrac{a}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} a+o(1)$. Par suite,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$ et finalement,

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

Sinon, rappelons pour finir :

Théorème 3.

1) Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. Si la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie puis $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{L}(E))^{\mathbb{N}}$. Si la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3 Séries de matrices ou d'endomorphismes

3.1 Principales définitions et principaux résultats

On se contente de rappeler les principales définitions et les principaux résultats sur la convergence ou la divergence des séries vectorielles (voir chapitre 5) dans le cadre particulier des séries de matrices ou d'endomorphismes

DÉFINITION 3.

• Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^{n} A_k$ (S_p est la somme partielle de rang p).

La série de terme général A_p converge si et seulement si la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge. Sinon, la série est dite divergente.

En cas de convergence, la limite de la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ se note $\sum_{k=0}^{+\infty} A_k$.

• Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie puis $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{L}(E)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^{n} f_k$ (S_p est la somme partielle de rang p).

La série de terme général f_p converge si et seulement si la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge. Sinon, la série est dite divergente.

En cas de convergence, la limite de la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ se note $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$.

Sur un espace de dimension finie, comme pour les suites, une série converge si et seulement si toutes les « séries coordonnées » convergent. Pour une série de matrices, cela donne :

Théorème 4.

Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{N})$. Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $A_p = \left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}$. Posons de même $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}$.

La série de terme général A_p, $p \in \mathbb{N}$, converge vers A si et seulement si pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, la série de terme général $a_{i,j}^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, converge vers $a_{i,j}$. En cas de convergence, $\sum_{p=0}^{+\infty} A_p = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{i,j}^{(p)}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}$.

Passons à la notion de convergence absolue :

DÉFINITION 4.

• Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
La série de terme général A_p, $p \in \mathbb{N}$, converge absolument si et seulement si la série de terme général $\|A_p\|$ converge.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puis $\|\ \|$ une norme sur $\mathscr{L}(E)$. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{L}(E)$.
La série de terme général f_p, $p \in \mathbb{N}$, converge absolument si et seulement si la série de terme général $\|f_p\|$ converge.

⇛ **Commentaire** . *Puisque les normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ou $\mathscr{L}(E)$ (avec $\dim(E) < +\infty$) sont deux à deux équivalentes, la notion de convergence absolue ne dépend pas du choix de la norme. On peut donc toujours supposer que la norme est sous-multiplicative. Ceci peut être utile dans le cas où $(A_p) = (A^p)$ est la suite des puissances d'une certaine matrice A.*

Théorème 5.

• Toute série absolument convergente d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est convergente.

• Si $\dim(E) < +\infty$, toute série absolument convergente d'éléments de $\mathscr{L}(E)$ est convergente.

Sinon, rappelons pour finir que si la série de terme général A_p (resp. f_p) converge, alors son terme général A_p (resp. f_p) tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

3.2 Un exemple de calcul de la somme d'une série matricielle

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$. On veut calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ après en avoir justifié l'existence.

Première méthode. (utilisation d'une réduction)

• $\chi_A = X^2 - \left(\frac{4}{3} - \frac{7}{6}\right)X + \left(\frac{4}{3}\left(-\frac{7}{6}\right) - \frac{5}{3}\left(-\frac{5}{6}\right)\right) = X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{6} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{3}\right)$.
χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

• $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{2}}(A) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)x - \frac{5}{6}y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Donc, $E_{\frac{1}{2}}(A) = \text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{3}}(A) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right)x - \frac{5}{6}y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$. Donc, $E_{-\frac{1}{3}}(A) = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

• Donc, $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, la série de terme général D^n, $n \in \mathbb{N}$, converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} D^n = \text{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \text{diag}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right) = \text{diag}\left(2, \frac{3}{4}\right).$$

