Chapitre 14. Produit scalaire dans l'espace. Orthogonalité

I. Produit scalaire dans le plan. Rappels de 1ère S

1) Les différentes expressions du produit scalaire dans le plan

On rappelle ici sans démonstrations les principaux résultats sur le produit scalaire dans le plan établi en classe de première S.

a) avec le cosinus

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est

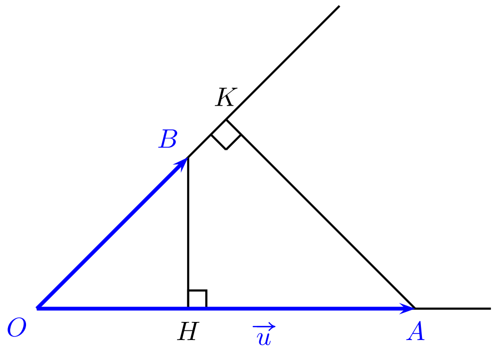
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right).$$

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0.$$

b) en projetant orthogonalement

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Soit O un point du plan. Soient A et B les points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.
Soient H est le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) et K est le projeté orthogonal de A sur la droite (OB).

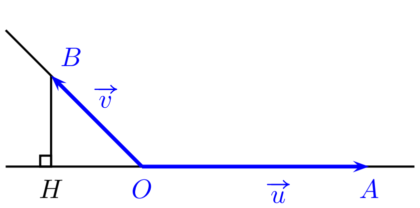
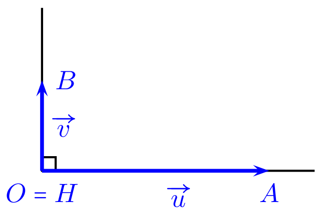
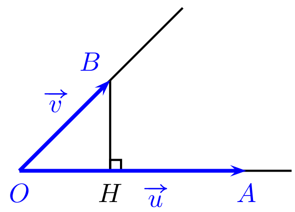


Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OB}.$$

De plus, si le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est nul, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = 0$ et si le vecteur $\overrightarrow{OH}$ n'est pas nul, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = OA \times OH$ si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de mêmes sens et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = -OA \times OH$ si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraires.

Ainsi, dans le cas où les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas nuls ou encore dans le cas où les points A et B sont distincts du point O,

		
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -OA \times OH$	$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$	$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OH$

On note que le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ est strictement positif si l'angle non orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est aigu, est strictement négatif si l'angle non orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est obtus et est nul si l'angle non orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est droit.

c) avec des coordonnées en repère orthonormé

Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On suppose que le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (x, y) dans le repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et que le vecteur $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées (x', y') dans le repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'.$$

d) avec des carrés de normes ou des carrés de distances

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right),$$

ou aussi

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right),$$

Si on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, on obtient

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right).$$

2) Carré scalaire. Norme d'un vecteur

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan, le **carré scalaire** de $\overrightarrow{u}$ est aussi le carré de la norme de $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2.$$

Si $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan et si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (x, y) dans ce repère

$$\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2,$$

et donc aussi

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3) Vecteurs orthogonaux

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, on a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$. Mais il est possible d'avoir $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.
On redit que l'égalité $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ est équivalente au fait que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

4) Propriétés algébriques du produit scalaire dans le plan

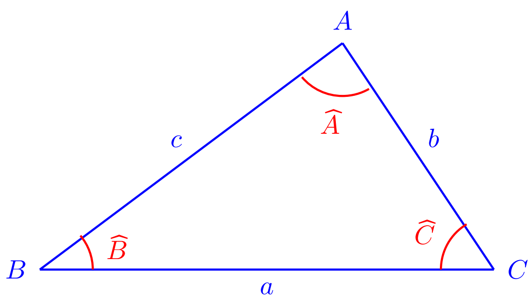
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et tout réel k, on a :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$,
- $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$,

et par suite, on a les identités remarquables

- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$,
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$,
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$.

5) Relations métriques dans le triangle



• **Formule d'Al-Kashi** : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

• **Aire du triangle ABC** : $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{B} = \dfrac{1}{2}ac\sin\widehat{C}$.

• **Formule des sinus** : $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{abc}{2S} = 2R$, où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

II. Produit scalaire dans l'espace

1) Définition du produit scalaire dans l'espace

Définition 1. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient A, B et C trois points de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}.$$

Il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ contenant les points A, B et C. L'unité de longueur dans $\mathscr{P}$ étant la même que celle choisie dans l'espace, on pose :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \text{ et } \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}^2} = AB.$$

Commentaire 1. Le plan $\mathscr{P}$ est uniquement défini si les points A, B et C ne sont pas alignés.

