Chapitre 13. Suites réelles. Suites complexes

Plan du chapitre

1 Généralités sur les suites réelles ou complexes

1.1 Définitions

DÉFINITION 1. Une **suite réelle** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des suites réelles se note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Une **suite complexe** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. L'ensemble des suites réelles se note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

• Une suite peut se noter $u\ :\ n \mapsto u(n)$ ou $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $u = (u_n)$ ou plus simplement u mais pas u_n.
u_n est le n-ème **terme** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
• Il faut bien différencier les **termes** d'une suite et les **valeurs** d'une suite. Par exemple, la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une infinité de termes $(u_0, u_1, u_2, \dots)$ mais la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend que deux valeurs à savoir 1 et -1.
• Une suite réelle (resp. complexe) est en fait plus généralement une application d'une partie infinie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Par exemple, $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $\left(1/\sqrt{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\right)_{n\in(4\mathbb{N}+1)}$ sont des suites réelles.
Quand chaque u_n existe pour n supérieur ou égal à un certain entier n_0, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **définie à partir d'un certain rang**. Par exemple, la suite $\left(\sqrt{n^2-n-6}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir du rang 3.

Sur l'ensemble des suites (réelles ou complexes), on peut définir trois opérations :

- **Somme de deux suites** : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites, on pose

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

- **Multiplication d'une suite par un nombre** : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite et λ est un nombre, on pose

$$\lambda\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

- **Produit de deux suites** : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites, on pose

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Théorème 1. $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\times\right)$ et $\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}},+,\times\right)$ sont des anneaux commutatifs (voir chapitre « Structures »).

DÉMONSTRATION . Les différentes vérifications à effectuer sont fastidieuses mais simples. On vérifie aisément que

$+$ est une loi interne dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $+$ est commutative, $+$ est associative, possède un élément neutre à savoir la suite nulle $0 = (0)_{n\in\mathbb{N}}$, et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un opposé à savoir la suite $-(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\times$ est une loi interne dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\times$ est commutative, $\times$ est associative, possède un élément neutre à savoir la suite constante $1 = (1)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\times$ est distributive sur $+$.

❑

⇨ **Commentaire** .
◇ *Les éléments inversibles de l'anneau* $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\times\right)$ *où* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, sont les suites ne s'annulant pas : si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite ne s'annulant pas, alors l'inverse de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite* $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

◇ *Dans* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*, un produit de deux suites peut être nul sans qu'aucune des deux suites ne soit nulle :*

$$u\times v = 0 \not\Rightarrow u = 0 \text{ ou } v = 0.$$

Par exemple, pour $n\in\mathbb{N}$*, posons* $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ *et* $v_n = \sin\left(\dfrac{(n+1)\pi}{2}\right)$*. Pour tout entier naturel* n*, on a* $u_{2n} = 0$ *et* $v_{2n+1} = 0$ *et donc, pour tout entier naturel* n*, on a* $u_nv_n = 0$*. Mais,* $u_1 = 1$ *et donc* $u\neq 0$ *puis* $v_0 = 1$ *et donc* $v\neq 0$.

Une suite peut être définie de plusieurs manières :
- Explicitement : on donne explicitement u_n en fonction de n. Par exemple, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{2^n}{n+1}.$$

- implicitement. Par exemple, pour $n\in\mathbb{N}$, soit x_n l'unique solution dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi, \dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$ de l'équation $\tan(x) = x$
- par récurrence. Par exemple, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n+3$ ou aussi soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1}+v_n$

1.2 Suites majorées, minorées, bornées

DÉFINITION 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle**.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$. Un tel réel M s'appelle alors un **majorant** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$. Un tel réel m s'appelle alors un **minorant** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** $\Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et minorée $\Leftrightarrow \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2/\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$.

On rappelle que l'ordre des quantificateurs : $\exists M \in \mathbb{R}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ \dots$ a pour conséquence le fait que le réel M ne varie pas quand n varie. Quand on écrit une majoration du type : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n$, on n'a pas majoré la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sens de la définition précédente ou encore, on n'a pas montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Théorème 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

DÉMONSTRATION .

