

Planche n° 14. Séries entières

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (**)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière proposée dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{llll}
 1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n + 1} z^n & 2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n + 1} z^{4n} & 3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{n+1} & 4) \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^n z^n \\
 5) \sum_{n=0}^{+\infty} (\ln(n!))^2 z^n & 6) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} + \cos \frac{1}{n} \right) \right)^{n^4} z^n & 7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n^n} z^n & 8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n!))^\alpha}{n!^\beta} z^n, \alpha > 0 \\
 9) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1 + b^n} z^n, (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 & & &
 \end{array}$$

Exercice n° 2 (**)

Déterminer R_a quand :

$$\begin{array}{ll}
 1) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ rest premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & 2) a_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, a_n = n^{(-1)^n} \\
 3) \text{ Pour tout } p \in \mathbb{N}, a_{2p} = 2^p \text{ et } a_{2p+1} = 3^p & 4) \text{ Pour tout } p \in \mathbb{N}, a_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)
 \end{array}$$

Exercice n° 3

Calculer les sommes suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé le rayon de convergence de la série proposée.

$$\begin{array}{llll}
 1) (**) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n & 2) (**) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n & 3) (***) \text{ I} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} & 4) (**) \text{ I} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \\
 5) (**) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^n & 6) (*) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} & 7) (**) \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n) x^n & 8) (**) \text{ I} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n \\
 9) (***) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{n!(n+2)} x^n & 10) (**) \text{ I} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n & 11) (*) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n} & 12) (**) \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1) 2^{n+1} x^n \\
 13) (**) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} & & & \\
 14) (***) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } a_0 = a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n & & & \\
 15) (**) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } a_n \text{ est le nombre de couples } (x, y) \text{ d'entiers naturels tels que } x + 5y = n. & & &
 \end{array}$$

Exercice n° 4

Développer en série entière les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 1) (*) \frac{1}{(x-1)(x-2)} & 2) (***) \text{ I} \frac{1}{x^2 - 2tx + 1}, t \in]-1, 1[& 3) (**) \ln(x^2 - 5x + 6) \\
 4) (**) \operatorname{Arctan}\left(\frac{x \sin a}{1 - x \cos a}\right), a \in]0, \pi[& 5) (***) \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-p)} & 6) (***) \text{ I} (\operatorname{Arcsin} x)^2 \\
 7) (*) \int_0^x \cos(t^2) dt & 8) (***) \text{ I} \int_{-\infty}^x \frac{dt}{t^4 + t^2 + 1} & 9) (**) \cos x \operatorname{ch} x.
 \end{array}$$

Exercice n° 5 (* I)

Pour x réel, on pose $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice n° 6 (*) I)**

Soient $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ et $R > 0$ donné. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racine dans le disque fermé de centre 0 et de rayon R .

Exercice n° 7 (** I) (Inverse d'une série entière)**

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et telle que $a_0 = 1$ (ou plus généralement $a_0 \neq 0$).

1) Montrer qu'il existe une et une seule suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$.

2) Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a un rayon strictement positif.

Exercice n° 8 (*) I)**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$. Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice n° 9 (*) :**

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$ pour x dans $] -1, 1[$.

Exercice n° 10 (*) I)**

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2 - 1}$ pour x dans $] -1, 1[$ et en déduire les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.

Exercice n° 11 (**)**

Pour n entier naturel, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{4k+1}$. Convergence et somme de la série (numérique) de terme général u_n .

Exercice n° 12 (*)**

Soit A une matrice carrée complexe de format $p \in \mathbb{N}^*$. Rayon de convergence et somme en fonction de χ_A de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Tr}(A^n) z^n$.

Exercice n° 13 (*)**

Pour x réel, on pose $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \, dt$. En développant F en série entière par deux méthodes différentes, montrer que pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{1}{(2k+1)k!(n-k)!} = (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}.$$

Exercice n° 14 ()**

On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ puis pour tout entier naturel n , $\begin{cases} a_{n+1} = -a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{cases}$. Rayons et sommes de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n.$$

Exercice n° 15 (*) I)**

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \binom{2n}{n}} x^n$ pour $x \in [0, 4[$.

Exercice n° 16 (*) I)**

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ait une limite réelle k . (En particulier $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$ si $k = 0$ et $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ si $k = 1$). On suppose de plus que la série entière associée à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a un rayon de convergence égal à 1 et que la série de terme général a_n diverge.

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} = k$.

2) Applications.

a) Equivalent simple quand x tend vers 1 de $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^p \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} x^n$ où p est un entier naturel non nul donné.

Exercice n° 17 (*)**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

On suppose que pour tout entier naturel p et tout réel positif x , $|f^{(p)}(x)| \leq 1$. Déterminer f .

Exercice n° 18 (**) I) (Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \tan x$)**

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $f(x) = \tan x$.

1) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n , $f^{(n)} = P_n \circ f$ et que les P_n sont à coefficients entiers naturels. (Utiliser $\tan' = 1 + \tan^2$).

2) En utilisant la formule de TAYLOR-LAPLACE, montrer que la série de TAYLOR à l'origine de f a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$.

3) On note a_n les coefficients du développement précédent et g la somme de la série entière associée à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$. En déduire que pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$f(x) = g(x)$ et que $R = \frac{\pi}{2}$.

4) Calculer $a_0, a_1, a_2, \dots, a_7$.

5) Vérifier que la fonction $x \mapsto \operatorname{th} x$ est développable en série entière. Préciser le rayon et la valeur des coefficients en fonction des a_n .

Exercice n° 19 (*) I)**

Développer en série entière $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt$ et en déduire que pour tout réel x , $F(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{2} \int_0^x e^{t^2/4} dt$.

Exercice n° 20 (*)**

Soit I_n le nombre d'involutions de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite $\left(\frac{I_n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice n° 21 (*) I) (Dénombrement de parenthésages)**

1) Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne et a_n le nombre de parenthésages possibles d'un produit de n éléments de E ($a_1 = 1$ conventionnellement), $a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 5, \dots$). Montrer que pour tout $n \geq 2$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

2) Soit f la série entière associée à la suite (a_n) . On suppose momentanément le rayon R de cette série strictement positif. Montrer que pour tout x de $] -R, R[$, $(f(x))^2 - f(x) + x = 0$.

3) Calculer R et f .

4) En déduire a_n .