Commentaire 2. La valeur de $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ dans la définition ci-dessus ne dépend pas du choix des points A, B et C. En effet, si on choisit trois autres poins A', B' et C' tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{A'C'}$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} &= \frac{1}{2}(A'B'^2 + A'C'^2 - B'C'^2)\\ &= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}.\end{aligned}$$

Commentaire 3. Comme dans le plan, le carré de la norme de $\overrightarrow{u}$ est aussi le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par lui-même et le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par lui-même est appelé le « carré scalaire de $\overrightarrow{u}$ » et se note $\overrightarrow{u}^2$:

$$\text{pour tout vecteur } \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2.$$

2) Orthogonalité de deux vecteurs dans l'espace

On généralise à l'espace la notion de vecteurs orthogonaux :

Définition 2. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

3) Propriétés algébriques du produit scalaire dans l'espace

Théorème 1. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et tout réel k, on a :
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$,
- $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$.
- $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$.

Commentaire. Les deux premières propriétés sont immédiates car on peut penser les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans un plan. On admettra la troisième propriété c'est-à-dire la possibilité de distribuer. ❑

Puisqu'on a le droit de distribuer, comme dans le plan, on a les identités remarquables :

Théorème 2. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :
- $\left\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2$.
- $\left\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right)^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2$.
- $\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right).\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2$.

4) Différentes expressions du produit scalaire dans l'espace

On peut maintenant donner les différentes expressions du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace :

a) Expression du produit scalaire avec des coordonnées

Définition 3. Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace.
$\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormal (ou orthonormé) de l'espace si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux.

Théorème 3. Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormal de l'espace, alors
- $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et aussi $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Démonstration. Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal. Par définition,

$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0,$$

et

$$\vec{i}.\vec{i} = \left\|\vec{i}\right\|^2 = 1 = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k}.$$

D'après le théorème 1, on a alors

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right).\left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right)\\ &= xx'\vec{i}.\vec{i} + xy'\vec{i}.\vec{j} + xz'\vec{i}.\vec{k} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}.\vec{j} + yz'\vec{j}.\vec{k} + zx'\vec{k}.\vec{i} + zy'\vec{k}.\vec{j} + zz'\vec{k}.\vec{k}\\ &= xx' + yy' + zz'.\end{aligned}$$

En particulier, quand $\vec{u} = \vec{v}$, on obtient

$$\vec{u}^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Exemple. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(2, -1, 3)$ et $(0, 4, 5)$ dans un certain repère orthonormal de l'espace, alors

$$\vec{u}.\vec{v} = 2 \times 0 + (-1) \times 4 + 3 \times 5 = 11,$$

et

$$\|\vec{u}\|^2 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

b) Expression du produit scalaire avec un cosinus

Théorème 4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ où $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ désigne l'angle non orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 1. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(2, 1, 0)$ et $B(-1, 1, 3)$. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{AOB}$.

Solution. On a

$$\cos\widehat{AOB} = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA \times OB}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées respectives $(2, 1, 0)$ et $(-1, 1, 3)$.

- $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2 \times (-1) + 1 \times 1 + 0 \times 3 = -1$.
- $OA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$ et $OB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$.

Donc, $\cos\widehat{AOB} = \dfrac{-1}{\sqrt{5} \times \sqrt{11}} = -\dfrac{1}{\sqrt{55}}$. La calculatrice fournit alors

$$\boxed{\widehat{AOB} = 97,7° \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}}$$

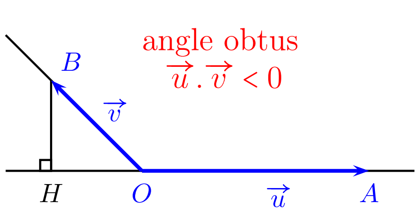
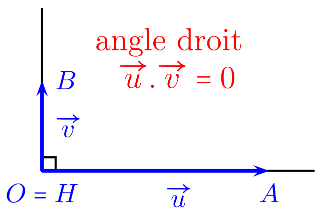
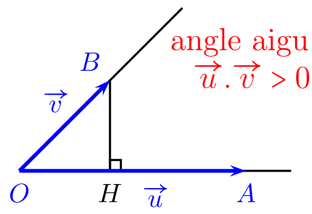
---

c) Expression du produit scalaire avec des projetés orthogonaux

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
Comme dans le plan, si on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ et si on note H le projeté orthogonal de B sur (OA) et K le projeté orthogonal de A sur (OB),le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OB},$$

avec de plus :

		
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -OA \times OH$	$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$	$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OH$

d) Expression du produit scalaire avec des carrés de normes ou des carrés de distances

Théorème 5. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2\right).$$

Si on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right).$$

III. *Orthogonalité*

1) Orthogonalité de deux droites de l'espace

On connaît déjà la notion de droites perpendiculaires :

