

Planche n° 14. Fonctions trigonométriques réciproques

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (**IT)

Domaine de définition et calcul des fonctions suivantes :

$$\sin(\operatorname{Arcsin} x), \operatorname{Arcsin}(\sin x), \cos(\operatorname{Arccos} x), \operatorname{Arccos}(\cos x), \tan(\operatorname{Arctan} x), \operatorname{Arctan}(\tan x).$$

Exercice n° 2 (IT)

1) (**) Calculer $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$ pour x élément de $[-1; 1]$.

2) (**) Calculer $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ pour x réel non nul.

3) (**) Calculer $\cos(\operatorname{Arctan} a)$ et $\sin(\operatorname{Arctan} a)$ pour a réel donné.

4) (***) Calculer, pour a et b réels tels que $ab \neq 1$, $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$ en fonction de $\operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab}$ (on étudiera d'abord $\cos(\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b)$ et on distinguera les cas $ab < 1$, $ab > 1$ et $a > 0$, $ab > 1$ et $a < 0$).

Exercice n° 3 (**I)

Existence et calcul de $\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin} \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos} \sqrt{t} dt$.

Exercice n° 4 (***)

Simplifier les expressions suivantes :

1) $f_1(x) = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$.

2) $f_2(x) = \operatorname{Arccos} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$.

3) $f_3(x) = \operatorname{Arcsin} \sqrt{1-x^2} - \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$.

4) $f_4(x) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2x^2} - \operatorname{Arctan} \frac{x}{x+1} + \operatorname{Arctan} \frac{x-1}{x}$.

Exercice n° 5 (**I)

Calculer $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}$.

Exercice n° 6 (**I)

Calculer $u_n = \operatorname{Arctan} \frac{2}{1^2} + \operatorname{Arctan} \frac{2}{2^2} + \dots + \operatorname{Arctan} \frac{2}{n^2}$ pour n entier naturel non nul donné puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
(Utiliser le n° 2.4))

Exercice n° 7 (***) (Mines de DOUAI 1984)

On considère la fonction numérique f telle que :

$$f(x) = (x^2 - 1) \operatorname{Arctan} \frac{1}{2x-1},$$

et on appelle (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Quel est l'ensemble de définition \mathcal{D} de f ?

2) Exprimer, sur $\mathcal{D} \setminus \{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$.

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g .

4) Dresser le tableau de variation de f .

Exercice n° 8 ()**

Simplifier les expressions suivantes

$$1) \sin(2 \operatorname{Arcsin} x) \quad 2) \cos(2 \operatorname{Arccos} x) \quad 3) \sin^2 \left(\frac{\operatorname{Arccos} x}{2} \right)$$

Exercice n° 9Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1) (*) $\cos x = \frac{1}{3}$

3) (*) $\tan(x) = 3$

5) (***) $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{2})$

7) (***) $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}$

2) (*) $\sin(2x) = -\frac{1}{4}$

4) (***) $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

6) (***) $2 \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$