

Planche n° 15. Intégrales dépendant d'un paramètre.

Corrigé

Exercice n° 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$. On considère $F_n : [a, A] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, t) \mapsto \frac{1}{(t^2 + x^2)^n}$$

• Pour chaque x de $[a, A]$, la fonction $t \mapsto F_n(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $F_n(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$

> 0 avec $2n > 1$.

• La fonction F_n est admet sur $[a, A] \times [0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x, t) \in [a, A] \times [0, +\infty[, \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t) = \frac{-2nx}{(t^2 + x^2)^{n+1}}.$$

De plus,

- pour chaque $x \in [a, A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,

- pour chaque $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[a, A]$,

- pour chaque $(x, t) \in [a, A] \times [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2nx}{(t^2 + x^2)^{n+1}} \leq \frac{2nA}{(t^2 + a^2)^{n+1}} = \varphi(t),$$

où la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction I_n est de classe C^1 sur $[a, A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0 < a < A$, on a montré que la fonction I_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, I_n'(x) = -2nx \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + x^2)^{n+1}} dt = -2nx I_{n+1}(x).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n'(x) = -2nx I_{n+1}(x).$$

2) Pour $x > 0$, on a $I_1(x) = \left[\frac{1}{x} \operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{x} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$. Ensuite, $I_2(x) = -\frac{1}{2x} I_1'(x) = \frac{\pi}{4x^3}$ puis $I_3(x) = -\frac{1}{4x} I_2'(x) = \frac{3\pi}{16x^5}$

et donc $I_3(1) = \frac{3\pi}{16}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^3} dt = \frac{3\pi}{16}.$$

Exercice n° 2

1) a) **Parité de F.** Soit x un réel du domaine de définition de F . En posant $t = \theta + \pi$, on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 + 2x \cos t + 1) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 + 2x \cos t + 1) dt \text{ (par } 2\pi\text{-périodicité)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln((-x)^2 - 2(-x) \cos t + 1) dt = F(-x). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x , $F(x)$ existe si et seulement si $F(-x)$ existe et de plus $F(x) = F(-x)$.

F est paire.

Définition de F. Soit $x \in [0, +\infty[$. Pour tout réel $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$x^2 - 2x \cos \theta + 1 = (x - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = |x - e^{i\theta}|^2 \geq 0.$$

De plus, $|x - e^{i\theta}| = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} = x \Leftrightarrow x = 1$ et $\theta = 0$. Par suite,

- si $x \neq 1$, pour tout réel $\theta \in [-\pi, \pi]$, $x^2 - 2x \cos \theta + 1 > 0$. La fonction $\theta \mapsto x^2 - 2x \cos \theta + 1$ est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
- si $x = 1$, pour tout réel $\theta \in [-\pi, \pi]$ on a $x^2 - 2x \cos \theta + 1 = 2 - 2 \cos \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$. La fonction $\theta \mapsto \ln \left(4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$ est continue sur $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$ et de plus

$$\ln \left(4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = 2 \ln 2 + 2 \ln \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} 2 \ln \left| \frac{\theta}{2} \right| \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} 2 \ln |\theta| \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} o \left(\frac{1}{\sqrt{|\theta|}} \right).$$

On en déduit que la fonction $\theta \mapsto \ln \left(4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ et donc que $F(1)$ existe.

Finalement, F est définie sur $[0, +\infty[$ et par parité

F est définie sur \mathbb{R} .

Remarque. Par parité de la fonction $\theta \mapsto \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$, pour tout réel x , on a encore $F(x) = 2 \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$.

Continuité de F. Soit $A > 1$. Soit $\Phi : [0, A] \times]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$.

- Pour chaque $x \in [0, A]$, la fonction $\theta \mapsto \Phi(x, \theta)$ est continue par morceaux sur $]0, \pi[$.
- Pour chaque $\theta \in]0, \pi[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, \theta)$ est continue par morceaux sur $[0, A]$.

