Planche n° 13. Suites et séries d'intégrales. Corrigé

Exercice n° 1

1) a) Pour x réel positif et n entier naturel non nul, posons $g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \left\{\begin{array}{l} e^{-x} - \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n] \\ e^{-x} \text{ si } x > n \end{array}\right.$.

Montrons que pour tout x de $[0, +\infty[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, $|g_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{ne}$.

• La fonction g_n est définie et continue sur R^+.
• Pour $x \geqslant n$, $0 < g_n(x) \leqslant e^{-n} = g_n(n)$.
• La fonction g_n est continue sur le segment $[0, n]$ et admet donc sur $[0, n]$ un minimum et un maximum.
• La fonction g_n a un minimum égal à 0 atteint en 0. En effet, on sait que pour tout réel u, $e^u \geqslant 1 + u$ (inégalité de convexité) et donc pour tout réel x de $[0, n]$, $e^{-x/n} \geqslant 1 - \dfrac{x}{n} \geqslant 0$. Après élévation des deux membres de cette inégalité à l'exposant n (par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$), on obtient $e^{-x} \geqslant \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$ ou encore $g_n(x) \geqslant 0 = g_n(0)$.
• Etudions la fonction g_n sur $[0, n]$. Pour $x \in [0, n]$, $g_n'(x) = -e^{-x} + \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{n-1}$.($g_n'(n)$ est la dérivée à gauche de la fonction g_n en n, mais on peut montrer qu'en fait la fonction g_n est dérivable en n pour $n > 1$).
• Pour $0 < x \leqslant n$, les inégalités précédentes sont strictes et la fonction $g_{n/[0,n]}$ admet son maximum dans $]0, n]$. De plus, $g_n'(n) = -e^{-n} < 0$ et puisque la fonction g_n est de classe C^1 sur $[0, n]$, sa dérivée g_n' est strictement négative sur un voisinage à gauche de n. La fonction g_n est alors strictement décroissante sur ce voisinage et la fonction g_n admet nécessairement son maximum sur $\mathbb{R}^+$ en un certain point x_n de $]0, n[$. En un tel point, puisque l'intervalle $]0, n[$ est ouvert, on sait que la dérivée de la fonction g_n s'annule. L'égalité $g_n'(x_n) = 0$ fournit $\left(1 - \dfrac{x_n}{n}\right)^{n-1} = e^{-x_n}$ et donc

$$g_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right) e^{-x_n} n = \left(1 - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)\right) e^{-x_n} = \frac{x_n e^{-x_n}}{n}.$$

En résumé, pour tout réel positif x, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \dfrac{x_n e^{-x_n}}{n}$ où x_n est un certain réel de $]0, n[$.
• Pour u réel positif, posons $h(u) = ue^{-u}$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour $u \geqslant 0$, $h'(u) = (1 - u)e^{-u}$. Par suite, la fonction h admet un maximum en 1 égal à $\dfrac{1}{e}$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{1}{ne}.}$$

b) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Donc la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par suite, I existe dans $\mathbb{R}$.

On est alors en droit d'espérer que $\mathrm{I} = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x^2)\, dx$.
La fonction $x \mapsto f_n(x^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $[\sqrt{n}, +\infty[$. Donc la fonction $x \mapsto f_n(x^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x^2)\, dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$.
Montrons que I_n tend vers I quand n tend vers $+\infty$.

$$|\mathrm{I} - \mathrm{I}_n| \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left|f\left(x^2\right) - f_n\left(x^2\right)\right| dx + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2} dx \leqslant \sqrt{n} \times \frac{1}{ne} + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{e\sqrt{n}} + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Puisque la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n = \mathrm{I}$.

Calcul de la limite de I_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les changements de variables $x = u\sqrt{n}$ puis $u = \cos v$ fournissent

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} \int_0^1 \left(1 - u^2\right)^n du = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} v \, dv = \sqrt{n}\, W_{2n+1}$$

où W_n est la n-ème intégrale de Wallis. On a déjà vu (voir exercices math sup Planche n° 16, exercice n° 10) que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et donc

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalement, I_n tend vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

