

Planche n° 15. Intégrales dépendant d'un paramètre

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (**)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + x^2)^n} dt$.

1) Calculer la dérivée de la fonction I_n sur $]0, +\infty[$.

2) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^3} dt$.

Exercice n° 2 (***) I (très long) (Intégrale de POISSON)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2) d\theta$.

1) a) Montrer que F est paire, définie et continue sur \mathbb{R} .

b) Déterminer une relation entre $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

c) Montrer que F est dérivable sur $] -1, 1[$ puis sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Préciser une expression de $F'(x)$ sous forme intégrale.

d) Calculer $F'(x)$.

e) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - 4\pi \ln x)$.

f) En déduire $F(x)$ pour tout réel x . Tracer le graphe de F .

2) a) Quand $x \in] -1, 1[$, retrouver ce résultat en écrivant d'abord $\ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$ comme somme d'une série (commencer par dériver la fonction de θ).

b) En déduire $F(x)$ pour tout réel x de $] -1, 1[$ puis pour tout réel x .

Exercice n° 3 (** I) (Un calcul de l'intégrale de GAUSS $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$.

1) Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et préciser F' .

2) Montrer que G est de classe C^1 sur \mathbb{R} et préciser G' .

3) Montrer que la fonction $F + G$ est constante sur \mathbb{R} .

4) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

5) En déduire I .

6) Déterminer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

Exercice n° 4 (***)

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt$ (on dérivera l'intégrale à paramètre et on admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice n° 5 (***)

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$.

Exercice n° 6 (**** I) (très long)

Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$ et en déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ (indication : trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par ces deux fonctions).

Exercice n° 7 (I)** (Produit de convolution)

1) Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} , continues et T -périodiques (T réel strictement positif). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f * g(x) = \int_0^T f(x-t)g(t) dt.$$

Montrer que la fonction $f * g$ est définie sur \mathbb{R} , continue et T -périodique.

2) $*$ est donc une loi interne sur E , l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur \mathbb{R} et T -périodiques. Montrer que cette loi est commutative.

Exercice n° 8 (I)** (Transformée de FOURIER)

1) Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} , on pose $\widehat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt$. Montrer que \widehat{f} est définie et continue sur \mathbb{R} .

2) On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^k f(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que \widehat{f} est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et déterminer $\widehat{f}^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On suppose que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et intégrable sur \mathbb{R} et que f a une limite nulle en $-\infty$ et en $+\infty$. Déterminer \widehat{f}' en fonction de \widehat{f} .