• Pour chaque $(x, \theta) \in [0, A] \times]0, \pi[$, puisque $x^2 - 2x \cos \theta + 1 = (x - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = |x - e^{i\theta}|^2$, si $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, la fonction $x \mapsto x^2 - 2x \cos \theta + 1$ croît de 1 à $A^2 - 2A \cos \theta + 1$ puis la fonction $x \mapsto \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$ croît de 0 à $\ln(A^2 - 2A \cos \theta + 1)$, et si $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, la fonction $x \mapsto x^2 - 2x \cos \theta + 1$ décroît de 1 à $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ et croît de $\sin^2 \theta$ à $A^2 - 2A \cos \theta + 1$ puis la fonction $x \mapsto \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$ décroît de 0 à $\ln(\sin^2 \theta) \leq 0$ puis croît de $\ln(\sin^2 \theta) \leq 0$ à $\ln(A^2 - 2A \cos \theta + 1)$. Finalement, dans tous les cas,

$$\begin{aligned} |\Phi(x, \theta)| &\leq \text{Max}\{|\ln^2(|\sin \theta|)|, |\ln(A^2 - 2A \cos \theta + 1)|\} \\ &= \text{Max}\{2|\ln(|\sin \theta|)|, |\ln(A^2 - 2A \cos \theta + 1)|\} = \varphi(\theta). \end{aligned}$$

On a vu que la fonction $f_1 : \theta \mapsto 2|\ln(|\sin \theta|)|$ est intégrable sur $]0, \pi[$ et d'autre part, la fonction $f_2 : \theta \mapsto |\ln(A^2 - 2A \cos \theta + 1)|$ est intégrable sur $[0, \pi]$ et donc sur $]0, \pi[$ car continue sur $[0, \pi]$ (car $A > 1$). Puisque $\varphi = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|)$, on en déduit que la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, \pi[$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est continue sur $[0, A]$ et ceci pour tout $A > 1$. Par suite, la fonction F est continue sur \mathbb{R}^+ puis par parité,

la fonction F est continue sur \mathbb{R} .

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2}{x} \cos \theta + \frac{1}{x^2}\right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\ln(1 - 2x \cos \theta + x^2) - \ln(x^2)) d\theta = -4\pi \ln|x| + F(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, F\left(\frac{1}{x}\right) = -4\pi \ln|x| + F(x).$$

c) **Dérivabilité de F sur $] -1, 1[$.** Soient $A \in]0, 1[$ puis $\Phi : [-A, A] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $(x, \theta) \mapsto \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$

- Pour chaque $x \in [-A, A]$, la fonction $\theta \mapsto \Phi(x, \theta)$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
- La fonction Φ admet sur $[-A, A] \times [0, \pi]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

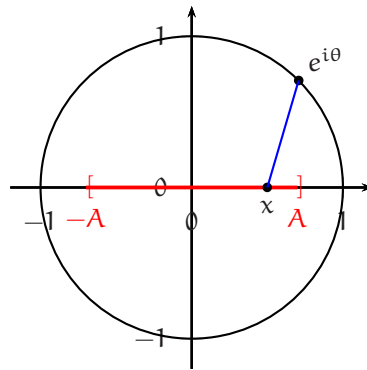
$$\forall (x, \theta) \in [-A, A] \times [0, \pi], \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \theta) = \frac{2x - 2 \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}.$$

De plus,

- pour chaque $x \in [-A, A]$, la fonction $\theta \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \theta)$ est continue par morceaux sur $[0, \pi]$,
- pour chaque $\theta \in [0, \pi]$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \theta)$ est continue sur $[-A, A]$,
- pour chaque $(x, \theta) \in [-A, A] \times [0, \pi]$,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \theta) \right| = \frac{2|x - \cos \theta|}{|x - e^{i\theta}|^2} \leq \frac{4}{|A - 1|^2} = \varphi(\theta).$$

La dernière inégalité écrite est claire géométriquement :



La plus courte distance d'un point du segment $[-A, A]$ au cercle trigonométrique est la distance de A à 1.

De plus, la fonction constante φ est intégrable sur le segment $[0, \pi]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction F est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A \in]0, 1[$, F est de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et $\forall x \in] -1, 1[$,

$$F'(x) = 4 \int_0^\pi \frac{x - \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} d\theta.$$

Pour tout $x \in] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) + 4\pi \ln|x|$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ décrit $] -1, 0[\cup]0, 1[$, F est de classe C^1 sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et pour tout réel $x > 1$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{x^2} \times 4 \int_0^\pi \frac{\frac{1}{x} - \cos \theta}{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \theta + 1} d\theta + \frac{4\pi}{x} = 4 \int_0^\pi \left(\frac{1}{x} \times \frac{-1 + x \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} + \frac{1}{x} \right) d\theta \\ &= 4 \int_0^\pi \left(\frac{1}{x} \times \frac{x^2 - x \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} \right) d\theta = 4 \int_0^\pi \frac{x - \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} d\theta. \end{aligned}$$