2) a) Soit $x \in [0, +\infty[$. Pour $n > x^2$, $f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)\right)$ et donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(-x^2 + o(1))$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

b) Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et nulle au voisinage de $+\infty$. Donc chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est intégrable sur $[0, +\infty[$.
La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$. Donc la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par convexité de la fonction exponentielle, $\forall u \in \mathbb{R}$, $1 + u \leqslant e^u$. Par suite, $\forall x \in \left[0, \sqrt{n}\right]$, $0 \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{n} \leqslant e^{-x^2/n}$ puis par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} = f(x)$. D'autre part, pour $x > \sqrt{n}$, $f_n(x) = 0 \leqslant f(x)$. Finalement

$$. \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, +\infty[, |f_n(x)| \leqslant f(x).$$

En résumé,
- chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$,
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f sur $[0, +\infty[$ et la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leqslant f$, la fonction f étant intégrable sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\, dx.$$

Comme au 1), $I_n = \sqrt{n}\, W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, et de nouveau

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Exercice n° 2

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t-1}$ est définie sur $]0, 1[$, négligeable devant $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ en 0 et prolongeable par continuité en 1 (en posant $f(1) = 1$). Donc, la fonction f est intégrable sur $]0, 1[$.

Pour tout réel t de $]0, 1[$, $\dfrac{\ln t}{t-1} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln t$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, 1[$, posons $f_n(t) = -t^n \ln t$. Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, 1[$ pour les mêmes raisons que f.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 |f_n(t)|\, dt &= \int_\varepsilon^1 f_n(t)\, dt = \int_\varepsilon^1 -t^n \ln t\, dt \\ &= \left[-\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{t^n}{n+1}\, dt = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} \ln \varepsilon.\end{aligned}$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\ dt = \int_0^1 f_n(t)\ dt = \frac{1}{(n+1)^2}$. On note alors que la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\ dt$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

En résumé,

- chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue et intégrable sur $]0,1[$,
- la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $]0,1[$ et la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\ dx < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, (f est intégrable sur $]0,1[$, la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge) et

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On a montré que

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\ dt = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Exercice n° 3

Soit $a > 0$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^a}$ est continue sur le segment $[0,1]$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^a}\ dx$ existe.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1+x^a}\ dx &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-x^a)^k\ dx + \frac{(-x^a)^{n+1}}{1+x^a}\right) dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{ka}\ dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{(n+1)a}}{1+x^a}\ dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+ka} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{(n+1)a}}{1+x^a}\ dx.
\end{aligned}$$

De plus, $\displaystyle\left|(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{(n+1)a}}{1+x^a}\ dx\right| = \int_0^1 \frac{x^{(n+1)a}}{1+x^a}\ dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{(n+1)a}}{1+0}\ dx = \frac{1}{1+(n+1)a}$. Comme $\dfrac{1}{1+(n+1)a}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\displaystyle(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{(n+1)a}}{1+x^a}\ dx$. Ceci montre que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{1+na}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et que

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+x^a}\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}.}$$

Remarque. Quand $a = 1$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$.

Exercice n° 4

Pour $x \in]0,1]$, $x^{-x} = e^{-x\ln(x)}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{-x} = 1$. Donc si on pose $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} x^{-x} \text{ si } x \in]0,1] \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$, f est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et donc intégrable sur le segment $[0,1]$.

Pour $x \in]0,1]$, $x^{-x} = e^{-x\ln(x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln(x))^n}{n!}$. Posons alors $\forall x \in [0,1]$, $f_0(x) = 1$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(-x\ln(x))^n}{n!} \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. La fonction f_0 est continue sur $[0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $-x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$. En résumé, chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue sur $[0,1]$. De plus,

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Vérifions alors que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur le segment $[0,1]$. Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = \begin{cases} -x\ln x \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. La fonction g est continue sur le segment $[0,1]$ et admet donc un maximum M sur ce segment. Pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leqslant g(x) \leqslant M$ (on peut montrer que $M = g\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}$). Mais alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1]$, $|f_n(x)| = \dfrac{(g(x))^n}{n!} \leqslant \dfrac{M^n}{n!}$ ce qui reste vrai pour $x = 0$. Comme la série numérique de terme général $\dfrac{M^n}{n!}$ converge, on a montré que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur le segment $[0,1]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$, converge et

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad (*).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $u = -\ln(x)$ puis $v = (n+1)u$, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!}\int_0^1 (-x\ln x)^n\,dx = \frac{1}{n!}\int_{+\infty}^0 (ue^{-u})^n \times (-e^{-u}\,du) = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u}\,du \\ &= \frac{1}{n!(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty} v^n e^{-v}\,dv = \frac{\Gamma(n+1)}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ s'écrit alors $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Remarque. Si on ne connaît pas la fonction Γ d'Euler, pour calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-x\ln x)^n}{n!}\,dx$, on peut aussi s'intéresser plus généralement à $J_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(-\ln x)^p}{n!}\,dx$ que l'on calcule par récurrence grâce à une intégration par parties.

