Planche n° 14. Séries entières. Corrigé

Exercice n° 1

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{n}{4^n+1}$. Pour $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$ puis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n} \times \frac{4^n+1}{4^{n+1}+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \times \frac{4^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}.$$

D'après la règle de d'Alembert,

$$\boxed{R = 4.}$$

2) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n}{4^n+1} z^{4n} \neq 0$ puis

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+1}{n} \times \frac{4^n+1}{4^{n+1}+1} \times \frac{|z|^{4n+4}}{|z|^{4n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|^4}{4}.$$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique de terme général u_n converge absolument si $\dfrac{|z|^4}{4} < 1$ ou encore $|z| < \sqrt{2}$ et diverge grossièrement si $|z| > \sqrt{2}$. Donc,

$$\boxed{R = \sqrt{2}.}$$

Variante : d'après la règle de d'Alembert pour les séries entières, la série entière $\sum \dfrac{n}{4^n+1} Z^{4n}$ a un rayon égal à 4. Mais alors, si z est un nombre complexe tel que $|z|^4 < 4$, la série numérique de terme général $\dfrac{n}{4^n+1} z^{4n}$ converge absolument et si $|z|^4 > 4$, la série de terme général $\dfrac{n}{4^n+1} z^{4n}$ diverge grossièrement.

3) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite associée ($\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{1}{p+1}$). La suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc $R_a \geqslant 1$. Mais $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 1^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p+1} = +\infty$ et donc $R_a \leqslant 1$. Finalement,

$$\boxed{R = 1.}$$

4) Soit $z \neq 0$. Pour $n \geqslant e^{1/|z|}$, on a $|z| \ln n \geqslant 1$ puis $|(\ln n)^n z^n| = (|z| \ln n)^n \geqslant 1$. Donc la suite $((\ln n)^n z^n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, pour tout nombre complexe non nul z, la série proposée diverge grossièrement.

$$\boxed{R = 0.}$$

5) D'après la formule de Stirling

$$(\ln(n!))^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right) = \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\left(\sqrt{2\pi}\right)\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \ln^2 n.$$

La série entière proposée a même rayon de convergence que la série entière associée à la suite $\left(n^2 \ln^2 n\right)$. Comme $\dfrac{(n+1)^2 \ln^2(n+1)}{n^2 \ln^2 n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2 \ln^2(n)}{n^2 \ln^2(n)} = 1$, la règle de d'Alembert permet d'affirmer que

$$\boxed{R = 1.}$$

6)

$$n^4 \ln\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n^4 \ln\left(1 + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{24} + o(1).$$

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

Donc $\left(\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}+\cos\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{1/24}$ puis

$$\boxed{R = 1.}$$

7) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \dfrac{1}{n^n}\dbinom{2n}{n}$.

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(2n+2)(2n+1)n^n}{(n+1)^2(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \times \frac{4n+2}{n+1} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{ne}.\end{aligned}$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$. D'après la règle de d'Alembert,

$$\boxed{R = +\infty.}$$

6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) \leqslant \ln(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant n\ln n$ puis, $b_n \dfrac{\ln^\alpha(n)}{n!^\beta} \leqslant a_n \dfrac{(\ln(n!))^\alpha}{n!^\beta} \dfrac{n^\alpha \ln^\alpha(n)}{n!^\beta} = c_n$. Ensuite,

$$\frac{(\ln(n+1))^\alpha/(n+1)!^\beta}{(\ln n)^\alpha/n!^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$$

et

$$\frac{((n+1)\ln(n+1))^\alpha/(n+1)!^b}{(n\ln n)^\alpha/n!^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$$

et donc, d'après la règle de d'Alembert, si $\beta > 0$, $R_b = R_c = +\infty$ puis $R_a = +\infty$, si $\beta < 0$, $R_b = R_c = 0$ puis $R_a = 0$ et si $\beta = 0$, $R_b = R_c = 1$ puis $R_a = 1$.

$$\boxed{\text{si } \beta > 0,\ R = +\infty, \text{ si } \beta = 0,\ R = 1 \text{ et si } \beta < 0,\ R = 0.}$$

9) Si $a = 0$, $R = +\infty$. On suppose $a \neq 0$.

- Si $b > 1$, $\dfrac{a^n}{1+b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ et donc $R = \dfrac{b}{a}$.
- Si $b = 1$, $\dfrac{a^n}{1+b^n} = \dfrac{a^n}{2}$ et $R = \dfrac{1}{a}$.
- Si $0 \leqslant b < 1$, $\dfrac{a^n}{1+b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n$ et $R = \dfrac{1}{a}$.

Dans tous les cas

$$\boxed{R = \frac{\operatorname{Max}(1,b)}{a} \text{ si } a > 0 \text{ et } R = +\infty \text{ si } a = 0.}$$

Exercice n° 2

1) La suite $(a_n 1^n)$ est bornée. Donc, $R_a \geqslant 1$. Mais la suite $(a_n 1^n)$ ne converge pas vers 0 (car il existe une infinité de nombres premiers) et donc $R_a \leqslant 1$. Finalement,

$$\boxed{R_a = 1.}$$

2) Pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{1}{n} \leqslant n^{(-1)^n} = |a_n| \leqslant n = c_n$. D'après la règle de d'Alembert, $R_b = R_c = 1$ et donc

$$\boxed{R_a = 1.}$$

3) Soit $z \in \mathbb{C}$.

• Si $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\left|a_{2p+1}z^{2p+1}\right| = |z|\left(3|z|^2\right)^p$ avec $3|z|^2 \in [0,1[$ et donc, la série de terme général $a_{2p+1}z^{2p+1}$ converge. D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\left|a_{2p}z^{2p}\right| = \left(2|z|^2\right)^p$ avec $2|z|^2 \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right[\subset [0,1[$ et donc la série de terme général $a_{2p}z^{2p}$ converge. Puisque les séries de terme généraux respectifs $a_{2p}z^{2p}$ et $a_{2p+1}z^{2p+1}$ convergent, la série de terme général $a_n z^n$ converge. Ceci montre que $R_a \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

• Si $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < |z| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, la série de terme général $a_{2p}z^{2p}$ converge et la série de terme général $a_{2p+1}z^{2p+1}$ diverge. Mais alors, la série de terme général $a_n z^n$ diverge. Ceci montre que $R_a \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Finalement,

$$\boxed{R_a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.}$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{1}{2} \leqslant \left|\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)\right| = |a_n| \leqslant 1 = c_n$. $R_b = R_c = 1$ et donc

$$\boxed{R_a = 1.}$$

Exercice n° 3

1) La règle de d'Alembert montre que la série proposée a un rayon de convergence égal à 1.

1ère solution. Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}x^n$. f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour x dans $]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Puis, pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt = (1-x)\ln(1-x) + x$.

2ème solution. Pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)x^n = x\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = (1-x)\ln(1-x) + x.}$$

2) La règle de d'Alembert montre que la série proposée a un rayon égal à 1. Pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2}x^n = 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = 3\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = 3\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2}(x + \ln(1-x))\right)$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2}x^n = \begin{cases} 3\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{x^2}(x + \ln(1-x))\right) \text{ si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.}$$

3) La règle de d'Alembert montre que la série proposée a un rayon égal à 1.