Finalement F est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, F'(x) = 4 \int_0^\pi \frac{x - \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} d\theta.$$

d) **Calcul de $F'(x)$.** Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On a donc $\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $d\theta = \frac{2dt}{1 + t^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 4 \int_0^\pi \frac{x - \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} d\theta = 8 \int_0^{+\infty} \frac{x - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{x^2 - 2x \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= 8 \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)x - (1-t^2)}{((1+t^2)x^2 - 2x(1-t^2) + (1+t^2))(1+t^2)} dt \\
&= 8 \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)t^2 + (x-1)}{((x+1)^2 t^2 + (x-1)^2)(1+t^2)} dt
\end{aligned}$$

Pour tout réel t ,

$$\left(t^2 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)(t^2+1) = \left(t - i\frac{x-1}{x+1}\right)\left(t + i\frac{x-1}{x+1}\right)(t-i)(t+i).$$

De plus, $\pm \frac{x-1}{x+1} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = -1 \Leftrightarrow x=0$ et d'autre part $-\frac{x-1}{x+1} \neq \frac{x-1}{x+1}$ car $x \neq 1$.

• $F'(0) = 4 \int_0^\pi (-\cos \theta) d\theta = 0.$

• Si $x \neq 0$, les pôles de la fraction rationnelle $\frac{(x+1)t^2 + (x-1)}{((x+1)^2 t^2 + (x-1)^2)(1+t^2)}$ sont simples et par parité, la décomposition en éléments simples de cette fraction s'écrit

$$\frac{(x+1)t^2 + (x-1)}{((x+1)^2 t^2 + (x-1)^2)(1+t^2)} = \frac{a}{t - i\frac{x-1}{x+1}} - \frac{a}{t + i\frac{x-1}{x+1}} + \frac{b}{t-i} - \frac{b}{t+i},$$

avec

$$\begin{aligned}
a &= \frac{-(x+1)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + (x-1)}{(x+1)^2 \left(2i\frac{x-1}{x+1}\right) \left(1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)} = \frac{-(x+1)(x-1)^2 + (x-1)(x+1)^2}{2i(x+1)(x-1)((x+1)^2 - (x-1)^2)} \\
&= \frac{2(x^2-1)}{2i(x^2-1)(4x)} = \frac{1}{4ix},
\end{aligned}$$

et

$$b = \frac{-(x+1) + (x-1)}{2i(-(x+1)^2 + (x-1)^2)} = \frac{1}{4ix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
8 \frac{(x+1)t^2 + (x-1)}{((x+1)^2 t^2 + (x-1)^2)(1+t^2)} &= \frac{2}{ix} \left(\frac{1}{t - i\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{t + i\frac{x-1}{x+1}} + \frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i} \right) \\
&= \frac{2}{ix} \left(\frac{2i\frac{x-1}{x+1}}{t^2 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} + \frac{2i}{t^2+1} \right) = \frac{4}{x} \left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2 t^2 + (x-1)^2} + \frac{1}{t^2+1} \right)
\end{aligned}$$

Ensuite, en notant ε le signe de $\frac{x-1}{x+1}$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{4}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2 t^2 + (x-1)^2} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt \\
&= \frac{4}{x} \left[\frac{x^2-1}{(x+1)^2} \frac{1}{x+1} \operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{\frac{x-1}{x+1}} \right) + \operatorname{Arctan} t \right]_0^{+\infty} = \frac{4}{x} (\varepsilon + 1) \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Par suite, si $x \in]-1, 1[$, $F'(x) = 0$ et si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $F'(x) = \frac{4\pi}{x}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ \frac{4\pi}{x} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\end{cases}.$$

e) Soit $x > 1$. Puisque $F(x) - 4\pi \ln(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - 4\pi \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} F(y) = F(0) = 0$ par continuité de F en 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - 4\pi \ln(x)) = 0.$$