Le travail qui précède permet encore d'écrire

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^n}{n!}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

$$\boxed{\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \text{ et } \int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.}$$

Exercice n° 5

Pour $x > 0$, posons $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$. f est continue sur $]0,+\infty[$.
Ensuite, pour tout réel strictement positif x, on a $0 < e^{-x} < 1$ et donc

$$\frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x^2 e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, posons $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ car négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ (et prolongeable par continuité en 0). En particulier, chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est intégrable sur $]0, +\infty[$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\ dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx}\ dx = \frac{1}{n^3}\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u}\ du = \frac{\Gamma(3)}{n^3} = \frac{2}{n^3},$$

(si on ne connaît pas la fonction Γ, intégrer par parties deux fois) qui est le terme général d'une série numérique convergente.

En résumé,

- chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$,
- la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction f sur $]0, +\infty[$ et la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\ dx < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0, +\infty[$, la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge et

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}.$$

On a montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x - 1}\ dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.}$$

Exercice n° 6

C'est presque le même exercice que le n° 5. Pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{x}{\operatorname{sh} x} = \frac{2xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} = 2xe^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x},$$

puis avec la même démarche que dans l'exercice précédent

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh} x}\ dx &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x}\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u}\ du = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\Gamma(2)}{(2n+1)^2}\\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh} x}\ dx = \frac{\pi^2}{4}.}$$

Exercice n° 7

Ici, le plus simple est peut-être de ne pas utiliser de théorème d'intégration terme à terme. La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, quand x tend vers 0, $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \ln x \underset{x \to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. On en déduit que f est intégrable sur $]0, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{\ln x}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}\ln x + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1 + x^2}.$$

Maintenant, chacune des fonctions $f_k : x \mapsto (-1)^k x^{2k} \ln x$, $0 \leqslant k \leqslant n$, est intégrable sur $]0,1]$ car continue sur $]0,1]$ et négligeable devant $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers 0. On en déduit encore que la fonction $g_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $g_n = f - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^{2k}\ln x\,dx + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\,dx.$$

La fonction $h : x \mapsto \dfrac{x\ln x}{1+x^2}\,dx$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0. On en déduit que la fonction h est bornée sur $]0,1]$. Soit M un majorant de la fonction $|h|$ sur $]0,1]$. Pour tout entier naturel n, on a alors

$$\left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\,dx\right| \leqslant \int_0^1 x^{2n}\left|\frac{x\ln x}{1+x^2}\right|\,dx \leqslant M\int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{M}{2n+1}.$$

En particulier, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\,dx = 0$. Ceci montre que la série numérique de terme général $(-1)^k\displaystyle\int_0^1 x^{2k}\ln x\,dx$, $k \in \mathbb{N}$, converge et que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \int_0^1 x^{2k}\ln x\,dx.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]0,1[$. Les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $x \mapsto \ln x$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_\varepsilon^1 x^{2n}\ln x\,dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln x\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2n+1}\int_\varepsilon^1 x^{2n}\,dx = -\frac{\varepsilon^{2n+1}}{2n+1}\ln\varepsilon - \frac{1}{(2n+1)^2}(1-\varepsilon^{2n+1}).$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}\ln x\,dx = -\frac{1}{(2n+1)^2}$. Par suite,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Vérifions maintenant l'intégrabilité de la fonction f sur $]0,+\infty[$. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ et on sait déjà que f est intégrable sur $]0,1]$. De plus, $x^{3/2}f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} 0$ et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$. Ceci montre que la fonction f est intégrable sur $[1,+\infty[$ et finalement sur $]0,+\infty[$.