• Soit $x \in]0,1[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right) - \ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right).$$

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

• Soit $x \in]-1,0[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(-x)^n}{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1}}{2n+1}=\frac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\ \text{si } x\in]0,1[\\ 1 \text{ si } x=0\\ \dfrac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}\ \text{si } x\in]-1,0[\end{array}\right..}$$

4) La règle de d'Alembert montre que la série proposée a un rayon égal à $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{(2n)!}=\operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right)$.

• Si $x < 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(-x)^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}}{(2n)!}=\cos\left(\sqrt{-x}\right)$. Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}=\left\{\begin{array}{l}\operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right)\ \text{si } x\geqslant 0\\ \cos\left(\sqrt{-x}\right)\ \text{si } x<0\end{array}\right..}$$

5) La règle de d'Alembert montre que la série proposée a un rayon égal à $+\infty$. Pour x réel,

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1-1}{(2n+1)!}x^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^n\right).$$

• Si $x > 0$,

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n}-\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(\sqrt{x})-\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}(\sqrt{x})\right).$$

• Si $x < 0$,

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{-x})-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sin(\sqrt{-x})\right).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nx^n}{(2n+1)!}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(\sqrt{x})-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}(\sqrt{x})\right)\ \text{si } x>0\\ 0 \text{ si } x=0\\ \dfrac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{-x})-\dfrac{1}{\sqrt{-x}}\sin(\sqrt{-x})\right)\ \text{si } x<0\end{array}\right..}$$

6) Immédiatement $R=+\infty$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{ch} x).}$$

7) $\operatorname{ch} n \underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{e^n}{2}$ et donc $R=\dfrac{1}{e}$. Pour x dans $\left]-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\operatorname{ch} n)\,x^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(ex)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{e}\right)^n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ex}+\frac{1}{1-\frac{x}{e}}\right)=\frac{1}{2}\frac{2-\left(e+\frac{1}{e}\right)x}{x^2-\left(e+\frac{1}{e}\right)x+1}$$

$$=\frac{1-x\operatorname{ch} 1}{x^2-2x\operatorname{ch} 1+1}.$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n)\, x^n = \frac{1 - x \operatorname{ch} 1}{x^2 - 2x \operatorname{ch} 1 + 1}.}$$

8) La série proposée est le produit de CAUCHY des séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ qui sont toutes deux de rayon 1. Donc $R \geqslant 1$. Mais d'autre part, pour tout entier naturel non nul n, $|a_n| = a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$. Finalement $R = 1$. De plus, pour x dans $]-1, 1[$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \times -\ln(1-x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$.

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \frac{\ln(1-x)}{x-1}.}$$

9) La règle de d'ALEMBERT montre que le rayon de convergence est égal à $+\infty$.

Pour n entier naturel donné, $\dfrac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} = \dfrac{(n+1)(n^2+4n-1)}{(n+2)!} = \dfrac{n^3+5n^2+3n-1}{(n+2)!}$ puis

$$\begin{aligned} n^3+5n^2+3n-1 &= (n+2)(n+1)n + 2n^2 + n - 1 = (n+2)(n+1)n + 2(n+2)(n+1) - 5n - 5 \\ &= (n+2)(n+1)n + 2(n+2)(n+1) - 5(n+2) + 5 \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)n}{(n+2)!} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!} x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{(n+2)!} x^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^n.$$

Ensuite $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ et pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^n \\ &= xe^x + 2e^x - 5\frac{e^x - 1}{x} + 5\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{e^x(x^3+2x^2-5x+5) - 5}{x^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} x^n = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{e^x(x^3+2x^2-5x+5)-5}{x^2} \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ -\dfrac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{array}\right. .}$$

10) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \leqslant |a_n| = n^{(-1)^n} \leqslant n$ et donc $R = 1$. Pour x dans $]-1, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (2k)x^{2k}$. Puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (2k)x^{2k} = x\sum_{k=1}^{+\infty} (2k)x^{2k-1} = x\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}\right)' = x\left(\frac{1}{1-x^2}\right)' = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.}$$

11) $R = 1$. Pour x réel non nul dans $]-1, 1[$, $f(x) = -\dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(x^4\right)^n}{n} = -\frac{\ln\left(1+x^4\right)}{4x}$ et sinon $f(0) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n} = \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\ln\left(1+x^4\right)}{4x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right.}.$$

12) La règle de d'ALEMBERT fournit $R = \dfrac{1}{2}$. Pour x dans $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n &= 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)2^nx^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)2^nx^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}2^nx^n\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}2^nx^n\right)'' - \frac{3}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}2^nx^n\right)' + 2\sum_{n=0}^{+\infty}2^nx^n\right) = 2\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-2x}\right)'' - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-2x}\right)' + \frac{2}{1-2x}\right) \\
&= 2\left(\frac{2}{1-2x} - \frac{3}{2}\frac{2}{(1-2x)^2} + \frac{1}{4}\frac{8}{(1-2x)^3}\right) = 2\left(\frac{2}{1-2x} - 3\frac{1}{(1-2x)^2} + \frac{2}{(1-2x)^3}\right) \\
&= 2\frac{2(1-2x)^2 - 3(1-2x) + 2}{(1-2x)^3} = 2\frac{8x^2-2x+1}{(1-2x)^3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n = 2\frac{8x^2-2x+1}{(1-2x)^3}.}$$

13) Pour $x = 1$, la suite $((-1)^{n+1}nx^{2n+1})$ n'est pas bornée et donc $R \geqslant 1$. Mais la série converge si $|x| < 1$ et $R \leqslant 1$. Finalement $R = 1$.

Pour x dans $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(2n+2)x^{2n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+2}\right)' + 2x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-x^2}{1+x^2}\right)' + \frac{2x}{1+x^2}\right) \\
&= -\frac{2x(1+x^2)-2x^3}{2(1+x^2)^2} + \frac{x}{1+x^2} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.}$$

14) 1ère solution. Les racines de l'équation caractéristique $z^2 - z - 1 = 0$ sont $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait qu'il existe deux nombres réels λ et μ tels que pour tout entier naturel n,

$$a_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Les égalités $n = 0$ et $n = 1$ fournissent

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\lambda + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\mu = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ \mu = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \mu = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Finalement, pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Les séries entières respectivement associées aux suites $\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$ et $\left(\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$ ont pour rayons respectifs $\left|\dfrac{1}{(1+\sqrt{5})/2}\right| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\left|\dfrac{1}{(1-\sqrt{5})/2}\right| = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ces rayons étant distincts, la série proposée a pour rayon

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

$$R = \text{Min}\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Pour x dans $\left]-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \frac{\alpha}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha x)^n - \frac{\beta}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}(\beta x)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x} - \frac{\beta}{1-\beta x}\right) = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1}\\ &= \frac{1}{1-x-x^2}.\end{aligned}$$

2ème solution. Supposons à priori le rayon R de la série proposée strictement positif. Pour x dans $]-R, R[$, on a

$$\begin{aligned}f(x) &= 1+x+\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = 1+x+\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^{n+2} = 1+x+\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1}+a_n)x^{n+2}\\ &= 1+x+x\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} + x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ (les deux séries ont même rayon)}\\ &= 1+x+x(f(x)-1)+x^2 f(x).\end{aligned}$$

Donc, nécessairement $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

Réciproquement, la fraction rationnelle ci-dessus n'admet pas 0 pour pôle et est donc développable en série entière. Le rayon de convergence de la série obtenue est le minimum des modules des pôles de f à savoir $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Notons $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ce développement. Pour tout x de $]-R, R[$, on a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)(1-x-x^2) = 1$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+2} = 1$ ce qui s'écrit encore $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1}x_n - \sum_{n=2}^{+\infty} b_{n-2}x^n = 1$. Finalement

$$\forall x \in]-R, R[,\ b_0 + (b_1-b_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty}(b_n - b_{n-1} - b_{n-2})x^n = 1.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a alors $b_0 = b_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2$, $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$. On en déduit alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}.}$$

Remarque. En généralisant le travail précédent, on peut montrer que les suites associées aux développements en série entière des fractions rationnelles sont justement les suites vérifiant des relations de récurrence linéaire.

15) Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant a_n \leqslant n+1$. Donc $R = 1$.

On remarque que pour tout entier naturel n, $a_n = \sum_{k+5l=n} 1$. La série entière proposée est donc le produit de CAUCHY des séries $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ et $\sum_{l=0}^{+\infty} x^{5l}$. Pour x dans $]-1, 1[$, on a donc

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} x^{5l}\right) = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^5}.$$

Remarque. De combien de façons peut-on payer 100 euros avec des pièces de 1, 2, 5, 10, 20 et 50 centimes d'euros, des pièces de 1 et 2 euros et des billets de 10 et 20 euros ? Soit N le nombre de solutions. N est le nombre de solutions en nombres entiers a, b, ..., j de l'équation

$$a+2b+5c+10d+20e+50f+100g+200h+500k+1000i+2000j=10000$$

et est donc le coefficient de x^{10000} du développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{50})(1-x^{100})(1-x^{200})(1-x^{500})(1-x^{1000})(1-x^{2000})},$$

La remarque est néanmoins anecdotique et il semble bien préférable de dénombrer à la main le nombre de solutions. Les n° 20 et 21 de cette planche font bien mieux comprendre à quel point les séries entières sont un outil intéressant pour les dénombrements.

Exercice n° 3

Dans chaque question, on note f la fonction considérée.

1) f est développable en série entière à l'origine en tant que fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle. Le rayon du développement est le minimum des modules des pôles de f à savoir 1. Pour x dans $]-1,1[$,

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

2) f est développable en série entière à l'origine en tant que fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle.

Puisque $|t|<1$, on peut poser $\theta=\operatorname{Arccos}t$. On a donc $\theta\in]0,\pi[$ et $t=\cos(\theta)$. Pour tout réel x, on a

$$x^2-2tx+1=x^2-2x\cos(\theta)+1=\left(x-e^{i\theta}\right)\left(x-e^{-i\theta}\right),$$

avec $e^{i\theta}\neq e^{-i\theta}$. Les pôles sont de modules 1 et le rayon du développement est donc égal à 1. Pour x dans $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-2x\cos(\theta)+1}&=\frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(\frac{1}{x-e^{i\theta}}-\frac{1}{x-e^{-i\theta}}\right)=\frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(-\frac{e^{-i\theta}}{1-xe^{-i\theta}}+\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right)\\&=\frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{in\theta}x^n-e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-in\theta}x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}x^n.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in]-1,1[,\ \forall x\in]-1,1[,\ \frac{1}{x^2-2xt+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}x^n\text{ où }\theta=\operatorname{Arccos}t.}$$

3) Pour tout réel x, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ et donc si $x<2$, $x^2-5x+6>0$. Pour $x\in]-2,2[$,

$$\ln\left(x^2-5x+6\right)=\ln(2-x)+\ln(3-x)=\ln(6)+\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{3}\right),$$

et puisque pour x dans $]-2,2[$, $\dfrac{x}{2}$ et $\dfrac{x}{3}$ sont dans $]-1,1[$,

$$\ln(x^2-5x+6)=\ln(6)-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n},$$

et en particulier la fonction f est développable en série entière et le rayon du développement est 2.

4) Si $\cos a=0$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ et si $\cos a\neq0$, f est définie et dérivable sur $\mathscr{D}=\left]-\infty,\dfrac{1}{\cos a}\right[\cup\left]\dfrac{1}{\cos a},+\infty\right[$. Pour $x\in\mathscr{D}$,

$$f'(x)=\frac{\sin a}{(1-x\cos a)^2}\times\frac{1}{1+\left(\dfrac{x\sin a}{1-x\cos a}\right)^2}=\frac{\sin a}{x^2-2x\cos a+1}.$$

D'après 2), la fonction f' est dans tous les cas développable en série entière, le rayon du développement est 1 et pour x dans $]-1,1[$

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sin((n+1)a)x^n.$$

On sait alors que la fonction f est développable en série entière, que le développement a même rayon de convergence et s'obtient en intégrant terme à terme. Donc pour x dans $]-1,1[$,

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((n+1)a)}{n+1}x^{n+1}.$$

5) La fonction f est développable en série entière en tant que fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle. Le rayon est le minimum des modules des pôles de f à savoir 1.

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\ldots(x-p)}=\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{x-k}$$

avec $\lambda_k=\dfrac{1}{(k-1)(k-2)\ldots(k-(k-1))(k-(k+1))\ldots(k-p)}=(-1)^{p-k}\dfrac{1}{(k-1)!(p-k)!}=(-1)^{p-k}\dfrac{k}{p!}\dbinom{p}{k}$. Par suite, pour x dans $]-1,1[$

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\frac{k}{p!}\binom{p}{k}\left(-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{1-\frac{x}{k}}=\frac{(-1)^p}{p!}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\binom{p}{k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{k^n}\right)\\&=\frac{(-1)^p}{p!}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k+1}}{k^n}\binom{p}{k}\right)x^n.\end{aligned}$$

6) La fonction f est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et pour x dans $]-1,1[$, $f'(x)=2\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arcsin}x$ puis

$$f''(x)=2x\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\operatorname{Arcsin}x+\frac{2}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}f'(x)+\frac{2}{1-x^2}.$$

Donc, pour x dans $]-1,1[$,

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=2\quad(1)\quad\text{et } f(0)=f'(0)=0\quad(2).$$

On admettra que ces égalités déterminent la fonction f de manière unique.
Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ une série entière de rayon R supposé à priori strictement positif. Pour $x\in]-R,R[$, on pose $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

$$\begin{aligned}g\text{ est solution de (1) sur }]-R,R[&\Leftrightarrow\forall x\in]-R,R[,\ (1-x^2)\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=2\\&\Leftrightarrow\forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n=2\\&\Leftrightarrow\forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{+\infty}n^2a_nx^n=2\\&\Leftrightarrow\forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}n^2a_nx^n=2\\&\Leftrightarrow\forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n)x^n=2\\&\Leftrightarrow a_2=1\text{ et }\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_{n+2}=\frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n\text{ (par unicité des coefficients d'un DES).}\end{aligned}$$

En résumé, la fonction g est solution de (1) et (2) sur $]-R,R[$ si et seulement si $a_0=a_1=0$ et $a_2=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_{n+2}=\dfrac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n$ (3) puis

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n+1}=0\text{ et }a_0=0,\ a_2=1\text{ et }\forall n\geqslant 2,\ a_{2n}=\frac{((2n-2)\times\ldots\times4\times2)^2}{(2n)\times(2n-1)\ldots\times6\times5\times4\times3}a_2\\&\Leftrightarrow a_0=0\text{ et }\forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n+1}=0\text{ et }\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_{2n}=\frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}\end{aligned}$$

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

En résumé, sous l'hypothèse $R > 0$, la fonction g est solution de (1) et (2) sur $]-R, R[$ si et seulement si $\forall x \in]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}}{n^2 \binom{2n}{n}} x^{2n}$.