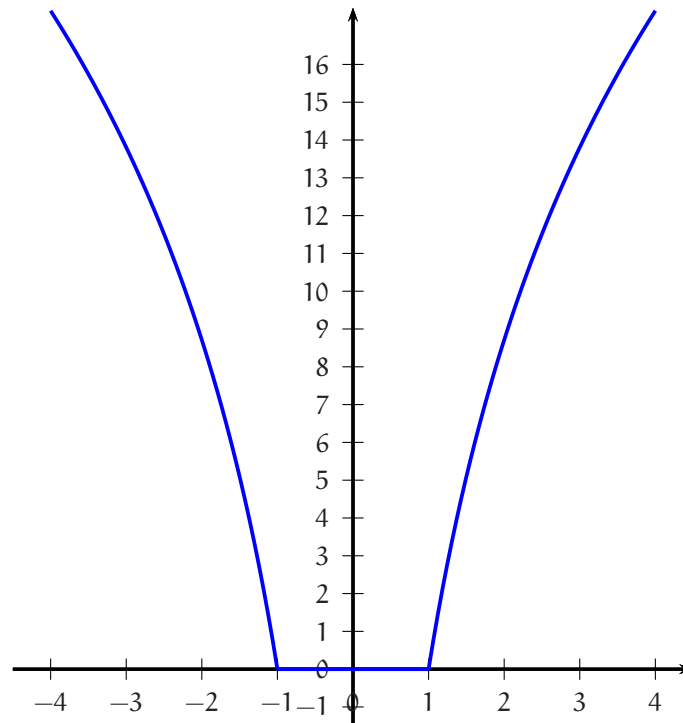
f) • F est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$ de dérivée nulle sur $] -1, 1[$. Donc la fonction F est constante sur l'intervalle $[-1, 1]$. Par suite, pour tout réel $x \in [-1, 1]$, $F(x) = F(0) = 0$.

• F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $\forall x > 1$, $F'(x) = \frac{4\pi}{x}$. Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 1$, $F(x) = 4\pi \ln x + C$ avec $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - 4\pi \ln x) = 0$. Donc $\forall x > 1$, $F(x) = 4\pi \ln x$.

• Si $x < -1$, $F(x) = F(-x) = 4\pi \ln(-x) = 4\pi \ln|x|$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 4\pi \ln(|x|) & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\end{cases}.$$

Graphes de F .



2) a) Soit $x \in]-1, 1[$. Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, on pose $f(\theta) = \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$. Puisque $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$, $x^2 - 2x \cos \theta + 1 > 0$ (voir 1)), f est dérivable sur $[-\pi, \pi]$ et pour $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{2x \sin \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} = \frac{1}{i} \left(\frac{e^{i\theta}}{x - e^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{x - e^{-i\theta}} \right) = \frac{1}{i} \left(-\frac{1}{1 - xe^{-i\theta}} + \frac{1}{1 - xe^{i\theta}} \right) \\ &= \frac{1}{i} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{in\theta} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-in\theta} \right) \quad (\text{car } |xe^{i\theta}| = |xe^{-i\theta}| = |x| < 1) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\theta) x^n. \end{aligned}$$

Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. I désigne l'intervalle $[0, \theta]$ ou $[\theta, 0]$ suivant que θ soit positif ou négatif.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in I$, posons $g_n(t) = 2 \sin(nt)x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in I$, on a $|g_n(t)| \leq |x|^n$. Comme $|x|^n$ est le terme général d'une série numérique convergente, la série de fonctions de terme général g_n , $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément sur le segment I. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(\theta) &= f(0) + \int_0^\theta f'(t) dt = 2 \ln(1-x) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2x^n \int_0^\theta \sin(nt) dt \\ &= 2 \left(- \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \cos(n\theta)) \frac{x^n}{n} \right) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n. \end{aligned}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \forall \theta \in [-\pi, \pi], \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n.$$

Soit $x \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\left| \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n \right| \leq |x|^n$. Comme précédemment, on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$F(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) d\theta = 0.$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta = 0.$$

b) Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. $F(x) = 4\pi \ln|x| + F\left(\frac{1}{x}\right) = 4\pi \ln|x|$ (car $\frac{1}{x} \in]-1, 1[$). Cette égalité reste vraie pour $x = 1$ ou $x = -1$ par continuité. On a ainsi retrouvé les résultats du 1).

Exercice n° 3

1) Soit $A > 0$. Soit $\Phi : [-A, A] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $(x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$.