• Supposons la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée. Il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-M \leqslant u_n \leqslant M$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

• Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée. Il existe deux réels m et M tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$-\mathrm{Max}\{|m|, |M|\} \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant u_n \leqslant M \leqslant |M| \leqslant \mathrm{Max}\{|m|, |M|\}$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \mathrm{Max}\{|m|, |M|\}$. On en déduit que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

❏

Le théorème précédent fournit une démarche utilisée fréquemment dans la pratique : si on veut montrer qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la plus part du temps, on se lance en écrivant $|u_n| \leqslant \dots$ et non pas en écrivant $\dots \leqslant u_n \leqslant \dots$

Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{2n-3}{n+2}$. Alors, pour tout entier naturel n,

$$|u_n| = \frac{|2n-3|}{n+2} \leqslant \frac{|2n| + |-3|}{n+2} = \frac{2n+3}{n+2} \leqslant \frac{2n+4}{n+2} = 2$$

et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

DÉFINITION 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **complexe**.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ou encore
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$.

Par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{e^{in\pi/3}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car, pour tout entier naturel n,

$$\left|\frac{e^{in\pi/3}}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{1+0} = 1.$$

Théorème 3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes bornées. Alors

1) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, la suite $\lambda (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (une combinaison linéaire de suites bornées est une suite bornée).

2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (un produit de suites bornées est une suite bornée).

DÉMONSTRATION . Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes bornées. Il existe deux réels M et M' tels que pour tout entier naturel n, $|u_n| \leqslant M$ et $|v_n| \leqslant M'$.

1) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout entier naturel n,

$$|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n| \leqslant |\lambda| M + |\mu| M'.$$

La suite $\lambda (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

2) Pour tout entier naturel n,

$$|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant M M'.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

❏

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2) Montrer que si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement bornée.

Solution 1.

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée. Il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $|u_n| \leqslant M$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|v_n| = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} M = \frac{1}{n+1}\times(n+1)M = M.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leqslant M$ et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2) Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, -0, 1, -1, 2, -2, \dots)$ ou encore, pour $p \in \mathbb{N}$, posons $u_{2p} = p$ et $u_{2p+1} = -p$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$|v_{2p}| = \frac{1}{2p+1}(0 - 0 + 1 - 1 + \dots + (p-1) - (p-1) + p) = \frac{p}{2p+1} \leqslant \frac{p+\frac{1}{2}}{2p+1} = \frac{1}{2}$$

$$|v_{2p+1}| = \frac{1}{2p+2}(0 - 0 + 1 - 1 + \dots + (p-1) - (p-1) + p - p) = 0 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leqslant \frac{1}{2}$ et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On a ainsi fourni une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée bien que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne le soit pas.

1.3 Sens de variation d'une suite réelle

1.3.1 Définitions

DÉFINITION 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle**.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante à partir d'un certain rang** $\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante à partir d'un certain rang** $\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} > u_n$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante à partir d'un certain rang** $\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \leqslant u_n$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante à partir d'un certain rang** $\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} < u_n$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** (ou **stationnaire**) $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et décroissante.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** $\Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n)$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement monotone** $\Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante
$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n)$.

On a immédiatement par récurrence :

- si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_0$.
- si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_0$.
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$.

On rappelle que la définition avec quantificateurs d'une suite monotone n'est absolument pas
$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$ ou $u_{n+1} \leqslant u_n)$, car ce qui précède est vérifiée par toute suite réelle, même non monotone (voir chapitre « Logique »).

1.3.2 Sens de variation et opérations

Théorème 4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1) a) Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes (resp. décroissantes), la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).

b) Si l'une des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) et l'autre est strictement croissante (resp. strictement décroissante), la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

2) a) Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes (resp. décroissantes) et positives, la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).

b) Si l'une des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) et l'autre est strictement croissante (resp. strictement décroissante) et si les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positives, la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Démonstration .

1) a) Supposons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient croissantes. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors, $u_n\leqslant u_{n+1}$ et $v_n\leqslant v_{n+1}$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $u_n+v_n\leqslant u_{n+1}+v_{n+1}$.
On a montré que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n+v_n\leqslant u_{n+1}+v_{n+1}$. La suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

La démarche est analogue pour des suites décroissantes.

b) Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit strictement croissante. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors, $u_n\leqslant u_{n+1}$ et $v_n<v_{n+1}$. En additionnant membre à membre, on obtient $u_n+v_n<u_{n+1}+v_{n+1}$.
On a montré que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n+v_n<u_{n+1}+v_{n+1}$. La suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

La démarche est analogue pour des suites décroissantes.

