Planche n° 13. Suites et séries d'intégrales

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (* I)** (Un calcul de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.)

1) (première méthode : « à la main ») Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0,n] \\ 0 \text{ si } x \geqslant n \end{cases}$. Pour tout réel positif x, on pose $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Montrer que pour tout réel positif x, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{ne}$.

b) A l'aide de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, calculer l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

2) (deuxième méthode : « avec le théorème de convergence dominée ») Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0,\sqrt{n}] \\ 0 \text{ si } x > \sqrt{n} \end{cases}$.

a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x^2}$.

b) A l'aide du théorème de convergence dominée, calculer l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Exercice n° 2 (I) :**

En utilisant un développement de $\dfrac{1}{1-t}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt$.

Exercice n° 3 (I) :**

Montrer que pour tout réel $a > 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^a}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}$.

Exercice n° 4 (**) :

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ et $\displaystyle\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$.

Exercice n° 5 (**) :

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice n° 6 (**) :

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,dx$ en écrivant cette intégrale comme somme d'une série.

Exercice n° 7 (**) :

Exprimer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ comme la somme d'une série. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$.

Exercice n° 8 (**) :

1) Montrer que pour x réel de $[0,1[$, $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice n° 9 (* I) :**

Montrer que pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\ dt = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$.