- Pour chaque x de $[-A, A]$, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrable sur ce segment.
- La fonction Φ admet sur $[-A, A] \times [0, 1]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x, t) \in [-A, A] \times [0, 1], \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

De plus,

- pour chaque $x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur le segment $[0, 1]$,
- pour chaque $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} ,
- pour chaque $(x, t) \in [-A, A] \times [0, 1]$, $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2A = \varphi(t)$, la fonction φ étant continue et donc intégrable sur le segment $[0, 1]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction F est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A > 0$, F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt.$$

2) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur \mathbb{R} . On en déduit que la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , de dérivée la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$. Il en est de même de la fonction G et pour tout réel x ,

$$G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En posant $u = xt$, on obtient

$$F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} x dt = -e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -G'(x),$$

cette égalité restant vraie quand $x = 0$ par continuité des fonctions F' et G' sur \mathbb{R} et donc en 0.

Ainsi, $F' + G' = 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}.$$

4) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|F(x)| = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+0^2)}}{1+0^2} dt = e^{-x^2},$$

et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$, on a montré que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

5) Pour $x > 0$, on a $\int_0^x e^{-t^2} dt \geq 0$ et donc d'après la question 3),

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sqrt{G(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - F(x)}.$$

La question 4) permet alors d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6) Par parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. En posant $t = x^2$ et donc $x = \sqrt{t}$ puis $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$, on obtient

$$\sqrt{\pi} = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ et } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}.$$

Exercice n° 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) = \frac{1}{2}(e^{-t^2+tx} + e^{-t^2-tx}) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)$ est intégrable sur

$[0, +\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut poser $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt$.

Calcul de $f(x)$. Soit $A > 0$. On pose $\Phi : [-A, A] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)$

- Pour chaque $x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.
- La fonction Φ admet sur $[-A, A] \times [0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall (x, t) \in [-A, A] \times [0, +\infty[, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx).$$

De plus,

- pour chaque $x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
- pour chaque $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[-A, A]$,
- pour chaque $(x, t) \in [-A, A] \times [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| = te^{-t^2} |\operatorname{sh}(tx)| \leq te^{-t^2} \operatorname{sh}(t|A|) = \varphi(t).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction f est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $A > 0$, la fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx) dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue maintenant une intégration par parties. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto te^{-t^2}$ et $t \mapsto \operatorname{sh}(tx)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx) dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \operatorname{sh}(tx) \right]_0^A + \frac{x}{2} \int_0^A e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt = -\frac{1}{2}e^{-A^2} \operatorname{sh}(xA) + \frac{x}{2} \int_0^A e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt.$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx) dt = \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt = \frac{x}{2} f(x)$.

Ensuite, pour tout réel x , $e^{-x^2/4} f'(x) - \frac{x}{2} e^{-x^2/4} f(x) = 0$ ou encore $(e^{-x^2/4} f)'(x) = 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2/4} f(x) = e^0 f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2/4}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2/4}.$$

Exercice n° 5

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est continue sur $]0, 1[$.

Etude en 1. $\frac{t-1}{\ln t} t^x \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 1 \times 1 = 1$ et donc la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ se prolonge par continuité en 1. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche.

Etude en 0. $\frac{t-1}{\ln t} t^x \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^x}{\ln t} > 0$.

- si $x > -1$, $-\frac{t^x}{\ln t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} o(t^x)$ et puisque $x > -1$, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

- si $x \leq -1$, la fonction $t \mapsto -\frac{t^x}{\ln t}$ domine la fonction $t \mapsto -\frac{1}{t \ln t}$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures. Puisque

la fonction $t \mapsto -\frac{1}{t \ln t}$ est positive et que $\int_x^{1/2} -\frac{1}{t \ln t} dt = \ln |\ln(x)| - \ln |\ln(1/2)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$, la fonction $t \mapsto -\frac{1}{t \ln t}$

n'est pas intégrable sur un voisinage de 0. Il en est de même de la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$.

Finalement, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $x > -1$. Pour $x > -1$, on peut poser

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt.$$

Calcul de $f(x)$. Soit $a > -1$. On pose $\Phi : [a, +\infty[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$.