2) a) Supposons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient croissantes et positives. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}$ et $0\leqslant v_n\leqslant v_{n+1}$. En multipliant membre à membre ces inégalités entre réels positifs, on obtient $u_nv_n\leqslant u_{n+1}v_{n+1}$.
On a montré que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_nv_n\leqslant u_{n+1}v_{n+1}$. La suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

La démarche est analogue pour des suites décroissantes.

b) Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante et strictement positive et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit strictement croissante et strictement positive. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors, $0<u_n\leqslant u_{n+1}$ et $0<v_n<v_{n+1}$. En multipliant membre à membre, on obtient $u_nv_n<u_{n+1}v_{n+1}$.
On a montré que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_nv_n<u_{n+1}v_{n+1}$. La suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

La démarche est analogue pour des suites décroissantes.

❑

1.3.3 Techniques usuelles pour étudier le sens de variation d'une suite réelle

Technique 1 : majoration ou minoration directe.

La technique consiste à comparer directement u_n et u_{n+1}. Par exemple, si, pour $n\in\mathbb{N}$ donné, on multiplie les deux membres de l'inégalité $1<2$ par le réel strictement positif 2^n, on obtient $2^n<2^{n+1}$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^n<2^{n+1}$ et donc la suite géométrique $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Technique 2 : étude du signe de $u_{n+1}-u_n$.

La technique consiste à étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$ pour pouvoir ensuite comparer u_n et u_{n+1}. On a les résultats immédiats suivants :

- Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n>0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n<0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone si et seulement si la suite $(\mathrm{sgn}\,(u_{n+1}-u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante (on rappelle que le signe d'un réel x est 1 si $x>0$, -1 si $x<0$ et 0 si $x=0$).

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n existe et $0\leqslant u_n<3$.
2) Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution 2.

1) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, u_n existe et $0\leqslant u_n<3$.

- C'est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n existe et $0 \leqslant u_n < 3$. Tout d'abord $u_n + 6 \geqslant 0$ et donc u_{n+1} existe. Ensuite,

$$0 \leqslant u_n < 3 \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{u_n + 6} < \sqrt{3+6} \Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} < 3.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(u_{n+1} - u_n) &= \operatorname{sgn}\left(\sqrt{u_n+6} - u_n\right) = \operatorname{sgn}\left(\sqrt{u_n+6}^2 - u_n^2\right) = \operatorname{sgn}\left(-u_n^2 + u_n + 6\right) \\ &= \operatorname{sgn}\left((u_n+2)(-u_n+3)\right) = \operatorname{sgn}(-u_n+3) \text{ (car } u_n + 2 > 0).\end{aligned}$$

D'après la question 1), $3 - u_n > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Solution 3. Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left((n+1)\sum_{k=0}^{n+1} u_k - (n+2)\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left((n+1)u_{n+1} + (n+1)\sum_{k=0}^{n} u_k - (n+2)\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left((n+1)u_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{n} u_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(u_{n+1} - u_k).\end{aligned}$$

Maintenant, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $u_{n+1} - u_k \geqslant 0$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_{n+1} - u_k) \geqslant 0$ puis $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$.

On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geqslant v_n$ et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Technique 3 : étude de la position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 pour des suites strictement positives.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}\right) = \operatorname{sgn}(u_{n+1} - u_n).$$

On utilisera alors de préférence le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ plutôt que la différence $u_{n+1} - u_n$ si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par de nombreux produits.

Exercice 4. Etudier les variations de la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

Solution 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n \neq 0$ puis

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2 2^{2n+2}} \times \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} = \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \times \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \\ &< \frac{2n+2}{2n+2} = 1.\end{aligned}$$

On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ou encore que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ (car $u_n > 0$) et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Technique 4 : si $u_n = f(n)$, étude des variations de f.

On suppose que f est une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = f(n)$. On a le résultat immédiat suivant :

si la fonction f est croissante (resp. décroissante, strictement croissante ...),
alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante, strictement croissante ...).

