Planche n° 14. Fonctions trigonométriques réciproques. Corrigé

Exercice n° 1

1) Arcsin x existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\sin(\text{Arcsin}\, x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et

$$\text{pour tout } x \text{ de } [-1,1],\ \sin(\text{Arcsin}\, x) = x.$$

2) $\text{Arcsin}(\sin x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

• S'il existe un entier relatif k tel que $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x - 2k\pi < \dfrac{\pi}{2}$ et donc

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(x - 2k\pi)) = x - 2k\pi.$$

De plus, on a $k \leqslant \dfrac{x}{2\pi} + \dfrac{1}{4} < k + \dfrac{1}{2}$ et donc $k = \left\lfloor \dfrac{x}{2\pi} + \dfrac{1}{4} \right\rfloor$ puis

$$\text{Arcsin}(\sin x) = x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4} \right\rfloor.$$

• S'il existe un entier relatif k tel que $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\dfrac{\pi}{2} < \pi - x + 2k\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et donc

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - x + 2k\pi)) = \pi - x + 2k\pi.$$

De plus, $k \leqslant \dfrac{x}{2\pi} - \dfrac{1}{4} < k + \dfrac{1}{2}$ et donc $k = \left\lfloor \dfrac{x}{2\pi} - \dfrac{1}{4} \right\rfloor$ puis

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \pi - x + 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4} \right\rfloor.$$

3) Arccos x existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\cos(\text{Arccos}\, x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et

$$\text{pour tout } x \text{ dans } [-1,1],\ \cos(\text{Arccos}\, x) = x.$$

4) $\text{Arccos}(\cos x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $[0,\pi]$.

• S'il existe un entier relatif k tel que $2k\pi \leqslant x < \pi + 2k\pi$, alors $\text{Arccos}(\cos x) = x - 2k\pi$ avec $k = \left\lfloor \dfrac{x}{2\pi} \right\rfloor$.

• S'il existe un entier relatif k tel que $-\pi + 2k\pi \leqslant x < 2k\pi$ alors $\text{Arccos}(\cos x) = \text{Arccos}(\cos(2k\pi - x)) = 2k\pi - x$ avec $k = \left\lfloor \dfrac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor$.

5) Pour tout réel x, $\tan(\text{Arctan}\, x) = x$.

6) $\text{Arctan}(\tan x)$ existe si et seulement si x n'est pas dans $\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et pour ces x, il existe un unique entier relatif k tel que $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Dans ce cas, $\text{Arctan}(\tan x) = \text{Arctan}(\tan(x - k\pi)) = x - k\pi$ avec $k = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$.

Exercice n° 2

1) 1ère solution. Posons $f(x) = \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x$ pour x dans $[-1,1]$.

f est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$. De plus, pour x dans $]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc f est constante sur $]-1,1[$ puis sur $[-1,1]$ par continuité de f en -1 et en 1. Pour tout x de $[-1,1]$, $f(x) = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2}.}$$

2ème solution. Il existe un unique réel θ dans $[0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$, à savoir $\theta = \text{Arccos}\, x$. Puisque $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, on a encore $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ puis $\text{Arcsin}(\cos\theta) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ et donc

$$\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \text{Arccos}(\cos\theta) + \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

2) **1ère solution**. Pour x réel non nul, posons $f(x) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \dfrac{1}{x}$. Notons que f est impaire.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour x non nul, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 0$. f est donc constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (mais pas nécessairement sur $\mathbb{R}^*$). Donc, pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 2\,\mathrm{Arctan}\,1 = \dfrac{\pi}{2}$, et puisque f est impaire, pour $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -\dfrac{\pi}{2}$ (on peut aussi écrire que f est constante sur $]-\infty, 0[$ et donc que pour $x < 0$, $f(x) = f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$). Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{2} \text{ si } x > 0\\ -\dfrac{\pi}{2} \text{ si } x < 0\end{array}\right. = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(x).}$$

On doit noter que la dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}^*$ mais que f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

2ème solution Pour x réel strictement positif donné, il existe un unique réel θ dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan\theta$ à savoir $\theta = \mathrm{Arctan}\,x$. Mais alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} &= \mathrm{Arctan}(\tan\theta) + \mathrm{Arctan}(\mathrm{cotan}\,\theta) = \mathrm{Arctan}(\tan\theta) + \mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)\\ &= \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(car θ et $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ sont éléments de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.)