Réciproquement, calculons le rayon de la série entière précédente. Pour x réel non nul,

$$\left|\frac{2^{2n+1}(n!)^2 x^{2n+2}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2 x^{2n}}\right| = \frac{4x^2n^2}{(2n+2)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\to} x^2.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série proposée converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$. Le rayon de la série proposée est donc $1 > 0$ ce qui valide les calculs précédents.
Par unicité de la solution de (1) et (2) sur $]-1, 1[$, f est développable en série entière et

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \text{Arcsin}^2\, x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}}{n^2 \binom{2n}{n}} x^{2n}.}$$

7) Pour tout réel x, $\cos\left(x^2\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$ (le rayon est infini). On sait alors que la fonction f est développable en série entière, que le rayon du développement est encore infini et que l'on peut intégrer terme à terme pour obtenir (en tenant compte de $f(0) = 0$)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x \cos\left(t^2\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)\times(2n)!}.}$$

8) Les zéros du polynôme $t^4 + t^2 + 1$ sont j, j^2, $-j$ et $-j^2$. Donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^4 + t^2 + 1}$ est développable en série entière en tant que fraction rationnelle n'admettant pas zéro pour pôle et que le rayon de la série obtenue est 1. Puis pour t dans $]-1, 1[$,

$$\frac{1}{t^4 + t^2 + 1} = \frac{1 - t^2}{1 - t^6} = (1 - t^2) \sum_{n=0}^{+\infty} t^{6n} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{6n} - \sum_{n=0}^{+\infty} t^{6n+2} = 1 - t^2 + t^6 - t^8 + t^{12} - t^{14} + \dots.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^4 + t^2 + 1}$ est continue sur $]-\infty, 0]$ et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $-\infty$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^4 + t^2 + 1}$ est donc intégrable sur $]-\infty, 0]$.
Par intégration terme à terme licite, on obtient pour x dans $]-1, 1[$,

$$f(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^4 + t^2 + 1}\, dt + \int_0^x \frac{1}{t^4 + t^2 + 1}\, dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^4 + t^2 + 1}\, dt + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t^{6n+1}}{6n+1} - \frac{t^{6n+3}}{6n+3}\right).$$

Calcul de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^4 + t^2 + 1}\, dt$. Par parité et réalité,

$$\frac{1}{t^4 + t^2 + 1} = \frac{a}{t - j} + \frac{\overline{a}}{t - j^2} - \frac{a}{t + j} - \frac{\overline{a}}{t + j^2},$$

avec $a = \dfrac{1}{4j^3 + 2j} = \dfrac{1}{2(2 + j)} = \dfrac{2 + j^2}{2(2 + j)(2 + j^2)} = \dfrac{1 - j}{6}$. Puis

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^4 + t^2 + 1} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1 - j}{t - j} + \frac{1 - j^2}{t - j^2} - \frac{1 - j}{t + j} - \frac{1 - j^2}{t + j^2}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{3t + 3}{t^2 + t + 1} + \frac{-3t + 3}{t^2 - t + 1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{t + 1}{t^2 + t + 1} - \frac{t - 1}{t^2 - t + 1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} + \frac{1}{t^2 + t + 1} - \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1} + \frac{1}{t^2 - t + 1}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} + \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1} + \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{Arctan}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

En résumé,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^{6n+1}}{6n+1} - \frac{t^{6n+3}}{6n+3}\right).}$$

9) f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Pour x réel,

$$\begin{aligned}
\cos x \operatorname{ch} x &= \frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n\right)\frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{3i\pi/4}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}\right)^n\right)\frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{2p}(-1)^p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\frac{x^{2p}}{(2p)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{4k}(-1)^{2k}\cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right)\frac{x^{4k}}{(4k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k 2^{2k}\frac{x^{4k}}{(4k)!}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k 2^{2k}\frac{x^{4k}}{(4k)!}.}$$

Exercice n° 5

Pour x réel non nul, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ ce qui reste vrai pour $x=0$. La fonction f est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en particulier, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 6

Soit $R>0$. Notons D_R le disque fermé de centre 0 et de rayon R. Soient $z \in D_R$ et n un entier naturel.

$$|P_n(z)| = |e^z - (e^z - P_n(z))| \geqslant |e^z| - |e^z - P_n(z)| \geqslant e^{-R} - |e^z - P_n(z)|.$$

On sait que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur D_R.Donc il existe un entier n_0 tel que pour tout $z \in D_R$ et tout entier $n \geqslant n_0$, $|e^z - P_n(z)| \leqslant \frac{1}{2}e^{-R}$. Pour $n \geqslant n_0$ et $z \in D_R$, $|P_n(z)| \geqslant \frac{1}{2}e^{-R} > 0$. Pour $n \geqslant n_0$, P_n ne s'annule pas dans D_R.

Exercice n° 7

On cherche une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ de rayon R strictement positif telle que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = 1$ pour x élément d'un certain intervalle ouvert non vide de centre 0.

Cette égalité impose à la suite (b_n) de vérifier le système d'équations $\left\{\begin{array}{l} a_0b_0 = 1 \\ a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \\ \quad\vdots \\ a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 = 1 \\ \quad\vdots \end{array}\right.$

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, b_n existe et est unique.

- Puisque $a_0 = 1$, $a_0b_0 = 1 \Leftrightarrow b_0 = 1$. Ceci montre l'existence et l'unicité de b_0.

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons avoir démontré l'existence et l'unicité de b_0, b_1, ..., b_n.
Alors $a_0b_{n+1} + a_1b_n + \ldots + a_nb_1 + a_{n+1}b_0 = 0 \Leftrightarrow b_{n+1} = -a_1b_n - \ldots - a_nb_1 - a_{n+1}b_0$. Ceci montre l'existence et l'unicité de b_{n+1}.

On a montré par récurrence que la suite (b_n) existe et est unique.

2) Il faut alors vérifier que la série entière associée à la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un rayon de convergence strictement positif .

Soit $R > 0$ le rayon de la série associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit r un réel tel que $0 < r < R$.
On sait que la suite $(a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et il existe $M > 0$ tel que pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant \dfrac{M}{r^n}$.
$b_0 = 1$ puis $|b_1| = |-a_1b_0| \leqslant \dfrac{M}{r}$ puis $|b_2| = |-a_2b_0 - a_1b_1| \leqslant \dfrac{M}{r^2} + \dfrac{M}{r} \times \dfrac{M}{r} = \dfrac{M(M+1)}{r^2}$ puis

$$|b_3| = |-a_3b_0 - a_2b_1 - a_1b_2| \leqslant \frac{M}{r^3} + \frac{M}{r^2} \times \frac{M}{r} + \frac{M}{r} \times \frac{M(M+1)}{r^2} = \frac{M(M^2+2M+1)}{r^3} = \frac{M(M+1)^2}{r^3}.$$

Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| \leqslant \dfrac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.
- C'est vrai pour $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$, supposons que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|b_k| \leqslant \dfrac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$. Alors

$$\begin{aligned}|b_{n+1}| &\leqslant |-a_{n+1}b_0| + |-a_nb_1| + \ldots + |-a_1b_n| \leqslant \frac{M}{r^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} \times \frac{M}{r^{n+1-k}}\\ &= \frac{M}{r^{n+1}}\left(1 + M\sum_{k=1}^{n}(M+1)^{k-1}\right) = \frac{M}{r^{n+1}}\left(1 + M\frac{(M+1)^n - 1}{(M+1)-1}\right) = \frac{M(M+1)^n}{r^{n+1}}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $|b_n| \leqslant \dfrac{M(M+1)^n}{r^{n+1}}$. En particulier , le rayon R' de la série entière associée à la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $R' \geqslant \dfrac{r}{M+1} > 0$. Ceci valide les calculs initiaux sur $]-\rho, \rho[$ où $\rho = \mathrm{Min}(R, R') > 0$ et donc l'inverse d'une fonction f développable en série entière à l'origine et telle que $f(0) \neq 0$ est développable en série entière à l'origine.