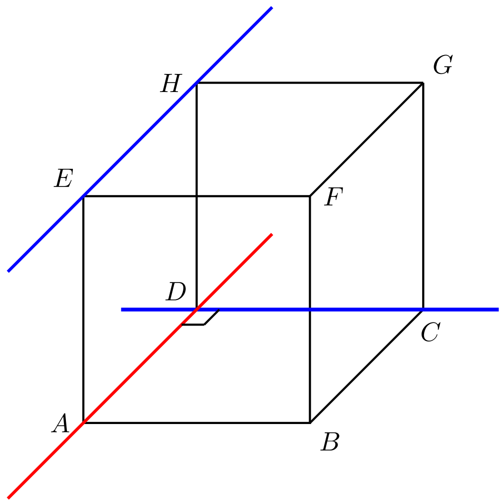
Définition 4. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de l'espace.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont perpendiculaires dans l'espace si et seulement si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires et perpendiculaires dans un plan les contenant.

On généralise cette notion :

Définition 5. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de l'espace.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales si et seulement si des parallèles à chacune de ces deux droites passant par un point donné de l'espace sont perpendiculaires.

Remarque. Deux droites perpendiculaires sont orthogonales mais deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaires car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires ou encore deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.

Exemple. Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, les doites (CD) et (EH) sont orthogonales. En effet, la parallèle à la droite (EH) passant par D est la droite (DA). La droite (DA) et la droite (CD) sont coplanaires et dans le plan ACD contenant ces deux droites, les droites (DA) et (CD) sont perpendiculaires.
Par suite, les parallèles aux droites (EH) et (CD) passant par D sont perpendiculaires et donc les droites (CD) et (EH) sont orthogonales.



Théorème 6. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}' = 0$.

Ainsi, deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si des vecteurs directeurs de ces droites sont orthogonaux. Ce résultat fournit un outil très pratique pour établir l'orthogonalité de deux droites. On va le constater par exemple dans la démonstration du théorème suivant :

Théorème 7. Soient $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ trois droites de l'espace.
Si $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{D}'$ et si $\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{D}''$ alors $\mathscr{D}'$ est orthogonale à $\mathscr{D}''$.

Démonstration. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites parallèles. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ des vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ respectivement.

Puisque les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont colinéaires. Par suite, il existe un réel non nul k tels que $\overrightarrow{u}' = k\overrightarrow{u}$.

Soit $\mathscr{D}''$ une droite orthogonale à $\mathscr{D}$. Soit $\overrightarrow{u}''$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Puisque les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}''$ sont orthogonales, on a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}'' = 0$. Mais alors

$$\overrightarrow{u}'.\overrightarrow{u}'' = \left(k\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{u}'' = k\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}'' = 0.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{u}''$ sont orthogonaux ou encore les droites $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ sont orthogonales.

Exercice 2. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques respectives

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 3t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}, \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x = -1 - 4t' \\ y = 4 + t' \\ z = -8 + 3t' \end{array}\right., t' \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.
2) Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont-elles perpendiculaires ?

Solution. **1)** Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}(2, -1, 3)$ et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est le vecteur $\overrightarrow{u}'(-4, 1, 3)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}' = 2 \times (-4) + (-1) \times 1 + 3 \times 3 = -8 - 1 + 9 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont orthogonaux et donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.

2) Puisque les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont un point commun.

Etudions donc l'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Soient $M(-1 + 2t, 3 - t, 1 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$ et $M'(-1 - 4t', 4 + t', -8 + 3t')$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}'$.

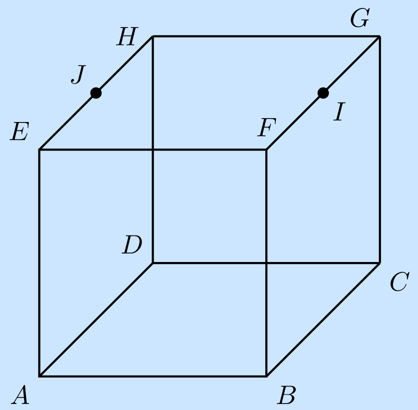
$$M = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 + 2t = -1 - 4t' \\ 3 - t = 4 + t' \\ 1 + 3t = -8 + 3t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = -1 - t \\ -1 + 2t = -1 - 4(-1 - t) \\ 1 + 3t = -8 + 3(-1 - t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2t = 4 \\ 6t = -12 \\ t' = -1 - t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -2 \\ t = -2 \\ t' = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -2 \\ t' = 1 \end{array}\right..$$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont donc un point commun obtenu pour $t = -2$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ ou $t' = 1$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}'$: c'est le point $A(-5, 5, -5)$. On a montré que

$$\boxed{\text{Les droites } \mathscr{D} \text{ et } \mathscr{D}' \text{ sont perpendiculaires en le point } A(-5,5,-5).}$$