- Pour chaque $x \in [\alpha, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$.
- La fonction Φ admet sur $[\alpha, +\infty[\times]0, 1[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall (x, t) \in [\alpha, +\infty[\times]0, 1[, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^x = t^{x+1} - t^x.$$

De plus,

- pour chaque $x \in [\alpha, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$,
- pour chaque $t \in]0, 1[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[\alpha, +\infty[$,
- pour chaque $(x, t) \in [\alpha, +\infty[\times]0, 1[$,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| = (1-t)t^\alpha = \varphi(t).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0, 1[$ et intégrable sur $]0, 1[$ car $\alpha > -1$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction f est de classe C^1 sur $[\alpha, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $\alpha > -1$, la fonction f est de classe C^1 sur $] -1, +\infty[$ et

$$\forall x > -1, f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \left[\frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > -1, f(x) = \ln \left(\frac{x+2}{x+1} \right) + C$ (*). Pour déterminer la constante C , on peut utiliser

le résultat de l'exercice n° 7, planche 8 : $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2$. On peut aussi obtenir directement la constante C sans aucun calcul d'intégrale. Pour cela, déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

La fonction $g : t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur le segment $]0, 1[$, prolongeable par continuité en 0 et en 1 en posant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. On en déduit que cette fonction est bornée sur l'intervalle $]0, 1[$ (car son prolongement est une fonction continue sur un segment).

Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0, 1[$. Pour $x > -1$, on a

$$|g(x)| \leq M \int_0^1 t^x dt = \frac{M}{x+1}.$$

Ceci montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et en passant à la limite quand x tend vers $+\infty$ dans l'égalité (*), on obtient $C = 0$. On a donc montré que

$$\forall x > -1, \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt = \ln \left(\frac{x+2}{x+1} \right).$$

On retrouve en particulier $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2$.

Exercice n° 6

Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$. Soit $x \geq 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$ existe pour tout réel positif x et on pose $\forall x \geq 0, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

Continuité de f sur $[0, +\infty[$. Soit $\Phi : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$$

- Pour chaque $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Pour chaque $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Pour chaque $(x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$,

$$|\Phi(x, t)| = \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi_0(t).$$

De plus, la fonction φ_0 est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ car équivalente à $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, f est continue sur $[0, +\infty[$.

Dérivée seconde de f . Soit $a > 0$. On pose $\Phi : [a, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$$

En plus de ce qui précède, Φ admet sur $[a, +\infty[\times [0, +\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 définies par

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}.$$

- Pour chaque $x \in [a, +\infty[$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Pour chaque $t \in [0, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues sur $[a, +\infty[$.
- Pour chaque $(x, t) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{te^{-tx}}{1+t^2} \leq \frac{te^{-at}}{1+t^2} = \varphi_1(t) \text{ et } \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) \right| = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} = \varphi_2(t).$$

De plus, les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et intégrables sur $[0, +\infty[$ car négligeables devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est de classe C^2 sur $[a, +\infty[$ et ses dérivées premières et secondes s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2} dt \text{ et } f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt.$$

Equation différentielle vérifiée par f . Pour $x > 0$,

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

$$\forall x > 0, f(x) + f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$. Si $x = 0$, le n° 3, 1) de la planche 11 montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est une intégrale convergente. Si $x > 0$, une intégration par parties fournit pour $A > 0$

$$\int_0^A \frac{\sin t}{t+x} dt = -\frac{\cos A}{A+x} + \frac{1}{x} - \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2} dt.$$

La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{(t+x)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $A \mapsto \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2} dt$ a une limite réelle quand A tend vers $+\infty$ et il en

est de même de la fonction $A \mapsto \int_0^A \frac{\sin t}{t+x} dt$. Ainsi, pour chaque $x \in [0, +\infty[$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ est une intégrale convergente.

Pour $x \geq 0$, on peut donc poser $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$.

Equation différentielle vérifiée par g . Pour $x > 0$, on pose $u = x + t$. on obtient

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du.$$

(car toutes les intégrales considérées sont convergentes). Maintenant, les fonctions $c : u \mapsto \frac{\cos u}{u}$ et $s : u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ sont continues sur $]0, +\infty[$ et admettent donc des primitives sur $]0, +\infty[$. On note C (respectivement S) une primitive de la fonction c (respectivement s) sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) \right) - C(x)$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivée $-c$. De même, la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivée $-s$. Mais alors la fonction g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \frac{\sin x \cos x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \frac{\cos x \sin x}{x} \\ &= -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du. \end{aligned}$$

La fonction g' est encore de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \frac{\cos^2 x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du + \frac{\sin^2 x}{x} \\ &= \frac{1}{x} - g(x). \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, g''(x) + g(x) = \frac{1}{x}.$$

Egalité de f et g sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, $(f - g)''(x) + (f - g)(x) = 0$. Donc il existe deux réels λ et μ tels que $\forall x > 0$, $(f - g)(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x = A \cos(x + \varphi)$ pour $A = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ et pour un certain φ .