• L'application $f : M \mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Donc, l'application f est continue sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On en déduit que la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge et que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\left(PDP^{-1}\right)^n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\sum_{n=0}^{N} D^n\right)P^{-1} = \lim_{N\to+\infty} f\left(\sum_{n=0}^{N} D^n\right) \\ &= f\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} D^n\right) \text{ (par continuité de } f) \\ &= P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} D^n\right)P^{-1},\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Deuxième méthode. (utilisation d'un polynôme annulateur)

On rappelle que $\chi_A = X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{6}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = Q_n \times \chi_A + a_n X + b_n$ $(*)$ où Q_n est un polynôme et a_n et b_n sont deux réels. D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = Q(A)\chi_A(A) + a_n A + b_n I_2 = a_n A + b_n I_2.$$

Calculons a_n et b_n. En évaluant en $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$ les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient le système $\left\{\begin{array}{l} \frac{a_n}{2} + b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -\frac{a_n}{3} + b_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{array}\right.$ et donc, d'après les formules de Cramer, $a_n = \frac{6}{5}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$ et $b_n = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} A^n &= \sum_{n=0}^{N}\left(a_n A + b_n I_2\right) = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)A + \left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right)I_2 \\ &= \frac{6}{5}\left[\left(\sum_{n=0}^{N}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\right)A + \left(\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\right)I_2\right]\end{aligned}$$

De nouveau, la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \frac{6}{5}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)A + \left(\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)I_2\right] = \frac{3}{2}A + \frac{5}{4}I_2$$

$$= \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix} + \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(I_2 - A)\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right) = I_2 - A^{N+1}$. Puisque la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge, en particulier $A^{n+1} \underset{N \to +\infty}{\to} 0$. Quand N tend vers $+\infty$, le membre de droite tend vers I_2. D'autre part, par continuité sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de l'endomorphisme $f : M \mapsto (I - A_2)M$, le membre de gauche tend vers $(I_2 - A)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A^n\right)$. Donc,

$$(I_2 - A)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A^n\right) = I_2.$$

Ainsi, la matrice $I_2 - A$ est inversible et

$$(I_2 - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

4 Exponentielle d'une matrice ou d'un endomorphisme

4.1 Définition

Théorème 6.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La série de terme général $\frac{1}{p!}A^p$, $p \in \mathbb{N}$, est absolument convergente et donc convergente.

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie puis f un endomorphisme de E. La série de terme général $\frac{1}{p!}f^p$, $p \in \mathbb{N}$, est absolument convergente et donc convergente.

Démonstration. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\ \|$. Pour tout entier naturel p,

$$\left\|\frac{1}{p!}A^p\right\| = \frac{\|A^p\|}{p!} \leqslant \frac{\|A\|^p}{p!}.$$

La série numérique de terme général $\frac{\|A\|^p}{p!}$, $p \in \mathbb{N}$, est convergente (de somme $e^{\|A\|}$) et donc la série numérique de terme général $\left\|\frac{1}{p!}A^p\right\|$, $p \in \mathbb{N}$, est convergente ou encore, la série de matrices de terme général $\frac{1}{p!}A^p$, $p \in \mathbb{N}$, est absolument convergente et donc convergente.

La démonstration est la même pour un endomorphisme en munissant $\mathscr{L}(E)$ d'une norme sous-multiplicative.

❏

Définition 5.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'**exponentielle** de la matrice A est la matrice

$$\exp(A) = I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}A^p.$$

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie puis f un endomorphisme de E. L'**exponentielle** de l'endomorphisme f est l'endomorphisme

$$\exp(f) = Id_E + \frac{1}{1!}f + \frac{1}{2!}f^2 + \ldots = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}f^p.$$

.