Pour calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$, la méthode précédente ne marche plus du tout car pour $x > 1$, x^n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. C'est une toute autre idée qui permet d'aller au bout. On pose $u = \dfrac{1}{x}$ et on obtient

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}} \times \frac{-du}{u^2} = -\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\,du = -I,$$

et donc $I = 0$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} \text{ et } \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0.}$$

Exercice n° 8

1) Soit $x \in [0,1[$. Pour tout réel t de $[0,x]$, on a $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$. Maintenant, pour tout réel $t \in [0,x]$ et tout entier naturel n, on a $|t|^n \leqslant x^n$. Puisque la série numérique de terme général x^n converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto t^n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0,x]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut affirmer que

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$\boxed{\forall t \in [0,1[,\ -\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}.}$$

2) Par suite, pour $t \in]0,1[$,

$$\frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}\ln t}{n}.$$

Pour $t \in]0,1[$, posons $f(t) = \dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ puis pour $t \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(t) = -\dfrac{t^{n-1}\ln t}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $]0,1]$ et négligeable devant $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0. La fonction f_n est donc intégrable sur $]0,1]$. En particulier, la fonction f_n est intégrable sur $]0,1[$. Calculons alors $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

Soit $a \in]0,1[$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{t^n}{n}$ et $t \mapsto -\ln t$ sont de classe C^1 sur le segment $[a,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1}(-\ln t)\,dt = \left[-\frac{t^n \ln t}{n}\right]_a^1 + \frac{1}{n}\int_a^1 t^{n-1}\,dt = \frac{a^n \ln a}{n} + \frac{1}{n^2}(1-a^n).$$

Quand a tend vers 0, on obtient $\displaystyle\int_0^1 -t^{n-1}\ln t\,dt = \frac{1}{n^2}$ et donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{1}{n^3}$. Puisque la fonction f_n est positive sur $]0,1[$, on a encore $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \frac{1}{n^3}$. On en déduit que la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,dt$ converge.

En résumé,
- chaque fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$,
- la séries de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction f sur $]0,1[$ et la fonction f est continue sur $]0,1[$,
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)|\,dt < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n-1}\ln t}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.}$$

Exercice n° 9

Existence de l'intégrale. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}\,t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout réel positif t, $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{e^t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$$\text{Pour tout réel } x,\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}\,t}\,dt \text{ existe.}$$

Convergence de la série. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n(x) = \dfrac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x)-u_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}-\frac{2n+3}{(2n+3)^2+x^2}=\frac{(2n+1)((2n+3)^2+x^2)-(2n+3)((2n+1)^2+x^2)}{((2n+1)^2+x^2)((2n+3)^2+x^2)}$$
$$=\frac{2(2n+1)(2n+3)-2x^2}{((2n+1)^2+x^2)((2n+3)^2+x^2)}.$$

Puisque le numérateur de cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, cette expression est positive pour n grand. On en déduit que la suite $(u_n(x))$ décroît à partir d'un certain rang. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=0$. Mais alors, la série de terme général $(-1)^n u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Pour tout réel x, la série de terme général $(-1)^n\dfrac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$ converge.

Egalité de l'intégrale et de la somme de la série. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $t\in[0,+\infty[$,

$$\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}=\frac{2\cos(xt)e^{-t}}{1+e^{-2t}}=2\cos(xt)e^{-t}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-2kt}+(-1)^{n+1}\cos(xt)e^{-t}\frac{e^{-(2n+2)t}}{1+e^{-2t}}$$
$$=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(xt)e^{-(2k+1)t}+(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}.$$

Maintenant, pour chaque $k\in\mathbb{N}$, la fonction $t\mapsto\cos(xt)e^{-(2k+1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit encore que la fonction $t\mapsto(-1)^{n+1}\dfrac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ en tant que combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $]0,+\infty[$ puis que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-(2k+1)t}\,dt+(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt.$$

Ensuite, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt\right|\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{|\cos(xt)|}{1+e^{-2t}}e^{-(2n+3)t}\,dt\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-(2n+3)t}\,dt=\frac{1}{2n+3}$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt=0$ puis

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt=2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-(2n+1)t}\,dt.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-(2n+1)t}\,dt=\operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{ixt}e^{-(2n+1)t}\,dt\right)=\operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(2n+1)+ix)t}\,dt\right)$$
$$=\operatorname{Re}\left(\left[\frac{e^{(-(2n+1)+ix)t}}{-(2n+1)+ix}\right]_0^{+\infty}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(2n+1)-ix}\left(1-\lim_{t\to+\infty}e^{(-(2n+1)+ix)t}\right)\right)$$
$$=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(2n+1)-ix}\right)\ \left(\text{car }\left|e^{(-(2n+1)+ix)t}\right|=e^{-(2n+1)t}\underset{t\to+\infty}{\to}0\right)$$
$$=\operatorname{Re}\left(\frac{2n+1+ix}{(2n+1)^2+x^2}\right)=\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}.$$

On a enfin montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt=2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}.}$$