3) $\cos^2(\mathrm{Arctan}\,a) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Arctan}\,a)} = \dfrac{1}{1+a^2}$. De plus , $\mathrm{Arctan}\,a$ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos(\mathrm{Arctan}\,a) > 0$. On en déduit que pour tout réel a, $\cos(\mathrm{Arctan}\,a) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Ensuite,

$$\sin(\mathrm{Arctan}\,a) = \cos(\mathrm{Arctan}\,a)\tan(\mathrm{Arctan}\,a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \cos(\mathrm{Arctan}\,a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \text{ et } \sin(\mathrm{Arctan}\,a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.}$$

4) D'après 3),

$$\cos(\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b) = \cos(\mathrm{Arctan}\,a)\cos(\mathrm{Arctan}\,b) - \sin(\mathrm{Arctan}\,a)\sin(\mathrm{Arctan}\,b) = \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},$$

ce qui montre déjà , puisque $ab \neq 1$, que $\cos(\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b) \neq 0$ et donc que $\tan(\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b)$ a un sens. Immédiatement,

$$\tan(\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b) = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Maintenant, $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b$ est dans $\left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

1er cas. Si $ab < 1$ alors $\cos(\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b) > 0$ et donc $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b$ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Dans ce cas, $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$.

2ème cas. Si $ab > 1$ alors $\cos(\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b) < 0$ et donc $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b$ est dans $\left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$. Si de plus $a > 0$, $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b > -\dfrac{\pi}{2}$ et donc $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b$ est dans $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$. Dans ce cas, $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b - \pi$ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et a même tangente que $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab}$. Donc, $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b - \pi = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab}$ ou encore $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab} + \pi$. Si $a < 0$, on trouve de même $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab} - \pi$.

En résumé,

$$\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b = \left\{ \begin{array}{l} \text{Arctan}\, \dfrac{a+b}{1-ab} \text{ si } ab < 1 \\ \text{Arctan}\, \dfrac{a+b}{1-ab} + \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ \text{Arctan}\, \dfrac{a+b}{1-ab} - \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{array} \right. .$$

Exercice n° 3

Pour x réel, on pose $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}\, \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}\, \sqrt{t}\, dt$.

La fonction $t \mapsto \text{Arcsin}\, \sqrt{t}$ est continue sur $[0, 1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \text{Arcsin}\, \sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $[0, 1]$.

De plus, $x \mapsto \sin^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}\, \sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

De même, la fonction $t \mapsto \text{Arccos}\, \sqrt{t}$ est continue sur $[0, 1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \text{Arccos}\, \sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $[0, 1]$. De plus, la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}\, \sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin x \cos x\, \text{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) - 2 \sin x \cos x\, \text{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x}) \\ &= 2 \sin x \cos x\, (\text{Arcsin}(|\sin x|) - \text{Arccos}(|\cos x|)) . \end{aligned}$$

On note alors que f est π-périodique et paire. Pour x élément de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 2 \sin x \cos x (x - x) = 0$. f est donc constante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et pour x élément de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2} \text{Arcsin}\, \sqrt{t}\, dt + \int_0^{1/2} \text{Arccos}\, \sqrt{t} dt = \int_0^{1/2} \dfrac{\pi}{2}\, dt = \dfrac{\pi}{4}$. Mais alors, par parité et π-périodicité,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}\, \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}\, \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}.}$$

Exercice n° 4

1) 1ère solution. Pour tout réel x, $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $-1 < \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1$. Ainsi f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1} - x \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}} \times \sqrt{x^2+1} \\ &= \frac{1}{1+x^2} = \text{Arctan}'(x). \end{aligned}$$

Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $f_1(x) = \text{Arctan}\, x + C$.
$x = 0$ fournit $C = 0$ et donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \text{Arctan}\, x.}$$

2ème solution. Pour x réel donné, posons $\theta = \text{Arctan}\, x$. θ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan\theta$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \sqrt{\cos^2\theta}\tan\theta = \cos\theta\tan\theta \text{ (car } \cos\theta > 0) \\ &= \sin\theta, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \operatorname{Arcsin}(\sin\theta) = \theta \text{ (car } \theta \text{ est dans } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{)} \\ &= \operatorname{Arctan} x. \end{aligned}$$