Exercice n° 8

On a déjà vu que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et la règle de d'Alembert fournit $R = 1$. Soit $x \in]-1, 1[$.
Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout entier naturel n, $|x^n \cos^n t| \leqslant |x|^n$. Comme la série numérique de terme général $|x|^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge, la série de fonctions de terme général $t \mapsto x^n \cos^n t$ est normalement et donc uniformément convergente sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} W_nx^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt = \int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\cos^n t\right)dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos t}\,dt\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 - x\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2} \text{ (en posant } u = \tan\left(\frac{t}{2}\right))\\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{(1+x)u^2 + (1-x)}\,du = 2 \times \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\right)\right]_0^1\\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} W_nx^n = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.}$$

Exercice n° 9

Pour tout entier naturel non nul, $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et donc $R \geqslant 1$. Mais si $x > 1$, la suite $\left(\dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)x^n\right)_{n\geqslant 1}$ n'est pas bornée comme on le voit en considérant la suite extraite des termes d'indices multiples de 3 et donc $R = 1$. Pour x dans $]-1,1[$, $f(x) = \text{Re}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(jx)^n}{n}\right)$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Le problème est alors de ne pouvoir écrire $-\ln(1-jx)$. Il faut s'y prendre autrement.

f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour x dans $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^{n-1} = \text{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} j^n x^{n-1}\right) = \text{Re}\left(\frac{j}{1-jx}\right) = \text{Re}\left(\frac{j\left(1-j^2x\right)}{x^2+x+1}\right)\\ &= \frac{-\frac{1}{2}-x}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

Par suite, pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right).}$$

Exercice n° 10

Le rayon de la série considérée est égal 1. Soit $x \in]-1,1[$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)x^n = \frac{1}{2}\left(-1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right).$$

- Si x est dans $]0,1[$,

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{2}\left(-1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right).\end{aligned}$$

- Si x est dans $]-1,0[$,

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{2}\left(-1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 - \left(\sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1}}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-1 - \left(\sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\text{Arctan}(\sqrt{-x})\right).\end{aligned}$$

- $f(0) = -1$.

Maintenant, la somme est en fait définie sur $[-1,1]$ car les séries numériques de termes généraux $\dfrac{1}{4n^2-1}$ et $\dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}$ convergent. Vérifions que la somme est continue sur $[-1,1]$.

Pour x dans $[-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{x^n}{4n^2-1}\right| \leqslant \dfrac{1}{4n^2-1}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente. La série entière considérée converge donc normalement sur $[-1,1]$. On en déduit que la somme est continue sur $[-1,1]$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} &= f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right) - \ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right)\right)\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(car $(x-1)\ln\left(1-\sqrt{x}\right) = -\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)\ln\left(1-\sqrt{x}\right) \underset{x\to 1}{\to} 0$).

Remarque. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2n+1}\right)\right) = -\frac{1}{2}$ (série télescopique).

On a aussi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} &= f(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\mathrm{Arctan}(\sqrt{-x})\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-1-2\,\mathrm{Arctan}\,1\right) = -\frac{\pi+2}{4}.\end{aligned}$$

Exercice n° 11

Pour tout entier naturel n, $|u_n| \geqslant \dfrac{1}{2n+1}$ et donc la série proposée ne converge pas absolument.
Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}|u_n|-|u_{n+1}| &= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{2n+3}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{4k+1} = \left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{2n+3}\times\frac{1}{4n+5}\\ &= \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{(2n+3)(4n+5)} \geqslant \frac{1}{(2n+3)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+3)(4n+5)} > 0.\end{aligned}$$

La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. De plus, pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{4n+1}\frac{1}{k} \leqslant 1+\sum_{k=2}^{4n+1}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,dt = 1+\ln(4n+1)$$

et donc $|u_n| \leqslant \dfrac{1+\ln(4n+1)}{2n+1}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Finalement, la série proposée converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Considérons la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{2n+1}$. La série de terme général u_n converge et donc $R \geqslant 1$ mais puisque la série de terme général $|u_n|$ diverge et donc $R \leqslant 1$. Finalement, $R=1$. Pour $x \in]-1,1[$, posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{2n+1}$. Pour x dans $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right)x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right)\left(-x^2\right)^n\\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{4n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n\right) \text{ (produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes)}\end{aligned}$$

Donc, pour x dans $]0,1[$, $f'(x) = g(x)h(x)$ où $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$ puis

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}(\sqrt{x})^{4n+1}.$$

Maintenant, en posant $k(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{X^{4n+1}}{4n+1}$, pour X dans $]-1,1[$, $k'(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n X^{4n} = \frac{1}{X^4+1}$. Ensuite, en posant $\omega = e^{i\pi/4}$, par réalité et parité

$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{a}{X-\omega}+\frac{\overline{a}}{X-\overline{\omega}}-\frac{a}{X+\omega}-\frac{\overline{a}}{X+\overline{\omega}}$$

où $a = \dfrac{1}{4\omega^3} = -\dfrac{\omega}{4}$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X^4+1} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{X-\omega}+\frac{\overline{\omega}}{X-\overline{\omega}}-\frac{\omega}{X+\omega}-\frac{\overline{\omega}}{X+\overline{\omega}}\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{X\sqrt{2}-2}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{X\sqrt{2}+2}{X^2+\sqrt{2}X+1}\right)\\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2X+2\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1}-\frac{2X-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}\right)\\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{\sqrt{2}}{\left(X+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{\sqrt{2}}{\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

En tenant compte de $k(0)=0$, on obtient donc pour $X \in]-1,1[$,

$$k(X) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln(X^2+X\sqrt{2}+1)-\ln(X^2-X\sqrt{2}+1)\right)+2\left(\mathrm{Arctan}(X\sqrt{2}+1)+\mathrm{Arctan}(X\sqrt{2}-1)\right)\Big).$$

Ensuite, pour tout réel $x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}k\left(\sqrt{x}\right)\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}k'\left(\sqrt{x}\right)k\left(\sqrt{x}\right)$ et donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0)+\left(k\left(\sqrt{x}\right)^2-k(0)^2\right) = \left(k\left(\sqrt{x}\right)\right)^2\\
&= \frac{1}{32}\left(\ln(x+\sqrt{x}\sqrt{2}+1)-\ln(x-\sqrt{x}\sqrt{2}+1)\right)+2\left(\mathrm{Arctan}(\sqrt{x}\sqrt{2}+1)+\mathrm{Arctan}(\sqrt{x}\sqrt{2}-1)\right)\Big)^2.
\end{aligned}$$