Exemple 1. Soit $n \geqslant 2$. Soit A la matrice élémentaire $E_{1,2}$. On sait que $A^2 = 0$ puis pour $p \geqslant 2$, $A^p = 0$. Donc,

$$\exp(A) = I_n + A = I_n + E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

❏

Exemple 2. Soit $n \geqslant 1$. Soit A la matrice élémentaire $E_{1,1}$. On sait que $A^2 = A$ puis pour $p \geqslant 1$, $A^p = A$. Donc,

$$\exp(A) = I_n + \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!}\right) A = I_n + (e-1)E_{1,1} = \mathrm{diag}(e, 1, \ldots, 1).$$

❏

Exemple 3. Soit s une symétrie d'un espace de dimension finie E. On sait que $s^2 = \mathrm{Id}_E$ puis pour $p \in \mathbb{N}$, $s^{2p} = \mathrm{Id}_E$ et $s^{2p+1} = s$. Donc (toutes les séries ci-dessous étant convergentes),

$$\exp(s) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!}\right) \mathrm{Id}_E + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!}\right) s = \mathrm{ch}(1)\mathrm{Id}_E + \mathrm{sh}(1)s.$$

❏

4.2 Propriétés

Théorème 7.

1) Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = BA$. Alors $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B)$.

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie puis f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\exp(f + g) = \exp(f) \circ \exp(g)$.

Démonstration. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\ \|$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Puisque les matrices A et B commutent, la formule du binôme de Newton fournit :

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}B^k\right) - \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(A+B)^k\right\| &= \left\|\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant p} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j - \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!}A^iB^j\right\| \\ &= \left\|\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant p} \frac{1}{i!j!}A^iB^j - \sum_{\substack{0 \leqslant i,j \leqslant p \\ i+j \leqslant p}} \frac{1}{i!j!}A^iB^j\right\| = \left\|\sum_{\substack{0 \leqslant i,j \leqslant p \\ i+j > p}} \frac{1}{i!j!}A^iB^j\right\| \\ &\leqslant \sum_{\substack{0 \leqslant i,j \leqslant p \\ i+j > p}} \frac{1}{i!j!} \|A\|^i \|B\|^j \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\|A\|^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\|B\|^k\right) - \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(\|A\| + \|B\|)^k.\end{aligned}$$

$\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\|A\|^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\|B\|^k\right) - \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(\|A\| + \|B\|)^k$ tend vers $e^{\|A\|+\|B\|} - e^{\|A\|}e^{\|B\|} = 0$ quand p tend vers $+\infty$.

Donc, $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}B^k\right) - \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(A+B)^k$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Quand p tend vers $+\infty$, $\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(A+B)^k$ tend vers $\exp(A + B)$. D'autre part, l'application $(M, N) \mapsto MN$ est continue sur $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie. Donc, $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}B^k\right)$ tend vers $\exp(A) \times \exp(B)$ quand p tend vers $+\infty$.

Quand p tend vers $+\infty$, on obtient $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B)$.

❏

Théorème 8.

1) a) $\exp(0_n) = I_n$.

b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie.

a) $\exp(0) = Id_E$.

b) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors $\exp(f) \in GL(E)$ et $(\exp(f))^{-1} = \exp(-f)$.

Démonstration. Les matrices A et $-A$ commutent. Donc,

$$\exp(A) \times \exp(-A) = \exp(A + (-A)) = \exp(0) = I_n + 0 + 0 + \ldots = I_n.$$

On en déduit que $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

❑

Théorème 9. $\forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$, $\exp\left(\operatorname{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\left(\operatorname{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\operatorname{diag}\left(\lambda_i^k\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\lambda_i^k\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\lambda_i^k$ tend vers e^{λ_i} quand p tend vers $+\infty$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\left(\operatorname{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)^k$ tend vers $\operatorname{diag}\left(e^{\lambda_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ quand p tend vers $+\infty$.

❑

⇛ **Commentaire**. *En particulier,* $\exp(\lambda I_n) = e^{\lambda} I_n$ *ou* $\exp(\lambda Id_E) = e^{\lambda} Id_E$.

Théorème 10.