En effet, si par exemple f est croissante sur $[0, +\infty[$, alors $\forall (a, b) \in [0, +\infty[^2$, $(a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$. Si maintenant n est un entier naturel, alors les réels $a = n$ et $b = n+1$ sont des réels positifs tels que $a \leqslant b$. On en déduit que $f(n) \leqslant f(n+1)$ ou encore $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$, et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+3n+2}$. Pour étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dispose de deux techniques :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2+3(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n^2+3n+2} = \frac{2n+3}{n^2+5n+6} - \frac{2n+1}{n^2+3n+2} \\
&= \frac{(2n+3)\left(n^2+3n+2\right) - (2n+1)\left(n^2+5n+6\right)}{(n^2+3n+2)(n^2+5n+6)} \\
&= \frac{-2n^2-4n}{(n^2+3n+2)(n^2+5n+6)} \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2) Pour x réel positif, posons $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3x+2}$. f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2\left(x^2+3x+2\right) - (2x+1)(2x+3)}{\left(x^2+3x+2\right)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+3x+1\right)^2} \\
&= \frac{-2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2}}{\left(x^2+3x+1\right)^2}.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est négative sur $\left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}, +\infty\right[$ et en particulier sur $[1, +\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $[1, +\infty[$. En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1. Puisque d'autre part, $u_1 = \dfrac{1}{2} = u_0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

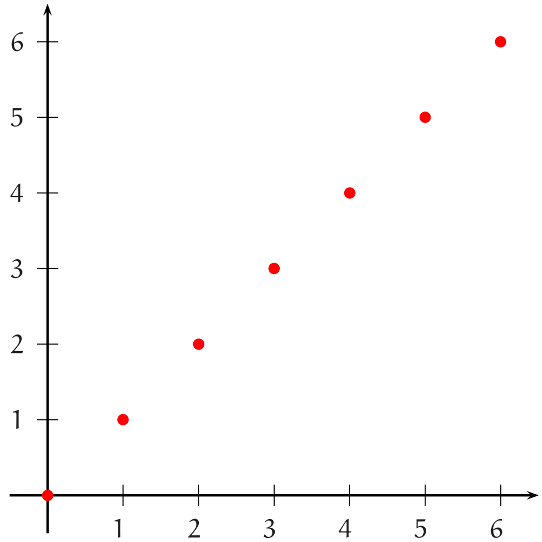
Ainsi, pour étudier les variations d'une suite, on a dérivé une fonction. A ce sujet, attention :

on ne dérive pas une suite.

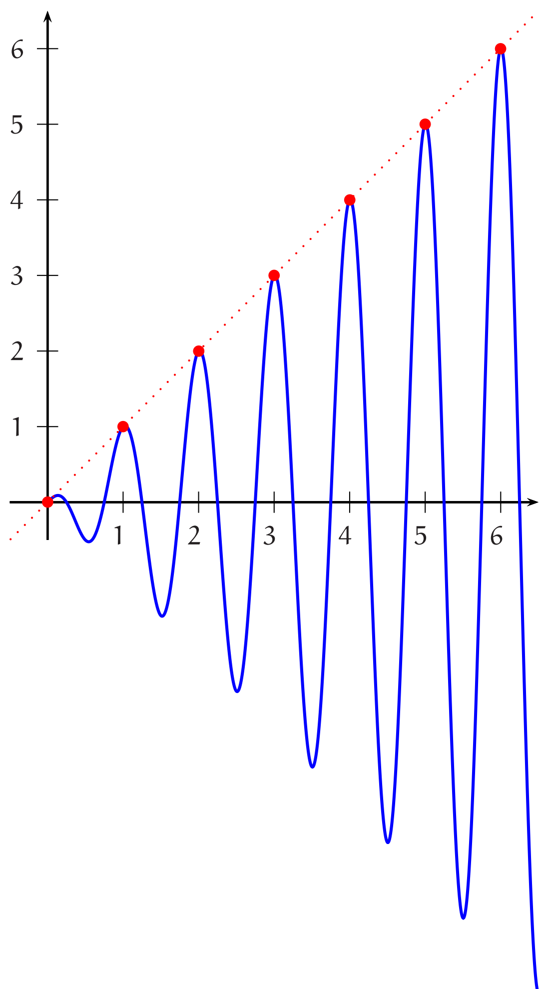
Dans ce qui précède, une autre erreur classique est sous-jacente. Plus haut, on a dit que : f croissante sur $[0, +\infty[\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Par contre,

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ croissante } \not\Rightarrow f \textbf{ croissante sur } [0, +\infty[.$$

Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Voici sa représentation graphique :



Il se trouve que si pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = x\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi x\right)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$:



La fonction f n'est pas du tout monotone sur $[0, +\infty[$ bien que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante.

1.4 Suites périodiques

Définition 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p-périodique si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$.
2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique si et seulement si $\exists p \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$.

⇨ **Commentaire** .