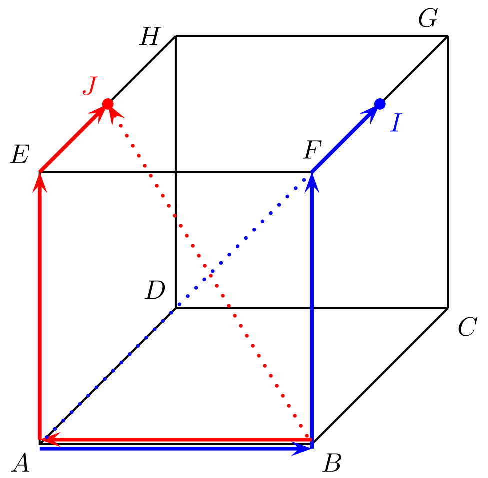
Exercice 3. On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 ci-dessous. On note I le milieu de $[FG]$ et J le milieu de $[EH]$.



Les droites (AI) et (BJ) sont-elles orthogonales ?

Solution.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FI}\right).\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF}.\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{FI}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FI}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FI}.\overrightarrow{EJ}.\end{aligned}$$



- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = -AB^2 = -1$.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = 0$ car la face $ABFE$ est un carré et donc $(AB)\perp(AE)$.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EF}.\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EH} = 0$ car la face $EFGH$ est un carré et donc $(EF)\perp(EH)$.
- $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BA} = 0$ car la face $ABFE$ est un carré et donc $(BF)\perp(BA)$.
- $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE} = AE^2 = 1$.
- $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AE}.\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EH} = 0$ car la face $ADHE$ est un carré et donc $(AE)\perp(EH)$.
- $\overrightarrow{FI}.\overrightarrow{BA} = \left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FG}\right).\overrightarrow{FE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FE} = 0$ car la face $EFGH$ est un carré et donc $(FE)\perp(FG)$.
- $\overrightarrow{FI}.\overrightarrow{AE} = \left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FG}\right).\overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BF} = 0$ car la face $BCGF$ est un carré et donc $(BF)\perp(FG)$.
- $\overrightarrow{FI}.\overrightarrow{EJ} = \left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FG}\right).\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{EH} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FG} = \dfrac{1}{4}FG^2 = \dfrac{1}{4}$.

Ainsi,

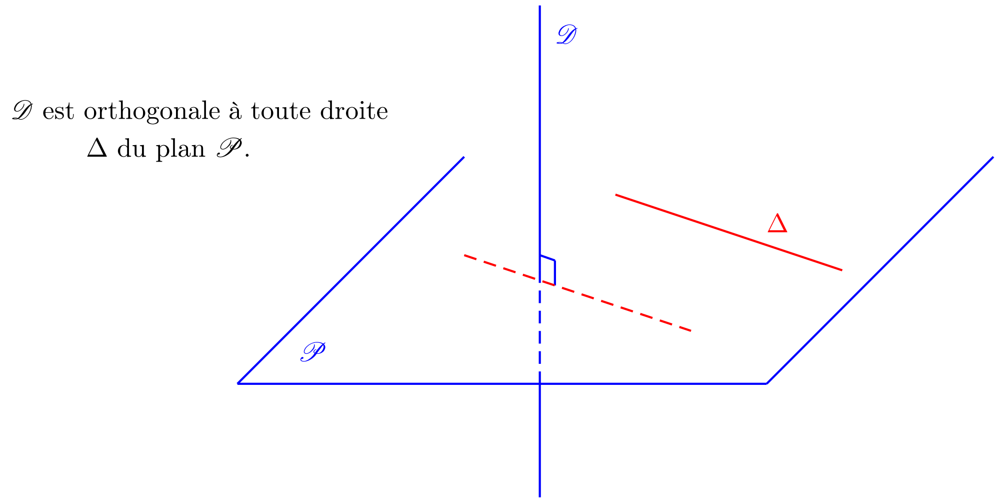
$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ} = -1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

En particulier, $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ} \neq 0$ et donc les droites (AI) et (BJ) ne sont pas orthogonales.