2) 1ère solution. Pour tout réel x, $-1 < -1 + \dfrac{2}{1+x^2} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant -1+2 = 1$ avec égalité si et seulement si $x = 0$. f_2 est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, f_2 est paire. Pour tout réel x non nul,

$$f_2'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2\varepsilon}{1+x^2}$$

où ε est le signe de x. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel positif x, $f_2(x) = 2\operatorname{Arctan} x + C$ (y compris $x = 0$ puisque f est continue en 0).
$x = 0$ fournit $C = 0$ et donc, pour tout réel positif x, $f_2(x) = 2\operatorname{Arctan} x$. Par parité,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{Arctan}|x|.}$$

2ème solution. Soit $\theta = \operatorname{Arctan} x$ pour x réel donné. θ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan\theta$.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta(1-\tan^2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta).$$

Donc

$$\begin{aligned} f_2(x) = \operatorname{Arccos}(\cos(2\theta)) &= \begin{cases} 2\theta \text{ si } \theta \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ -2\theta \text{ si } \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2},0\right] \end{cases} = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -2\operatorname{Arctan} x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ 2\operatorname{Arctan}(-x) \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases} \\ &= 2\operatorname{Arctan}|x|. \end{aligned}$$

3) La fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $[-1,1]\setminus\{0\}$ car pour x élément de $[-1,1]$, $1-x^2$ est élément de $[0,1]$ et vaut 1 si et seulement si x vaut 0).
$\dfrac{1-x}{1+x}$ est défini et positif si et seulement si x est dans $]-1,1]$, et nul si et seulement si $x = 1$. f_3 est donc définie et continue sur $]-1,1]$, dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$. Pour x dans $]-1,0[\cup]0,1[$, on note ε le signe de x et on a :

$$f_3'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} - \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si x est dans $]0,1[$, $f_3'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(-\dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\right)'(x)$. Donc, il existe un réel C tel que, pour tout x de $[0,1]$ (par continuité en 0 et en 1) $f_3(x) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + C$. $x = 1$ fournit $C = \dfrac{\pi}{4}$. Donc, pour tout x de $[0,1]$

$$f_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x.$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ f_3(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x.}$$

Si x est dans $]-1,0[$, $f_3'(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\dfrac{3}{2}\operatorname{Arcsin}\right)'(x)$. Donc il existe un réel C' tel que, pour tout x de $]-1,0]$ (par continuité) $f_3(x) = \dfrac{3}{2}\operatorname{Arcsin} x + C'$. $x = 0$ fournit $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = C'$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in]-1,0],\ f_3(x) = \frac{3}{2}\operatorname{Arcsin} x + \frac{\pi}{4}.}$$

4) f_4 est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ et pour x élément de $\mathscr{D}$, on a :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= -\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\dfrac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x-(x-1)}{x^2}\frac{1}{1+\dfrac{(x-1)^2}{x^2}} \\ &= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+1+2x} + \frac{1}{2x^2+1-2x} = -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} = 0. \end{aligned}$$

f_4 est donc constante sur chacun des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. Pour $x>0$, $f(x) = f(1) = 0$. Pour $-1<x<0$, $f(x) = \lim\limits_{\substack{t\to-1\\ t>-1}} f(t) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Arctan} 2 = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$.
Pour $x<-1$, $f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\},\ f_4(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\\ \pi \text{ si } x \in]-1,0[\end{array}\right. .}$$

Exercice n° 5

$0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} < \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{2}$ et

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right) = \frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}}{1-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{5}} = \frac{7}{9}.$$

Comme $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a donc $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = \operatorname{Arctan}\frac{7}{9}$. De même, $\operatorname{Arctan}\frac{7}{9}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{7}{9} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}\right) = \frac{\dfrac{7}{9}+\dfrac{1}{8}}{1-\dfrac{7}{9}\times\dfrac{1}{8}} = \frac{65}{65} = 1,$$

et donc $\operatorname{Arctan}\frac{7}{9} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.}$$

Exercice n° 6

(On va retrouver le résultat de l'exercice n° 2 dans un cas particulier) Soient a et b deux réels positifs.
Alors, $\operatorname{Arctan} a \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{Arctan} b \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc, $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. De plus,

$$\tan(\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b) = \frac{\tan(\operatorname{Arctan} a) - \tan(\operatorname{Arctan} b)}{1+\tan(\operatorname{Arctan} a)\tan(\operatorname{Arctan} b)} = \frac{a-b}{1+ab},$$

et donc, puisque $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\boxed{\forall a \geqslant 0,\ \forall b \geqslant 0,\ \operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).}$$