Quand x tend vers 1, $f(x)$ tend vers

$$\frac{1}{32}\left(\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)+2(\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}+1)+\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}-1))\right)^2 = \frac{1}{32}\left(\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+\pi\right)^2.$$

(car $\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}+1)+\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}-1) = \mathrm{Arctan}(\sqrt{2}+1)+\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right) = \dfrac{\pi}{2}$).
Enfin, pour x dans $[0,1]$ et n dans $\mathbb{N}$, $|u_n|x^n-|u_{n+1}|x^{n+1} \geqslant (|u_n|-|u_{n+1}|)x^n \geqslant 0$ et la série numérique de terme général u_nx^n est alternée. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une telle série, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1]$,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_kx^k\right| \leqslant \left|u_{n+1}x^{n+1}\right| \leqslant |u_{n+1}|,$$

et donc $\underset{x\in[0,1]}{\mathrm{Sup}}|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. La convergence est normale et donc uniforme sur $[0,1]$ et on en déduit que la somme est continue sur $[0,1]$. En particulier

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n = f(1) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x) = \frac{1}{32}\left(\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+\pi\right)^2.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right) = \frac{1}{32}\left(\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+\pi\right)^2.}$$

Exercice n° 12

Posons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}A = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$. On sait que pour tout entier naturel n, $\mathrm{Tr}(A^n) = \lambda_1^n+\ldots+\lambda_p^n$.
Soit λ un nombre complexe.

• Si $\lambda=0$, la série entière associée à la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de rayon infini et pour tout nombre complexe z, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^nz^n = 1 = \frac{1}{1-\lambda z}$.

• Si $\lambda \neq 0$, la série entière associée à la suite (λ^n) est de rayon $\dfrac{1}{|\lambda|}$ et pour $|z| < \dfrac{1}{|\lambda|}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n z^n = \dfrac{1}{1-\lambda z}$.

Soit $\rho = \text{Max}\,(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_p|)$ (ρ est le rayon spectral de la matrice A) et $R = \dfrac{1}{\rho}$ si $\rho \neq 0$ et $R = +\infty$ si $\rho = 0$.
Pour $|z| < R$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Tr}(A^n) z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k z)^n\right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_k z)^n\right) \text{ (somme de } p \text{ séries convergentes)} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1-\lambda_k z}.\end{aligned}$$

Il est alors clair que R est le rayon de convergence de la série entière proposée (développement en série entière d'une fraction rationnelle).

Si de plus, $0 < |z| < R$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Tr}(A^n) z^n = \frac{1}{z}\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\frac{1}{z} - \lambda_k}\right) = \frac{\chi_A'\left(\frac{1}{z}\right)}{z\chi_A\left(\frac{1}{z}\right)}$ (décomposition usuelle de $\dfrac{P'}{P}$).

Exercice n° 13

Pour x réel, on sait que $F(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right)$.
La fonction F est impaire donc les coefficients d'indices pairs sont nuls. D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$, le coefficient de x^{2n+1} du produit de Cauchy des deux séries précédentes vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(2k+1)} \times \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

La méthode choisie fournit classiquement une expression compliquée des coefficients.

On peut aussi obtenir F comme solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = -2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + 1 = -2xF(x) + 1$.
F est uniquement déterminée par les conditions $F' + 2xF = 1$ et $F(0) = 0$ (*). F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ d'après le début de l'exercice et impaire. Pour x réel, posons donc $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((2n+1)a_n + 2a_{n-1})x^{2n} = 1 \\ &\Leftrightarrow a_0 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ (2n+1)a_n + 2a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow a_0 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ a_n = -\frac{2}{2n+1}a_{n-1} \\ &\Leftrightarrow a_0 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)(2n-1)\ldots 1}a_0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

On a montré que pour tout réel x, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Par unicité des coefficients d'une série entière, on obtient en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)k!(n-k)!} = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}.$$

Exercice n° 14

Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n + b_n)$ et $3a_{n+1} + 2b_{n+1} = 3a_n + 2b_n$ (rappel : ces combinaisons linéaires sont fournies par les vecteurs propres de A^T si on ne les devine pas). On en déduit que pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 2^n(a_0 + b_0) = 2^n$ et $3a_n + 2b_n = 3a_0 + 2b_0 = 3$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 3 - 2^{n+1} \text{ et } b_n = 3\left(2^n - 1\right).$$

Les deux séries proposées sont alors clairement de rayons infini et pour tout réel x, $f(x) = 3e^x - 2e^{2x}$ et $g(x) = 3(e^{2x} - e^x)$. (On peut avoir d'autres idées de résolution, plus astucieuses, mais au bout du compte moins performantes).

Exercice n° 15

Pour $n \geqslant 1$, posons $a_n = \dfrac{1}{n\dbinom{2n}{n}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \times \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \times \frac{(n+1)!^2}{n!^2} = \frac{n}{2(2n+1)} \quad (*).$$

Par suite, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{4}$ et d'après la règle de d'Alembert, le rayon de la série entière considérée est $R = 4$.

Pour $x \in]-4,4[$, posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Les relations $(*)$ s'écrivent encore $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $4(n+1)a_{n+1} - 2a_{n+1} = na_n$.

Soit $x \in]-4,4[$. On multiplie les deux membres de l'égalité précédente par x^{n+1} et on somme sur n. On obtient

$$4x\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1} = x^2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1},$$

ou encore $x^2f'(x) = 4x(f'(x) - a_1) - 2(f(x) - a_1x)$ ou encore $x(x-4)f'(x) + 2f(x) = -x \quad (E)$. Soit $I =]0,4[$. Sur I, l'équation (E) s'écrit :

$$f'(x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}\right)f(x) = -\frac{1}{x-4}.$$

Une primitive sur I de la fonction $a\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-4}\right)$ est la fonction $A\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln(4-x) - \ln(x)) = \ln\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}\right)f(x) = -\frac{1}{x-4}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{A(x)}f'(x) + a(x)e^{A(x)}f(x) = \frac{1}{4-x}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (e^Af)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} \quad (*).
\end{aligned}$$

Déterminons une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(4-x)}}$ sur I.

$\dfrac{1}{\sqrt{x(4-x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$ et une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(4-x)}}$ sur I est la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)$.
Puis

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ e^{A(x)}f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x}}\left(\text{Arcsin}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C\right).
\end{aligned}$$

f doit être définie, continue et dérivable sur $]-4,4[$ et en particulier dérivable en 0. Ceci impose $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\text{Arcsin}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C = 0$ (car sinon $f(x) \underset{0^+}{\sim} C\sqrt{x}$) et donc $C = \dfrac{\pi}{2}$. Pour $x \in]0,4[$, on a alors $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{4-x}}\left(\dfrac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)\right) = \sqrt{\dfrac{x}{4-x}}\,\text{Arccos}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)$ ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité.

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

$$\boxed{\forall x \in [0,4[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}} x^n = \sqrt{\frac{x}{4-x}}\,\text{Arccos}\left(\frac{2-x}{2}\right).}$$

Exercice n° 16

1) Soient A et B les sommes des séries entières associées aux suites a et b sur $]-1,1[$. La fonction B est strictement positive sur $]0,1[$ et en particulier ne s'annule pas sur $]0,1[$.