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan de l'espace

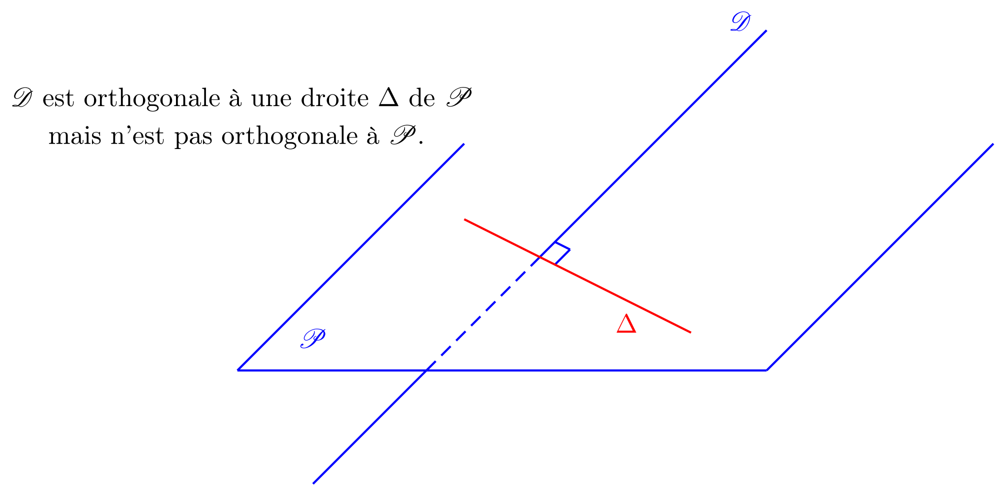
a) Définition et caractérisation de l'orthogonalité d'une droite et d'un plan de l'espace

Définition 7. Soient $\mathscr{D}$ une droite de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.
$\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$ si et seulement si $\mathscr{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$.



Remarque. Une droite orthogonale à un plan est nécessairement sécante à ce plan et on peut également dire que la droite est perpendiculaire au plan.

Il ne suffit pas que la droite $\mathscr{D}$ soit orthogonale à une droite du plan $\mathscr{P}$ pour que la droite $\mathscr{D}$ soit orthogonale au plan $\mathscr{P}$ comme le montre l'exemple ci-dessous :



Théorème 8. Soient $\mathscr{D}$ une droite de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.
$\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$ si et seulement si $\mathscr{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathscr{P}$.

Démonstration. Si $\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$ et en particulier, $\mathscr{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathscr{P}$.

Réciproquement, supposons que $\mathscr{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes Δ et Δ' du plan $\mathscr{P}$. Notons $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur de Δ'. Notons encore $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

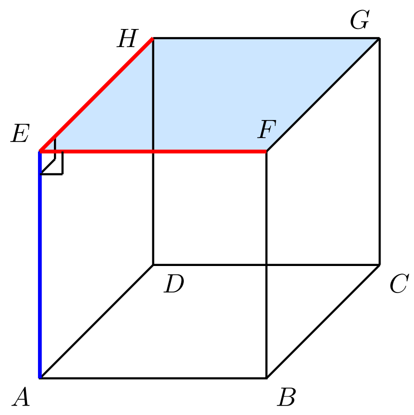
Puisque Δ et Δ' sont deux droites contenues dans $\mathscr{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont deux vecteurs du plan $\mathscr{P}$. Puisque les droites Δ et Δ' ne sont pas parallèles, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires. En résumé, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$.

Soit alors Δ'' une droite contenue dans $\mathscr{P}$ et soit $\overrightarrow{u}''$ un vecteur directeur de Δ''. D'après la théorème 13 du chapitre 13, il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{u}'' = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}'$. On a

$$\overrightarrow{u}''.\overrightarrow{v} = \left(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}'\right).\overrightarrow{v} = \alpha\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right) + \beta\left(\overrightarrow{u}'.\overrightarrow{v}\right) = 0 + 0 = 0.$$

Ceci montre que la droite $\mathscr{D}$ est est orthogonale à la droite Δ''.

Exemple. Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous,



la droite (AE) est perpendiculaire aux droites (EF) et (EH) qui sont deux droites sécantes du plan EFH.
La droite (AE) est donc perpendiculaire au plan EFH. On en déduit que la droite (AE) est orthogonale à toute droite du plan EFH comme les droites (HF) et (FG) par exemple. ❑

On peut encore démontrer (mais nous ne le ferons pas) le théorème suivant :

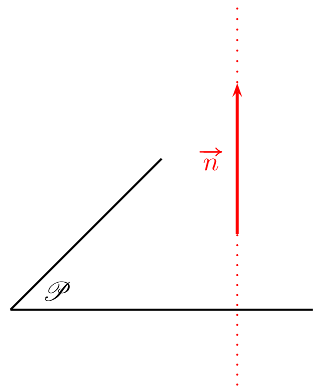
Théorème 9.
1) Soient $\mathscr{D}$ une droite de l'espace et $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de l'espace.
Si $\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$ et si $\mathscr{P}$ est parallèle à $\mathscr{P}'$, alors $\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}'$.

2) Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.
Si $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{D}'$ et si $\mathscr{D}'$ est orthogonale à $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$.

b) Vecteur normal à un plan

Définition 8. Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.
Un **vecteur normal** au plan $\mathscr{P}$ est un vecteur non nul orthogonal à tout vecteur du plan $\mathscr{P}$.

Commentaire.