Soit alors k un entier naturel non nul. $\operatorname{Arctan}\dfrac{2}{k^2} = \operatorname{Arctan}\dfrac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)} = \operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k-1)$ (puisque $k-1$ et $k+1$ sont positifs). Par suite, si n est un entier naturel non nul donné,

$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\frac{2}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k-1)) = \sum_{k=2}^{n+1}\operatorname{Arctan} k - \sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Arctan} k \\ &= \operatorname{Arctan}(n+1) + \operatorname{Arctan} n - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

La limite de u_n vaut donc $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\frac{2}{k^2} = \frac{3\pi}{4}.}$$

Exercice n° 7

1) f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

2) Pour x élément de $\mathscr{D}$,

$$f'(x) = 2x\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1} + (x^2-1)\frac{-2}{(2x-1)^2} \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{(2x-1)^2}} = 2x\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1} - \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}.$$

De plus, pour x non nul : $f'(x) = 2xg(x)$ où $g(x) = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{2x}\dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.

3) Pour x élément de $\mathscr{D}\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}g'(x) &= -\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{1}{2}\frac{2x(2x^3-2x^2+x)-(x^2-1)(6x^2-4x+1)}{x^2(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2(2x^2-2x+1)+2x^4-7x^2+4x-1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} = -\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}.\end{aligned}$$

Maintenant,

$$2x^4-4x^3+9x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2+7x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2 + 7\left(x-\frac{2}{7}\right)^2 + \frac{3}{7} > 0.$$

Donc, g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. En $+\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement positive sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. Quand x tend vers $\dfrac{1}{2}$ par valeurs inférieures, g tend vers $-\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{2} < 0$ et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $g(x)$ tend vers $+\infty$. Donc g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ en un certain réel x_0 de $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. g est de plus strictement négative sur $\left]x_0, \dfrac{1}{2}\right[$ et strictement positive sur $]0, x_0[$. Quand x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement négative sur $]-\infty, 0[$.

4) Enfin, puisque $f'(x) = 2xg(x)$ pour $x \neq 0$, on a les résultats suivants :

sur $]-\infty, 0[$, $f' > 0$, sur $]0, x_0[$, $f' > 0$, sur $\left]x_0, \dfrac{1}{2}\right[$, $f' < 0$, sur $]\dfrac{1}{2}, +\infty[$, $f' > 0$. Comme $f'(0) = 1 > 0$, on a donc : sur $]-\infty, x_0[$, $f' > 0$, sur $\left]x_0, \dfrac{1}{2}\right[$, $f' < 0$ et sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, $f' > 0$. f est strictement croissante sur $]-\infty, x_0]$ et sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ et est strictement décroissante sur $\left[x_0, \dfrac{1}{2}\right[$.

Exercice n° 8

1) Pour tout réel x de $[-1, 1]$, $\sin(2\operatorname{Arcsin} x) = 2\sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

2) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\cos(2\operatorname{Arccos} x) = 2\cos^2(\operatorname{Arccos} x) - 1 = 2x^2 - 1$.

3) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin^2\left(\dfrac{\operatorname{Arccos} x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(\operatorname{Arccos} x)) = \dfrac{1-x}{2}$.

Exercice n° 9

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi.$$

$\mathscr{S} = \left(\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi\mathbb{Z}\right)$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin(2x) = -\frac{1}{4} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = -\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = \pi + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi.\end{aligned}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\tan(x) = 3 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \operatorname{Arctan}(3) + k\pi.$$