1) $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $P^{-1}\exp(A)P = \exp\left(P^{-1}AP\right)$.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. $\forall f \in \mathscr{L}(E)$, $\forall g \in GL(E)$, $g^{-1} \circ \exp(f) \circ g = \exp\left(g^{-1} \circ f \circ g\right)$.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\left(P^{-1}AP\right)^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k\right)P.$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\left(P^{-1}AP\right)^k$ tend vers $\exp\left(P^{-1}AP\right)$ quand p tend vers $+\infty$. D'autre part, l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit que l'application $f : M \mapsto P^{-1}MP$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k$ tend vers $\exp(A)$ quand p tend vers $+\infty$, $P^{-1}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k\right)P = f\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k\right)$ tend vers $f(A) = P^{-1}\exp(A)P$ quand p tend vers $+\infty$.

Quand p tend vers $+\infty$, on obtient $\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}\exp(A)P$.

❑

Théorème 11. Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \ldots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire. Alors $\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \times & \ldots & \times \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \ldots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Démonstration. On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \times & \ldots & \times \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ et donc pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}T^k=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\lambda_1^k & \times & \dots & \times\\ 0 & \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\lambda_2^k & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \times\\ 0 & \dots & 0 & \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\lambda_n^k\end{pmatrix}.$$

Quand p tend vers $+\infty$, on obtient $\exp(T)=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & \times & \dots & \times\\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \times\\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$.

❏

Théorème 12.

1) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\mathrm{Sp}(A)=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, alors $\mathrm{Sp}(\exp(A))=\left(e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n}\right)$. En particulier,

$$\det(\exp(A))=e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie puis $f\in\mathscr{L}(E)$. Si $\mathrm{Sp}(f)=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, alors $\mathrm{Sp}(\exp(f))=\left(e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n}\right)$. En particulier,

$$\det(\exp(f))=e^{\mathrm{Tr}(f)}.$$

Démonstration . On sait que A est triangulable dans $\mathbb{C}$. Donc, il existe $P\in GL_n(\mathbb{C})$ et $T\in\mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telles que $A=PTP^{-1}$. On sait que $\mathrm{Sp}(T)=\mathrm{Sp}(A)=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

D'après les théorèmes précédents, $\exp(A)=P\exp(T)P^{-1}$ puis $\mathrm{Sp}(\exp(A))=\mathrm{Sp}(\exp(T))=\left(e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n}\right)$. En particulier,

$$\det(\exp(A))=e^{\lambda_1}\times\dots\times e^{\lambda_n}=e^{\lambda_1+\dots+\lambda_n}=e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

❏

⇛ **Commentaire** . *On retrouve ainsi le fait que* $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)\in GL_n(\mathbb{K})$.

Théorème 13.

• L'application $\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\\ A & \mapsto & \exp(A)\end{array}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. L'application $\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E) & \rightarrow & \mathscr{L}(E)\\ f & \mapsto & \exp(f)\end{array}$ est continue sur $\mathscr{L}(E)$.

Démonstration . On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\ \|$.

Pour toute $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $p\in\mathbb{N}$, posons $f_p(A)=\frac{1}{p!}A^p$.
Soit $p\in\mathbb{N}^*$. L'application $g\ :\ A\mapsto(\underbrace{A,\dots,A}_{p})$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à valeurs dans $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^p$ car linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $h_p\ :\ (A_1,\dots,A_p)\mapsto A_1\times\dots\times A_p$ est continue sur $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^p$ car p-linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Donc, $f_p=\frac{1}{p!}h_p\circ g$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ceci reste vrai quand $p=0$ car $f_0=\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

Notons alors exp l'application $A\mapsto\exp(A)$. On a $\exp=\sum_{p=0}^{+\infty}f_p$. Soit $R>0$. Pour $A\in B_f(0,R)$,

$$\|f_p(A)\|=\frac{1}{p!}\|A^p\|\leqslant\frac{\|A\|^p}{p!}\leqslant\frac{R^p}{p!},$$

puis $\|f_p\|_{\infty,B_f(0,R)}\leqslant\frac{R^p}{p!}$. Puisque la série numérique de terme général $\frac{R^p}{p!}$ converge (et a pour somme e^R), il en est de même de la série de terme général $\|f_p\|_{\infty,B_f(0,R)}$. On en déduit que la série de fonctions de terme général f_p converge normalement et donc uniformément sur $B_f(0,R)$.