Un vecteur normal à un plan peut être pensé comme un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan. ❑

On admet le théorème suivant :

Théorème 10.
Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Deux vecteurs normaux à $\mathscr{P}$ sont nécessairement colinéaires.

On peut réexprimer le théorème 8 en terme de vecteur normal :

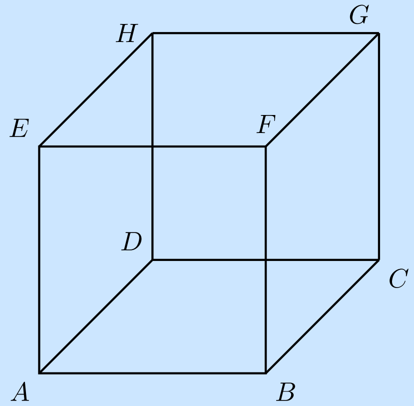
Théorème 11.
Soient $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de l'espace.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à $\mathscr{P}$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$.

c) Retour sur la position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

La notion de vecteur normal permet de réexprimer agréablement le parallélisme ou l'orthogonalité d'une droite et d'un plan :

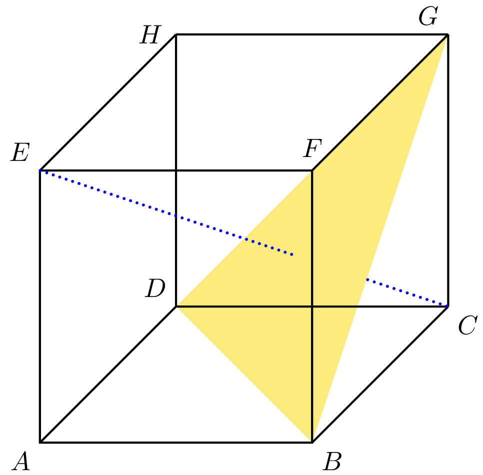
Théorème 12.
Soient $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
1) $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$.
2) $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$.

Exercice 4. On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 ci-dessous.



Les droites (CE) est-elle orthogonale au plan (BDG) ?

Solution.



Calculons $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BG}$.

$$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BG} = \left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}\right).\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}.\overrightarrow{BG}.$$

• La droite (EF) est perpendiculaire à la droite (FB) car la face $ABFE$ est un carré. La droite (EF) est perpendiculaire à la droite (FG) car la face $EFGH$ est un carré.

Ainsi, la droite (EF) est orthogonale aux droites (FB) et (FG) qui sont deux droites sécantes du plan (BCF). Par suite, la droite (EF) est orthogonale au plan (BCF). On en déduit que la droite (EF) est orthogonale à toute droite du plan (BCF) comme la droite (BG) par exemple et donc $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BG} = 0$.

• Les segments $[FC]$ et $[BG]$ sont les diagonales du carré $BCGF$. On sait que ces diagonales sont perpendiculaires et donc $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{BG} = 0$.

Finalement, $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{FC}.\overrightarrow{BG} = 0$ et donc $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FC}.\overrightarrow{BG} = 0 + 0 = 0$. Ainsi, la droite (EC) est orthogonale à la droite (BG). Par symétrie des rôles de B et D, la droite (EC) est également orthogonale à la droite (DG).

Les droites (BG) et (DG) sont sécantes en G. En effet, si ces droites ne sont pas sécantes, puisque ces droites ont déjà le point G en commun, ces droites sont confondues et donc le point D appartient à la droite (BG).
En particulier, le point D appartient à la face $BCGF$ ce qui n'est pas.

On a donc montré que la droite (EC) est orthogonale aux droites (BG) et (DG) qui sont deux droites sécantes du plan (BDG). On en déduit que

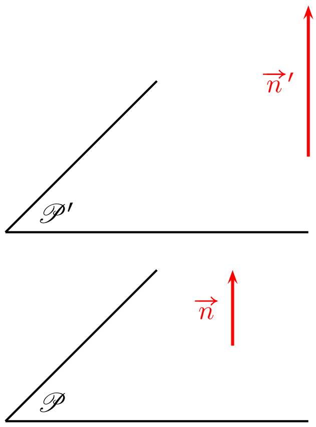
$$\boxed{\text{la droite } (EC) \text{ est orthogonale au plan } (BDG).}$$