4) Une solution est nécessairement dans $[-1,1]$ et même dans $[0,1]$.
La fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $[0,1]$. La fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$. Comme $\dfrac{\pi}{4} \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$, l'équation proposée a une solution et une seule et cette solution est dans $[0,1]$.
Si $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ alors $\sin\left(\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Réciproquement, puisque $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqslant \operatorname{Arcsin}(1) + \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$. Dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$, il y a un nombre et un seul dont le sinus vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ à savoir $\dfrac{\pi}{4}$. Donc, pour x dans $[0,1]$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4} &\Leftrightarrow \sin\left(\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow x^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{4}(1 - x^2) + x^2\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 - x^2)} = \frac{1}{2}\\ &\text{(car le premier membre de l'équation initiale est positif)}\\ &\Leftrightarrow x^2\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 - x^2)} = \frac{1}{2} - \frac{5x^2}{4} + \frac{x^4}{2}\\ &\Leftrightarrow 16x^4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 - x^2) = \left(2x^4 - 5x^2 + 2\right)^2 \text{ et } 2x^4 - 5x^2 + 2 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow 4x^8 - 20x^6 + 16x^4 = 4x^8 - 20x^6 + 33x^4 - 20x^2 + 4 \text{ et } x^2 \notin \left]\frac{1}{2}, 2\right[\\ &\Leftrightarrow 17x^4 - 20x^2 + 4 = 0 \text{ et } x^2 \notin \left]\frac{1}{2}, 2\right[\Leftrightarrow x^2 \in \left\{\frac{10 - \sqrt{32}}{17}, \frac{10 + \sqrt{32}}{17}\right\} \text{ et } x^2 \notin \left]\frac{1}{2}, 2\right[\\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{10 - \sqrt{32}}{17}\\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{10 - 4\sqrt{2}}{17}} \text{ (car } x \geqslant 0).\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\sqrt{\frac{10-4\sqrt{2}}{17}}\right\}.}$$

5) Une solution est nécessairement dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Soit donc x un réel de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
\text{Arcsin}(2x) = \text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}\left(x\sqrt{2}\right) &\Rightarrow \sin(\text{Arcsin}(2x)) = \sin\left(\text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}\left(x\sqrt{2}\right)\right)\\
&\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1-\left(x\sqrt{2}\right)^2} + x\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1-2x^2} + \sqrt{2-2x^2} = 2\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1-2x^2+2-2x^2+2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 4\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 1+4x^2\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4(4x^4-6x^2+2) = (4x^2+1)^2\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 32x^2 = 7 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{7}{32}}
\end{aligned}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres x, la seule implication écrite est une équivalence si x est dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (ce qui est le cas puisque $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{32}}\right)^2 = \frac{14}{64} \leqslant \frac{16}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$) et de plus $\text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}(x\sqrt{2})$ est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Or,

$$0 \leqslant \text{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}} + \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{7}{32}} \times \sqrt{2}\right) = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}} + \text{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{16}} \leqslant 2\,\text{Arcsin}\sqrt{\frac{8}{16}} = 2\,\text{Arcsin}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

et donc $\text{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}} + \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{7}{32}} \times \sqrt{2}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De même, par parité, $\text{Arcsin}\left(-\sqrt{\frac{7}{32}}\right) + \text{Arcsin}\left(-\sqrt{\frac{7}{32}} \times \sqrt{2}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ce qui achève la résolution.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{0, -\frac{\sqrt{14}}{8}, \frac{\sqrt{14}}{8}\right\}.}$$

6) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\text{Arcsin}\, x$ existe si et seulement si $x \in [-1, 1]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]\\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \leqslant 1\\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^4-4x^2+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } (2x^2-1)^2 \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1]
\end{aligned}$$

Pour $x \in [-1, 1]$, $\sin(2\,\text{Arcsin}(x)) = 2\sin(\text{Arcsin}\, x)\cos(\text{Arcsin}\, x) = 2x\sqrt{1-x^2} = \sin(\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}))$, et de plus, $\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x \text{ solution} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 2\,\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } \text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].}$$

7) Par croissance de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$, si $x \leqslant 0$, $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) \leqslant \text{Arctan}(-1) + \text{Arctan}(0) + \text{Arctan}(1) = 0$. En particulier, $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) \neq \dfrac{\pi}{2}$. Une solution est donc nécessairement strictement positive.

Soit donc x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned}
\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) \\
&\Leftrightarrow \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&\Leftrightarrow \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \tan\left(\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1)\right) = \frac{1}{x} \\
&\Leftrightarrow \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \frac{(x-1)+(x+1)}{1-(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x} \\
&\Leftrightarrow \frac{2x}{2-x^2} = \frac{1}{x} \text{ et } \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\
&\Leftrightarrow 2x^2 = 2 - x^2 \text{ et } \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } x \notin \left\{0, \sqrt{2}\right\} \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ et } \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (car } \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - 1\right) + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + 1\right) = 0,8\ldots \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}.}$$