Ainsi,

- chaque fonction f_p, $p \in \mathbb{N}$, est continue sur $B_f(0,R)$;
- la série de fonctions de terme général f_p, $p \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers exp sur $B_f(0,R)$.

On en déduit que la fonction exp est continue sur $B_f(0,R)$. Ceci étant vrai pour tout $R > 0$, on a montré que la fonction exp est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

❏

Le théorème suivant prépare le terrain pour la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants (chapitre 15) :

Théorème 14.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}$. L'application $f\ :\ t \mapsto e^{tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $f'(t) = A \times e^{tA}$.
- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puis $a \in \mathscr{L}(E)$. L'application $f\ :\ a \mapsto e^{ta}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $f'(t) = a \circ e^{ta}$.

Démonstration . On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\ \|$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$, puisque les matrices t_0A et $(t-t_0)A$ commutent,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{t-t_0}\left(e^{tA}-e^{t_0A}\right)-Ae^{t_0A}\right\| &= \frac{1}{|t-t_0|}\left\|e^{t_0A}\left(e^{(t-t_0)A}-I-(t-t_0)A\right)\right\| \\
&= \frac{1}{|t-t_0|}\left\|e^{t_0A}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{(t-t_0)^p}{p!}A^p\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{|t-t_0|}\left\|e^{t_0A}\right\|\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{|t-t_0|^p}{p!}\|A\|^p \\
&= \left\|e^{t_0A}\right\|\left|\frac{1}{h}\left(e^{h\|A\|}-1-h\|A\|\right)\right| \text{ (en posant } h=|t-t_0|).
\end{aligned}$$

Quand t tend vers t_0, h tend vers 0 puis $\frac{1}{h}\left(e^{h\|A\|}-1-h\|A\|\right)$ tend vers 0 (car par exemple, $e^{h\|A\|} \underset{h\to 0}{=} 1+h\|A\|+o(h)$). On en déduit que $\frac{1}{t-t_0}\left(e^{tA}-e^{t_0A}\right)-Ae^{t_0A}$ tend vers 0 quand t tend vers t_0 ce qui démontre le résultat.

La démonstration est analogue pour un endomorphisme a d'un espace de dimension finie.

❏

Terminons cette section par une remarque. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ fixée puis μ_A son polynôme minimal dont le degré est noté d ($\leqslant n$). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $P_p = \sum_{k=0}^{p}\frac{X^k}{k!}$.

La division euclidienne de Π_p par μ_A s'écrit $P_p = Q_p \times \mu_A + R_p$ où $Q_p \in \mathbb{K}[X]$ et $R_p \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$. En évaluant en A, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N},\ P_p(A) = R_p(A) \in \text{Vect}\left(I_n, A, \dots, A^{d-1}\right).$$

Maintenant, $\mathbb{K}_{d-1}[A] = \text{Vect}\left(I_n, A, \dots, A^{d-1}\right)$ est un fermé de l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (en tant que sous-espace d'un espace dedimension finie) . On en déduit que la limite de la suite $(P_p(A))_{p\in\mathbb{K}}$, à savoir $\exp(A)$, est un élément de $\mathbb{K}_{d-1}[A] = \text{Vect}\left(I_n, A, \dots, A^{d-1}\right)$.

Dit autrement, l'exponentielle d'une matrice A est un polynôme en A (ce qui ne signifie pas que l'exponentielle est un polynôme car le polynôme en A dont il est question est fonction de A).