Maintenant, pour $x > 0$, $|f(x)| = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$ et on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Ensuite, $|g(x)| \leq \left| \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \right| + \left| \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \right|$. Puisque les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ sont des intégrales convergentes, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = 0$ et donc aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ ce qui impose $A = 0$ et donc $\forall x > 0$, $f(x) = g(x)$.

$$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt.$$

Continuité de g en 0 et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \\ &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \sin x \int_x^1 \frac{1 - \cos u}{u} du + \sin x \ln x. \end{aligned}$$

Quand x tend vers 0, $\sin x \ln x \sim x \ln x$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln x = 0$. Ensuite, la fonction $u \mapsto \frac{1 - \cos u}{u}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \int_x^1 \frac{1 - \cos u}{u} du = 0 \times \int_0^1 \frac{1 - \cos u}{u} du = 0$. Il reste

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = g(0).$$

La fonction g est donc continue en 0. Puisque la fonction f est également continue en 0, on en déduit que

$$g(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\forall x \geq 0, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt \text{ et en particulier, } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice n° 7

• Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue sur le segment $[0, T]$ et donc intégrable sur ce segment. Par suite, $(f * g)(x)$ existe.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. $(f * g)(x+T) = \int_0^T f(x+T-t)g(t) dt = \int_0^T f(x-t)g(t) dt = f * g(x)$. Donc la fonction $f * g$ est T -périodique.

• Les fonction f et g sont continues sur \mathbb{R} et T -périodiques. Ces fonctions sont en particulier bornées sur \mathbb{R} . On note M_1 et M_2 des majorants sur \mathbb{R} des fonctions $|f|$ et $|g|$ respectivement.

Soit $\Phi : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, t) \mapsto f(x-t)g(t)$$

- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, T]$.

- Pour chaque $t \in [0, T]$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} .

- Pour chaque $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$, $|\Phi(x, t)| \leq M_1 M_2 = \varphi(t)$. De plus, la fonction φ est continue et donc intégrable sur le segment $[0, T]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $f * g$ est continue sur \mathbb{R} .

2) Soient f et g deux éléments de E . Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = x - t$, on obtient

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_0^T f(x-t)g(t) dt = \int_x^{x-T} f(u)g(u-t) (-du) = \int_{x-T}^x g(u-t)f(u) du \\ &= \int_0^T g(u-t)f(u) du \\ &\text{(car la fonction } u \mapsto g(u-t)f(u) \text{ est } T\text{-périodique et car } [x-T, x] \text{ est de longueur } T) \\ &= (g * f)(x). \end{aligned}$$

Exercice n° 8

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} et de plus, pour tout réel t , $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$. Puisque f est intégrable sur \mathbb{R} , il en est de même de la fonction $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$. Donc, $\widehat{f}(x)$ existe dans \mathbb{R} . Ceci montre que \widehat{f} est définie sur \mathbb{R} .

Pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, posons $\Phi(x, t) = f(t)e^{-ixt}$ de sorte que pour tout réel x , $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, t) dt$.

• Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} .

• Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} .

• Pour chaque $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $|\Phi(x, t)| \leq |f(t)| = \varphi_0(t)$ où φ_0 est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur \mathbb{R} .

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, \widehat{f} est continue sur \mathbb{R} .

2) Supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Φ admet sur \mathbb{R}^2 des dérivées partielles par rapport à sa première à tout ordre définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}(x, t) = (-it)^n f(t)e^{-ixt}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}(x, t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} .

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} .

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\left| \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq t^n |f(t)| = \varphi_n(t)$ où φ_n est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur \mathbb{R} .

D'après le théorème de dérivation généralisé des intégrales à paramètre, \widehat{f} est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f}^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^n f(t) e^{-ixt} dt.$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto e^{-ixt}$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R} . Au vu de la convergence des différentes intégrales, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\widehat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) dt = [f(t)e^{-ixt}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-ix)e^{-ixt} dt = ix \widehat{f}(x).$$