◇ *Toute suite, même non périodique, est* 0*-périodique.*

◇ *Les suites* 1*-périodiques sont les suites constantes.*

◇ *Si* p *est période d'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, alors pour tout* $q \in \mathbb{N}$, qp *est période de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples. La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est 2-périodique et la suite $\left((-j)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est 6-périodique. La suite des décimales de $\dfrac{3}{11}$ est 2-périodique. ❏

2 Convergence des suites

2.1 Suites convergentes. Suites divergentes

Définition 6.

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (resp. complexe) et soit ℓ un nombre réel (resp. complexe).

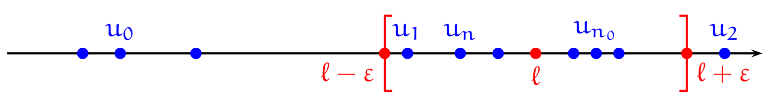
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers le nombre ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

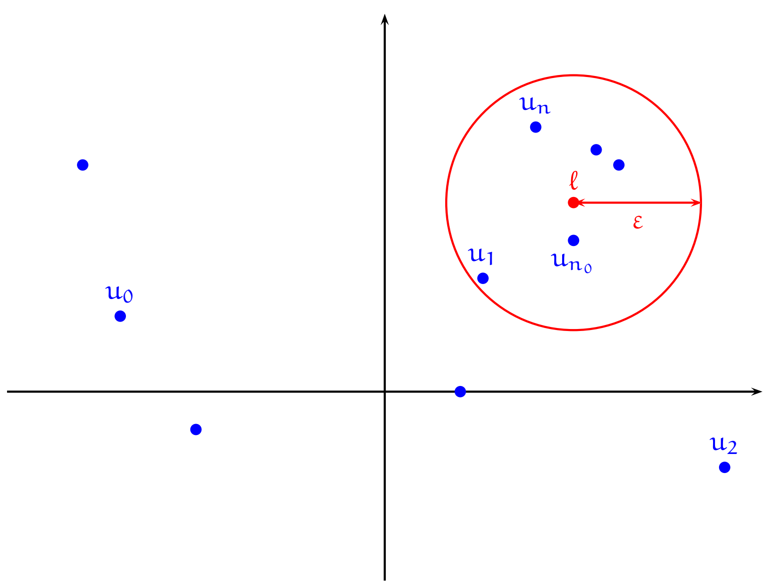
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (resp. complexe).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** si et seulement si il existe un nombre réel (resp. complexe) ℓ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre ℓ. Dans le cas contraire, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **divergente**.

Dans le cas d'une suite réelle, la définition précédente se visualise de la façon suivante : $\varepsilon > 0$ étant donné, les termes de la suite u appartiennent à l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ à partir d'un certain rang n_0 (et peut-être même avant).



Dans le cas d'une suite complexe, la définition précédente se visualise de la façon suivante : $\varepsilon > 0$ étant donné, les termes de la suite u appartiennent au disque fermé de centre ℓ et de rayon ε à partir d'un certain rang n_0 (et peut-être même avant).



Dans la définition précédente, on a utilisé une inégalité large ($|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$). On aurait tout autant pu utiliser une inégalité stricte comme le prouve le théorème suivant :

Théorème 5. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (resp. complexe) et soit ℓ un nombre réel (resp. complexe).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers le nombre ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Démonstration .

• Supposons que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et en particulier, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$.

• Supposons que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\dfrac{\varepsilon}{2}$ est un réel strictement positif. Il existe donc un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on a $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$.

❑

Théorème 6 (unicité de la limite). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre ℓ alors ℓ est unique ou encore, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers les nombres ℓ et ℓ', alors $\ell = \ell'$.

Démonstration . Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers les nombres ℓ et ℓ'.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_1 tel que pour tout entier naturel n supérieur à n_1, $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et il existe un rang n_2 tel que pour tout entier naturel n supérieur à n_2, $|u_n - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (d'après le théorème 5).
Soit n_0 le plus grand des deux entiers n_1 et n_2. n_0 est un entier supérieur ou égal à n_1 et aussi un entier supérieur ou égal à n_2. On a donc

$$\left|\ell - \ell'\right| = \left|(\ell - u_{n_0}) + \left(u_{n_0} - \ell'\right)\right| \leqslant |\ell - u_{n_0}| + \left|u_{n_0} - \ell'\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $|\ell - \ell'| < \varepsilon$. Par suite, $|\ell - \ell'|$ est un réel positif qui est strictement inférieur à tout réel strictement positif. En particulier, $|\ell - \ell'|$ est un réel positif qui est différent de tout réel strictement positif. Il ne reste que $|\ell - \ell'| = 0$ ou encore $\ell = \ell'$.