4.3 Quelques exemples de calculs d'exponentielles de matrices

On verra dans le chapitre « systèmes différentiels linéaires et équations différentielles linéaires » que les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants peuvent être résolus à partir du calcul de l'exponentielle d'une matrice. Quand A est une matrice donnée, les solutions d'un certain problème s'exprimeront à l'aide de la fonction $t \mapsto \exp(tA)$. Dans les exemples qui suivent, plutôt que de calculer $\exp(A)$, nous calculerons $\exp(tA)$ pour t réel (pour préparer le terrain).

Exemple 1 (utilisation d'un polynôme annulateur). Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs fournit

$$\chi_A=\begin{vmatrix} X & -\frac{1}{2} & 2\\ -\frac{1}{2} & X & 0\\ 0 & 0 & X+\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\left(X^2-\frac{1}{4}\right)\left(X+\frac{1}{2}\right)=\left(X+\frac{1}{2}\right)^2\left(X-\frac{1}{2}\right).$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(A)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. On note que $\mathrm{rg}\left(A+\frac{1}{2}I_3\right)=2$ et donc que $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(A+\frac{1}{2}I_3\right)\right)=1<2$.

La matrice A 'est pas diagonalisable puis $\mu_A=\chi_A=\left(X+\frac{1}{2}\right)^2\left(X-\frac{1}{2}\right)$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n=Q_n\times\chi_A+a_nX^2+b_nX+c_n$ où $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ et $(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3$. En évaluant en $-\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{2}$ puis en dérivant et en réevaluant en $-\frac{1}{2}$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}a_n-\frac{1}{2}b_n+c_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{(I)}\\ \frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n+c_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{(II)}\\ -a_n+b_n=n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{(III)}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}b_n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{(II)}-\text{(I)}\\ a_n=(2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{(III)}\\ c_n=-\frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right..$$

Le théorème de Cayley-Hamilton fournit $\chi_A(A)=0$ et donc $A^n=a_nA^2+b_nA+c_nI_3$. Par suite, pour t réel donné (puisque toutes les séries ci-dessous convergent)

$$\begin{aligned}\exp(tA)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}A^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\left(a_nA^2+b_nA+c_nI_3\right)\\&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\frac{t^n}{n!}\right)I_3+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\frac{t^n}{n!}\right)A+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{t^n}{n!}\right)A^2.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{t^n}{n!}=2\sum_{n=0}^{+\infty}n\frac{(-t/2)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t/2)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(t/2)^n}{n!}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-t/2)^n}{(n-1)!}-e^{-t/2}+e^{t/2}=-te^{-t/2}-e^{-t/2}+e^{t/2}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\frac{t^n}{n!}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t/2)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(t/2)^n}{n!}=-e^{-t/2}+e^{t/2}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\frac{t^n}{n!}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}n\frac{(-t/2)^n}{n!}+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t/2)^n}{n!}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(t/2)^n}{n!}=\frac{t}{4}e^{-t/2}+\frac{3}{4}e^{-t/2}+\frac{1}{4}e^{t/2}$.

On en déduit que $\exp(tA)=\frac{1}{4}\left((t+3)e^{-t/2}+e^{t/2}\right)I_3+\left(-e^{-t/2}+e^{t/2}\right)A+\left(-(t+1)e^{-t/2}+e^{t/2}\right)A^2$ avec

$$A^2=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&-2\\ \frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&-2\\ \frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&1\\ 0&\frac{1}{4}&-1\\ 0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\exp(tA) = \frac{1}{4}\left((t+3)e^{-t/2} + e^{t/2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(-e^{-t/2} + e^{t/2}\right)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$+ \left(-(t+1)e^{-t/2} + e^{t/2}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2e^{-t/2} + 2e^{t/2} & -2e^{-t/2} + 2e^{t/2} & -4(t-1)e^{-t/2} - 4e^{t/2} \\ -2e^{-t/2} + 2e^{t/2} & 2e^{-t/2} + 2e^{t/2} & 4(t+1)e^{-t/2} - 4e^{t/2} \\ 0 & 0 & 4e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