3) Retour sur les positions relatives de deux plans. Plans perpendiculaires

a) Retour sur les positions relatives de deux plans

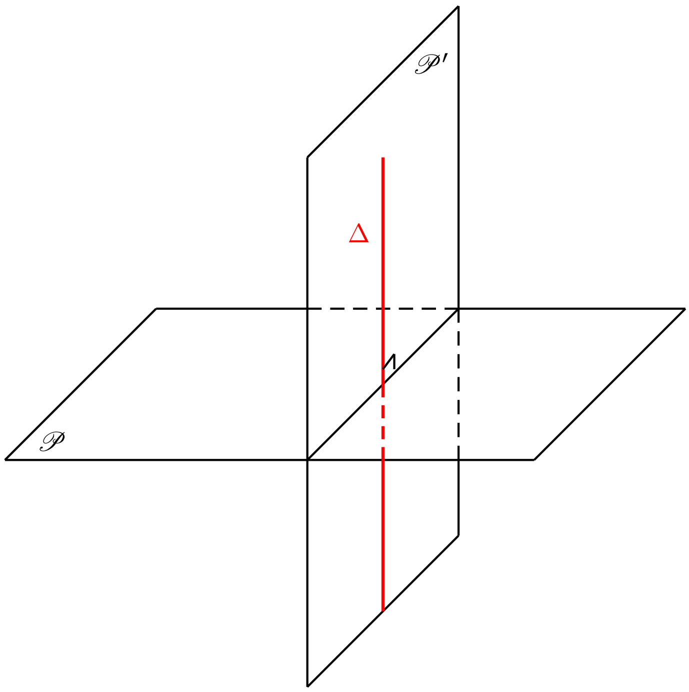
Comme dans les paragraphes précédents, la position relative de deux plans se réénonce agréablement en termes de position relative de vecteurs normaux à ces plans :

Théorème 13.
Soient $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et $\mathscr{P}'$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}'$.
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont colinéaires.



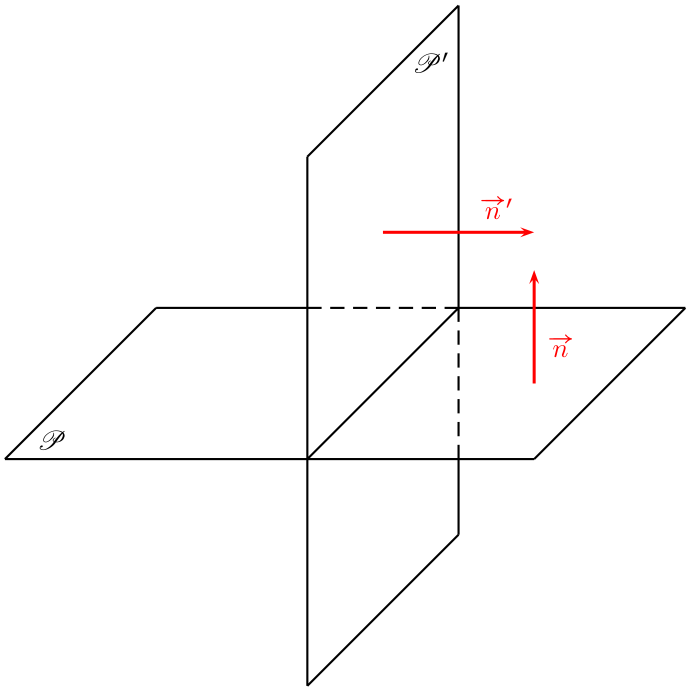
b) Plans perpendiculaires

Définition 9. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de l'espace.
$\mathscr{P}'$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$ si et seulement si $\mathscr{P}'$ contient une droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{P}$.



De même, que pour le parallélisme de deux plans, les vecteurs normaux sont pratiques pour caractériser la perpendicularité de deux plans :

Théorème 14.
Soient $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et $\mathscr{P}'$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}'$.
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont orthogonaux.



IV. Equation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

On munit l'espace d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. On suppose connus un point A de $\mathscr{P}$ de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et un vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées (a, b, c) ($\vec{n}$ est donc non nul ou encore l'un au moins des trois réels a ou b ou c n'est pas nul).

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. On cherche une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées (x, y, z) de M pour que le point M appartienne au plan $\mathscr{P}$. On l'obtient de la façon suivante :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow \text{ le vecteur } \overrightarrow{AM} \text{ est orthogonal au vecteur } \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0. \end{aligned}$$

L'équation obtenue, à savoir $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, est une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

Théorème 15.
Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.
Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathscr{P}$ et $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Exemple. Soient A le point de coordonnées $(-3, 1, 2)$ et $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(1, 0, -2)$ (dans un certain repère orthonormé de l'espace). Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est

$$1 \times (x + 3) + 0 \times (y - 1) - 2(z - 2) = 0$$

ou encore $x - 2z + 7 = 0$. ❏

On étudie maintenant la réciproque du théorème précédent. Quand on développe puis réduit le premier membre de l'équation $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, on obtient une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ où l'un au moins des trois réels a ou b ou c n'est pas nul.