❑

⇨ **Commentaire** . *L'unicité de la limite (en cas d'existence) aura des conséquences pratiques. Par exemple, il ne faudra pas dire que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et -1 car une suite ne peut avoir deux limites distinctes.*

Ainsi, une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a exactement une limite. On note cette limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou plus simplement $\lim u$. Quand $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, on peut aussi écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$ (et on lit : u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$). Attention, l'écriture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$ n'a aucun sens (ce n'est pas la limite qui tend vers quelque chose mais c'est u_n qui tend vers sa limite).

On doit remarquer que la limite d'une suite convergente u est un nombre associé à cette suite u. Ce n'est donc absolument pas une fonction de n. Dit autrement, dans la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, la variable n est **muette** et on peut la remplacer par une autre lettre sans changer la valeur du résultat :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty} u_p.$$

Ainsi, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **n'est pas une fonction de** n et donc, des calculs du genre, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 1^n = 1$ (en fait, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$) ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = \dfrac{2n}{n} = 2$, sont **totalement faux** (même s'il est exact que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = 2$). De même, la phrase « $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ » n'a aucun sens.

Exercice 5. Montrer en revenant à la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+3}{n+1} = 2$.

Solution 5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|u_n - 2| = \left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} |u_n - 2| \leqslant \varepsilon \Leftarrow \frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon \Leftarrow n+1 \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \\ \Leftarrow n \geqslant \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Soit $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$. n_0 est un entier naturel tel que pour tout entier naturel n, $n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - 2| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - 2| \leqslant \varepsilon)$. Donc, la suite $\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain complexe ℓ, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ.
2) Montrer que la réciproque est fausse.

Solution 6.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \geqslant n_1 + 1$.

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \left|\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - \ell\right| = \left|\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \ell\right)\right| = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k - \ell| = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_1}|u_k - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_1+1}^{n}|u_k - \ell| \\ &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_1}|u_k - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_1+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_1}|u_k - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_1}|u_k - \ell|. \end{aligned}$$

Maintenant, l'expression $\sum\limits_{k=0}^{n_1}|u_k - \ell|$ est constante quand n varie et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n_1}|u_k - \ell| = 0$. On en déduit qu'il existe un rang n_2 tel que pour $n \geqslant n_2$, $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n_1}|u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n_0 = \text{Max}\{n_1 + 1, n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_1}|u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$. Donc, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = (-1)^n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente (nous l'admettons pour le moment en attendant des notions et des résultats qui arriveront en fin de chapitre). Vérifions alors que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est impair, $v_n = \dfrac{1}{n+1}(1-1+1-1+\ldots+1-1) = 0$ et si n est pair, $v_n = \dfrac{1}{n+1}(1-1+1-1+\ldots+1-1+1) = \dfrac{1}{n+1}$. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

D'après le théorème des gendarmes (théorème énoncé en terminale et qui sera énoncé et démontré plus loin), $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Donc, il est possible que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Théorème 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Démonstration . Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (resp. complexe) convergeant vers un certain réel (resp. complexe) ℓ.

Le réel $\varepsilon = 1$ est un réel strictement positif. Il existe donc un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 1$. Soit $n \geqslant n_0$.

$$|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant 1 + |\ell|$. Soit alors $M = \text{Max}\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0}|, 1 + |\ell|\}$ (M existe dans $[0, +\infty[$ car l'ensemble $\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0}|, 1 + |\ell|\}$ est fini). M est supérieur ou égal à chacun des réels $|u_0|$, $|u_1|, \ldots$, $|u_{n_0}|$ et donc pour tout $n \leqslant n_0$, $|u_n| \leqslant M$. D'autre part, si $n > n_0$, $|u_n| \leqslant 1 + |\ell| \leqslant M$.

On a montré que : $\exists M \in \mathbb{R}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

❑

Théorème 8. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et ℓ un nombre complexe.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, **alors** la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.

Démonstration . Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Soit $n \geqslant n_0$.

$$||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow ||u_n| - |\ell|| \leqslant \varepsilon)$. Donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.

❑

⇨ **Commentaire** . *La réciproque du résultat précédent est bien sûr fausse. Par exemple, la suite* $(|(-1)^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $|1|$ *mais la suite* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Sinon, on a le résultat immédiat suivant.