❑

Exemple 2 (utilisation d'une réduction de la matrice). Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -2 & -2 \\ -1 & X & -1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-3)\left(X^2-1\right) + (-2X-2) + (2X+2)$$
$$= (X+1)(X-1)(X-3).$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = (-1, 1, 3)$. Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x+2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z=-y \end{array}\right.$. Donc, $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+2y+2z=0 \\ x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=-x \end{array}\right.$. Donc, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\,(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y+2z=0 \\ x-3y+z=0 \\ -x+y-3z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-y \\ x=4y \end{array}\right.$. Donc, $E_3(A) = \mathrm{Vect}\,(e_3)$ où $e_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc, $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(-1, 1, 3)$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculons P^{-1}. Notons (i, j, k) la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = j-k \\ e_2 = i-k \\ e_3 = 4i+j-k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j = e_1+k \\ i = e_2+k \\ e_3 = 4\left(e_2+k\right) + \left(e_1+k\right) - k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = \frac{1}{4}\left(-e_1-4e_2+e_3\right) \\ j = \frac{1}{4}\left(3e_1-4e_2+e_3\right) \\ i = \frac{1}{4}\left(-e_1+e_3\right) \end{array}\right. .$$

Donc, $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons alors $\exp(tA)$ pour t réel donné. Puisque $tA = P \times tD \times P^{-1}$, on sait que (par continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ entre autre)

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= P\times\exp(tD)\times P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&1&4\\1&0&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{t}&0\\0&0&e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&-1\\0&-4&-4\\1&1&1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&e^{t}&4e^{3t}\\e^{-t}&0&e^{3t}\\-e^{-t}&-e^{t}&-e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&-1\\0&-4&-4\\1&1&1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}4e^{3t}&-4e^{t}+4e^{3t}&-4e^{t}+4e^{3t}\\-e^{-t}+e^{3t}&3e^{-t}+e^{3t}&-e^{-t}+e^{3t}\\e^{-t}-e^{3t}&-3e^{-t}+4e^{t}-e^{3t}&e^{-t}+4e^{t}-e^{3t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

❑

Exemple 3 (cas où A n'a qu'une valeur propre). Soit $A=\begin{pmatrix}4&1&1\\6&4&2\\-10&-4&-2\end{pmatrix}$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix}X-4&-1&-1\\-6&X-4&-2\\10&4&X+2\end{vmatrix} = (X-4)\left(X^2-2X\right)+6(-X+2)+10(X-2)\\
&= (X-2)(X(X-4)-6+10) = (X-2)\left(X^2-4X+4\right)\\
&= (X-2)^3.\end{aligned}$$

Calculons alors $\exp(tA)$ pour t réel donné. On va profiter du fait que la matrice $A-2I_3$ est nilpotente (on est dans le cas où A n'a qu'une valeur propre). D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $(A-2I_3)^3=0$ et donc

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \exp\left(t\left(A-2I_3\right)+2tI_3\right)\\
&= \exp\left(t\left(A-2I_3\right)\right)\times\exp\left(2tI_3\right)\ \text{(car } t\left(A-2I_3\right) \text{ et } 2tI_3 \text{ commutent)}\\
&= e^{2t}\left(I_3+t\left(A-2I_3\right)+\frac{t^2}{2}\left(A-2I_3\right)^2\right)\ \text{(car pour } n\geqslant 3,\ \left(A-2I_3\right)^n=0)\\
&= e^{2t}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\4&2&2\\-4&-2&-2\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix}(2t+1)\,e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\\left(2t^2+6t\right)e^{2t}&\left(t^2+2t+1\right)e^{2t}&\left(t^2+2t\right)e^{2t}\\\left(-2t^2-10t\right)e^{2t}&\left(-t^2-4t\right)e^{2t}&\left(-t^2-4t+1\right)e^{2t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

❑