Inversement, soient a, b, c et d quatre réels tels que l'un au moins des trois réels a ou b ou c n'est pas nul puis $\mathscr{E}$ l'ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Tout d'abord, l'ensemble $\mathscr{E}$ n'est pas vide. En effet, si par exemple $a \neq 0$, le point $A\left(-\dfrac{d}{a}, 0, 0\right)$ appartient à $\mathscr{E}$ car

$$ax_A + by_A + cz_A + d = a \times \left(-\frac{d}{a}\right) + b \times 0 + c \times 0 + d = -d + d = 0.$$

Soit donc $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathscr{E}$. On note $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (a, b, c) ($\vec{n}$ est un vecteur non nul).

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0\\ &\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=0 \text{ (car } A\in\mathscr{E} \text{ et donc } ax_A+by_A+cz_A+d=0)\\ &\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0\\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au plan passant par } A \text{ de vecteur normal } \overrightarrow{n}. \end{aligned}$$

On a ainsi montré que

Théorème 16.
Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.
Soient a, b, c et d quatre réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.
L'ensemble d'équation $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}(a,b,c)$.

Exercice 5. (Détermination du projeté orthogonal d'un point sur un plan)
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-y+z+3=0$ et A le point de coordonnées $(-2,3,5)$.
1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{P}$ et passant par A.
2) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.
3) **(Calcul de la distance du point A au plan $\mathscr{P}$)**
a) Montrer que pour tout point M de $\mathscr{P}$, $AM \geqslant AH$ avec égalité si et seulement si $M=H$.
b) Calculer la distance AH. Cette distance est par définition la distance du point A au plan $\mathscr{P}$.

Solution.

1) Puisque le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est orthonormal et qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $2x-y+z+3=0$, un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2,-1,1)$.

La droite Δ est la droite passant par $A(-2,3,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(2,-1,1)$. Une représentation paramétrique de Δ est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x=-2+2t\\ y=3-t\\ z=5+t \end{array}\right., \ t\in\mathbb{R}.$$

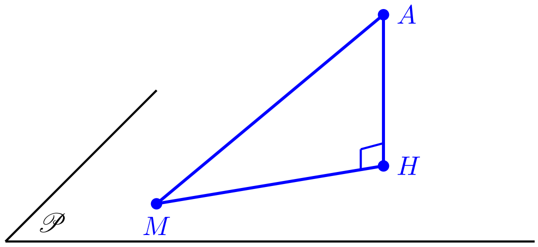
2) Le point H est le point d'intersection de la droite Δ et du plan $\mathscr{P}$.
Soit $M(-2+2t, 3-t, 5+t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite Δ.

$$M\in\mathscr{P} \Leftrightarrow 2(-2+2t)-(3-t)+(5+t)+3=0 \Leftrightarrow 6t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{6}.$$

Quand $t=-\frac{1}{6}$, on obtient les coordonnées du point H :

$$\boxed{\text{le point } H \text{ a pour coordonnées } \left(-\frac{7}{3}, \frac{19}{6}, \frac{29}{6}\right).}$$

3) a) Soit M un point du plan $\mathscr{P}$.



D'après le théorème de Pythagore, $AM^2=AH^2+HM^2$ ou encore $AM=\sqrt{AH^2+HM^2}$.
De plus, $AH^2+HM^2 \geqslant AH^2$ avec égalité si et seulement si $HM^2=0$ ou encore $M=H$. Donc, $AM \geqslant \sqrt{AH^2}=AH$ avec égalité si et seulement si $M=H$.

Ceci montre que la distance AH est la plus courte distance de A à un point de $\mathscr{P}$.

b)

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2} = \sqrt{\left(-\frac{7}{3} + 2\right)^2 + \left(\frac{19}{6} - 3\right)^2 + \left(\frac{29}{6} - 5\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{6}{36}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\boxed{AH = \frac{1}{\sqrt{6}}.}$$

Exercice 6. (Plan médiateur d'un segment).

1) Soient A et B deux points distincts de l'espace.
Montrer que l'ensemble des points à égale distance de A et B est le plan passant par le milieu I du segment $[AB]$ et perpendiculaire au segment $[AB]$ (ce plan s'appelle le **plan médiateur** du segment $[AB]$).

2) L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On donne les points A et B de coordonnées repsectives $(1, 1, -2)$ et $(3, -1, 2)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$.

Solution.

1) Soit M un point de l'espace.

$$AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{BM}^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right).\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}\right).\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{IM}\right).\overrightarrow{AB} = 0 \text{ (car } I \text{ est le milieu de } [AB])$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

Ainsi, l'ensemble des points M tels que $AM = BM$ est encore l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$.
Il s'agit du plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ ou encore du plan passant par I et perpendiculaire au segment $[AB]$.

2) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$AM = BM \leftrightarrow AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 4z + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 4z + 4$$
$$\Leftrightarrow 4x - 4y + 8z - 8 = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 2 = 0.$$

$$\boxed{\text{Une équation du plan médiateur du segment } [AB] \text{ est } x - y + 2z - 2 = 0.}$$