• La suite a est positive donc la fonction A est croissante sur $[0,1[$ et admet ainsi une limite réelle ou infinie quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. De plus, pour N entier naturel donné et $x \in [0,1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ et donc

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to 1,\ x<1} A(x) \geqslant \lim_{x\to 1,\ x<1} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Puisque la série de terme général positif a_n diverge, quand N tend tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to 1,\ x<1} A(x) \geqslant +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to 1,\ x<1} A(x) = +\infty$. Il en est de même pour B car la série de terme général b_n diverge quelque soit la valeur de k.

• On veut alors montrer que $A - kB \underset{x\to 1^-}{=} o(B)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $a_n - kb_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ et donc il existe un entier naturel N tel que pour $n \geqslant N$, $|a_n - kb_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} b_n$. Soit $x \in [0,1[$.

$$|A(x) - kB(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - kb_n| x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - kb_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - kb_n| + \frac{\varepsilon}{2} B(x).$$

Maintenant, $B(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Donc il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que pour $x \in [1-\alpha, 1[$, $B(x) \geqslant \dfrac{2}{\varepsilon} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} |a_n - kb_n|$. Pour $x \in [1-\alpha, 1[$, on a alors

$$|A(x) - kB(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} B(x) + \frac{\varepsilon}{2} B(x) = \varepsilon B(x).$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha \in]0,1[/\ \forall x \in [1-\alpha, 1[$, $|A(x) - kB(x)| \leqslant \varepsilon B(x)$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{A(x)}{B(x)} = k$.

2) a) La série entière proposée « vérifie » les hypothèses du 1) et de plus , $\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. Donc

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}.}$$

b) Soit $p \geqslant 2$. $n^{p-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)$. Comme les deux suites (n^{p-1}) et $((n+1)(n+2)\ldots(n+p-1))$ vérifient les hypothèses du 1)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p-1)\ldots(n+1) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^{(p-1)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(p-1)} = \frac{(p-1)!}{(1-x)^p}.$$

Par suite,

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} (1-x)^p \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-1} x^n = (p-1)!.}$$

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

Exercice n° 17

Supposons qu'il existe un entier naturel p tel que $a_p = a_{p+1}$. Le développement limité à l'ordre 1 de $f^{(p)}$ en 0 s'écrit $f^{(p)}(x) \underset{x\to 0}{=} f^{(p)}(0) + xf^{(p+1)}(0) + o(x) = a_p(1+x) + o(x)$ et on en déduit

$$\begin{aligned}|f^{(p)}(x)| &\geqslant |a_p(1+x)| - |o(x)| = 1 + x - |o(x)| \geqslant 1 + x - \frac{x}{2} \text{ (sur un voisinage pointé de 0 à droite)}\\ &= 1 + \frac{x}{2} > 1 \text{ (sur un voisinage pointé de 0 à droite).}\end{aligned}$$

Donc si deux termes consécutifs sont égaux, f ne vérifie pas les conditions de l'énoncé ou encore si f vérifie les conditions de l'énoncé, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{p+1} = -a_p$ puis $a_p = (-1)^p a_0$. Mais alors, nécessairement pour tout réel x, $f(x) = e^{-x}$ ou pour tout réel x, $f(x) = -e^{-x}$.

Réciproquement, ces deux fonctions sont clairement solutions du problème posé.

Exercice n° 18

1) La fonction f est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et de plus $f' = 1 + f^2$.

Montrons par récurrence que pour tout naturel n, il existe un polynôme P_n à coefficients entiers naturels tel que $f^{(n)} = P_n \circ f$ (ou encore $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$).
• C'est vrai pour $n = 0$ avec $P_0 = X$ et pour $n = 1$ avec $P_1 = 1 + X^2$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe un polynôme P_k à coefficients entiers naturels tel que $f^{(k)} = P_k \circ f$. D'après la formule de Leibniz,

$$f^{(n+1)} = \left(1 + f^2\right)^{(n)} = \left(f^2\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k P_{n-k}\right) \circ f$$

et le polynôme $P_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k P_{n-k}$ est un polynôme à coefficients entiers naturels tel que $\tan^{(n+1)} = P_{n+1} \circ f$.

Remarque. On aurait pu aussi dériver l'égalité $f^{(n)} = P_n \circ f$ pour obtenir $f^{(n+1)} = f' \times P_n' \circ f = (P_1 \times P_n') \circ f$ mais on a déjà dans l'idée une relation de récurrence sur les coefficients du développement de tan qui n'est pas fournie par cette dernière égalité.

2) Soient $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$. La formule de Taylor-Laplace à l'ordre n en 0 fournit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

Le 1) montre que pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et tout entier naturel k, $f^{(k)}(t) = P_k(\tan t) \geqslant 0$.

Donc, d'une part, pour tout entier naturel k, $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \geqslant 0$ et d'autre part,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt \leqslant f(x).$$

La suite des sommes partielles de la série à termes positifs, de terme général $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, $k \in \mathbb{N}$, est majorée et donc la série de terme général $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge.

Ainsi, la série de Taylor de f à l'origine converge pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à $\dfrac{\pi}{2}$ (et donc la série de terme général $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge aussi pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$). Il n'y a par contre aucune raison pour le moment pour que sa somme soit f.

3) Pour n entier naturel donné, posons $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ puis pour x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, posons $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$.

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

On a vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k P_{n-k}$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1)\frac{P_{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n!k!(n-k)!} P_k P_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k}{k!} \frac{P_{n-k}}{(n-k)!}$$

puis en prenant la valeur en 0 ($= \tan 0$) et en tenant compte de $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{P_k(\tan(0))}{k!} = \dfrac{P_k(0)}{k!}$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \text{ et aussi } a_0 = 0 \text{ et } a_1 = 1.$$

Donc, pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) x^n = 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2 \\ &= 1 + g^2(x). \end{aligned}$$

De plus, $g(0) = a_0 = 0$.

Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, posons alors $h(x) = \text{Arctan}(g(x))$. La fonction h est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{1 + g^2(x)} = 1 \text{ puis } h(x) = h(0) + (x - 0) = x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan x = f(x)$. Ceci montre déjà que f est développable en série entière sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Mais quand x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures, $g(x) = f(x)$ tend vers $+\infty$ et donc $R \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ puis $R = \dfrac{\pi}{2}$.

En résumé, la fonction tangente est développable en série entière sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$ puisque la fonction tangente est impaire.

4) $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$ puis $a_1 = 1$.
$3a_3 = a_0a_2 + a_1^2 + a_2a_0 = 1$ et donc $a_3 = \dfrac{1}{3}$.
$5a_5 = 2a_1a_3 = \dfrac{2}{3}$ et donc $a_5 = \dfrac{2}{15}$.
$7a_7 = 2a_1a_5 + a_3^2 = \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{17}{45}$ et $a_7 = \dfrac{17}{315}$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots}$$

5) Pour tout réel x, $\text{th}(x) = \dfrac{1}{i}\tan(ix)$ et donc pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\text{th}(x) = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}(ix)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

Cette série entière a aussi pour rayon de convergence $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice n° 19

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}\sin(tx)$ est continue sur $[0, +\infty[$, négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$ et est donc intégrable sur $[0, +\infty[$. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel t, posons $f(t) = e^{-t^2}\sin(tx)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{-t^2}\sin(tx)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}t^{2n+1}e^{-t^2}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$, posons $f_n(t)=(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}t^{2n+1}e^{-t^2}$.

• Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}$, est continue puis intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
• La série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$ et la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.
• Ensuite, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty}t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $\displaystyle I_n=\int_0^{+\infty}t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit A un réel strictement positif. Les deux fonctions $t\mapsto t^{2n}$ et $t\mapsto-\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^A t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt&=\int_0^A t^{2n}\times te^{-t^2}\,dt=\left[-\frac{1}{2}t^{2n}e^{-t^2}\right]_0^A+n\int_0^A t^{2n-1}e^{-t^2}\,dt\\&=-\frac{1}{2}A^{2n}e^{-A^2}+n\int_0^A t^{2n-1}e^{-t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $I_n=nI_{n-1}$. En tenant compte, de $\displaystyle I_0=\int_0^{+\infty}te^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2}$ on a donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n=\dfrac{n!}{2}$ puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!|x|^{2n+1}}{2(2n+1)!}.$$

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}^*$. $\left|\dfrac{\dfrac{(n+1)!|x|^{2n+3}}{2(2n+3)!}}{\dfrac{n!|x|^{2n+1}}{2(2n+1)!}}\right|=\dfrac{(n+1)x^2}{(2n+3)(2n+2)}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}}=0$. D'après la règle de d'Alembert, la série numérique de terme général $\dfrac{n!|x|^{2n+1}}{2(2n+1)!}$ converge.

En résumé, pour tout réel x,
• Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}$, est continue puis intégrable sur $[0,+\infty[$.
• La série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$ et la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.
• $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt<+\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, pour tout réel x,

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(tx)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n+1}}{2(2n+1)!}.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(tx)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n+1}}{2(2n+1)!}.}$$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n}}{2(2n)!}=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!x^{2n-1}}{2(2n-1)!}=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}F(x).$$

Par suite, pour tout réel x, $e^{x^2/4}F'(x)+\dfrac{x}{2}e^{x^2/4}F(x)=\dfrac{e^{x^2/4}}{2}$ puis $\left(e^{x^2/4}F\right)'(x)=\dfrac{e^{x^2/4}}{2}$ et donc

$$e^{x^2/4}F(x)=e^0F(0)+\frac{1}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt,$$

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

puis

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx)\ dt = \frac{e^{-x^2/4}}{2} \int_0^x e^{t^2/4}\ dt.}$$

Exercice n° 20

On a ($I_0 = 0$,) $I_1 = 1$ et $I_2 = 2$ (l'identité et la transposition $\tau_{1,2}$). Déterminons alors une relation de récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a I_{n+1} involutions σ de $[\![1, n+2]\!]$ vérifiant $\sigma(n+2) = n+2$ car la restriction d'une telle permutation à $[\![1, n+1]\!]$ est une involution de $[\![1, n+1]\!]$ et réciproquement.
Sinon, soit σ une involution de $[\![1, n+2]\!]$ telle que $\sigma(n+2) \neq n+2$. Donc $\sigma(n+2) = k \in [\![1, n+1]\!]$. Nécessairement $\sigma(k) = n+2$ puis la restriction de σ à $[\![1, n+2]\!] \setminus \{k, n+2\}$ est une involution et réciproquement. Il y a I_n involutions de $[\![1, n+2]\!] \setminus \{k, n+2\}$ et $n+1$ choix possibles de k et donc $(n+1)I_n$ involutions σ de $[\![1, n+2]\!]$ telles que $\sigma(n+2) \neq n+2$.
En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n \text{ et } I_1 = 1 \text{ et } I_2 = 2.$$

Le rayon R de la série entière associée à la suite $\left(\dfrac{I_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est supérieur ou égal à 1 car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{I_n}{n!} \leqslant 1$. Pour x dans $]-R, R[$, posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$. f est dérivable sur $]-R, R[$ et pour $x \in]-R, R[$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!} x^{n-1} = 1 + 2x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+2}}{(n+1)!} x^{n+1} = 1 + 2x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1} + (n+1)I_n}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n \\
&= 1 + 2x + f(x) - x + xf(x) = 1 + x + (x+1)f(x).
\end{aligned}$$

Donc, pour $x \in]-R, R[$, $f'(x) - (x+1)f(x) = x+1$ ou encore $e^{-\frac{x^2}{2}-x} f'(x) - (x+1)e^{-\frac{x^2}{2}-x} f(x) = (x+1)e^{-\frac{x^2}{2}-x}$. Par suite, pour $x \in]-R, R[$,

$$e^{-\frac{x^2}{2}-x} f(x) - f(0) = \int_0^x (t+1)e^{-\frac{t^2}{2}-t}\ dt = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}-x},$$

et puisque $f(0) = 0$, $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}+x} - 1$.

Réciproquement, la fonction précédente est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux ($= e^{\frac{x^2}{2}} \times e^x$) et les coefficients de ce développement vérifient les relations définissant $\dfrac{I_n}{n!}$ de manière unique. Donc, ces coefficients sont les $\dfrac{I_n}{n!}$ ce qui montre que $R = +\infty$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n = e^{\frac{x^2}{2}+x} - 1.}$$

Exercice n° 20

1) Soient $n \geqslant 2$ puis $k \in [\![1, n-1]\!]$. On met une parenthèse autour de $X_1...X_k$ et une autour de $X_{k+1}...X_n$. Ensuite, pour chacun des a_k parenthésages de $X_1...X_k$, il y a a_{n-k} parenthésages possibles de $X_{k+1}...X_n$. Finalement, en faisant varier k de 1 à $n-1$, on a montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}.}$$

2) On suppose momentanément le rayon R de la série entière associé à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement positif. On pose conventionnellement $a_0 = 0$. Pour $x \in]-R, R[$,

$$f^2(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}\right)x^n=\sum_{n=2}^{+\infty}a_nx^n=f(x)-x,$$

et donc

$$\boxed{\forall x\in]-R,R[,\ f^2(x)=f(x)-x.}$$

3) Nécessairement, pour tout x de $]-R,R[$, $f(x)=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-4x})$ (I) ou $f(x)=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})$ (II). Ainsi, pour chaque $x\in]-R,R[$, on doit choisir l'une de ces deux expressions. Puisque $f(0)=0$, il faut choisir l'expression (II) quand $x=0$.

Pour $x\in\left]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right[$, posons $g(x)=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})$. g est développable en série entière sur $\left]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right[$ en vertu de théorèmes généraux. Notons $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement. Puisque $g(0)=0$, on a $b_0=0=a_0$ et puisque $g'(0)=1$, on a $b_1=1=a_1$. Enfin, la fonction g vérifie $\forall x\in\left]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right[$, $g^2(x)=g(x)-x$ et donc $\forall n\geqslant 2$, $b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_kb_{n-k}$.

On en déduit par récurrence que pour tout entier naturel n, $b_n=a_n$ et donc $\forall x\in\left]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right[$, $f(x)=g(x)$.

$$\boxed{\forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ f(x)=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x}).}$$

4) Pour connaitre les a_n, il reste à développer la fonction g en série entière. Pour $x\in\left]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right[$,

$$g(x)=\frac{1}{2}(1-(1-4x)^{1/2})=\frac{1}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n}2^{2n-1}x^n.$$

Enfin, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n}2^{2n-1}&=(-1)^{n-1}\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)\times\ldots\times\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}2^{2n-1}=\frac{2^{n-1}}{n!}\times 1\times 3\times\ldots.\times(2n-3)\\&=\frac{2^{n-1}}{n!}\times\frac{1\times 2\times 3\times\ldots.\times(2n-3)\times(2n-2)}{2\times 4\times\ldots\times(2n-2)}=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.}$$