Théorème 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et ℓ un nombre complexe.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si la suite $(|u_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Ce dernier résultat est très utilisé dans la pratique. On veut montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre ℓ. On s'intéresse immédiatement à $|u_n - \ell|$ ...

2.2 Suites réelles de limite infinie

Définition 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si

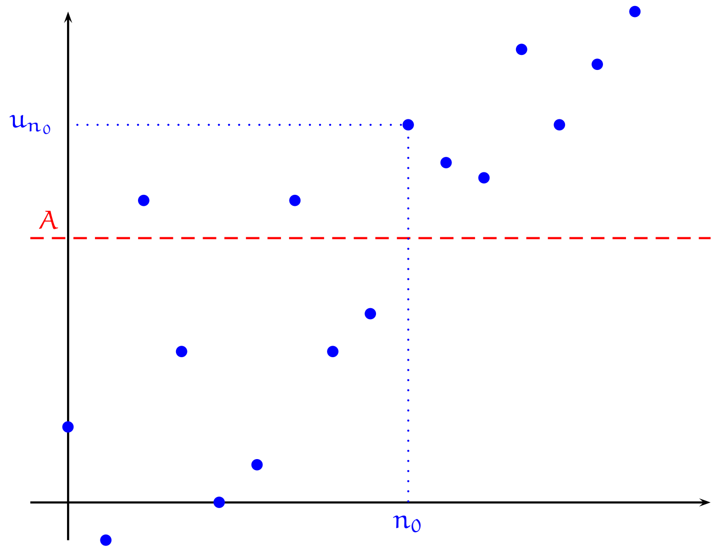
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A).$$

On dit que u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant B).$$

⇨ **Commentaire** . *Il est clair qu'une suite réelle de limite infinie n'est pas bornée et en particulier est divergente.*

Graphiquement, dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ signifie que, pour tout réel A, les points de coordonnées (n, u_n) sont tous au-dessus de la droite d'équation $y = A$ à partir d'un certain rang, dépendant de A :



Exercice 7. Montrer en revenant à la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5n^2-3n+4\right)=+\infty$.

Solution 7. Pour tout entier naturel n (y compris $n = 0$), $5n^2-3n+4 \geqslant 5n^2-3n^2+0 = 2n^2$.

Soit alors A un réel.

$$5n^2-3n+4 \geqslant A \Leftarrow 2n^2 \geqslant A \Leftarrow 2n^2 \geqslant |A| \Leftarrow n \geqslant \frac{\sqrt{|A|}}{2}$$
$$\Leftarrow n \geqslant \left\lfloor \frac{\sqrt{|A|}}{2} \right\rfloor + 1.$$

Soit $n_0 = \left\lfloor \frac{\sqrt{|A|}}{2} \right\rfloor + 1$. n_0 est un entier naturel tel que, pour $n \geqslant n_0$, $5n^2-3n+4 \geqslant A$.

On a montré que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow 5n^2-3n+4 \geqslant A\right)$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5n^2-3n+4\right)=+\infty$.

⇨ **Commentaire** . *On aurait aussi pu résoudre directement l'inéquation* $5n^2-3n+4 \geqslant A$. *Si* $A \geqslant \frac{71}{20}$ *:*

$$5n^2-3n+4 \geqslant A \Leftrightarrow 5n^2-3n+4-A \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{3+\sqrt{20A-71}}{10},$$

et si $A < \frac{71}{20}$, *pour tout entier naturel* n, *on a* $5n^2-3n+4 \geqslant A$. *Cette solution n'est ni meilleure, ni moins bonne que celle proposée en solution. Ici, l'inéquation « a été résolue par équivalence »* ($5n^2-3n+4 \geqslant A \Leftrightarrow n \geqslant \frac{3+\sqrt{20A-71}}{10}$) *et ceci pourrait avoir un intérêt par exemple si l'on cherchait le plus petit entier* n_0 *à partir duquel on a* $5n^2-3n+4 \geqslant A$.
Dans la solution, nous avons commencé par minorer la suite $\left(5n^2-3n+4\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *par la suite* $\left(2n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$, *beaucoup plus simple puis nous avons imposé à un terme de cette suite minorante d'être supérieur à* A. *L'inéquation à résoudre est beaucoup plus simple mais on n'obtient pas forcément le plus petit rang à partir duquel on a* $5n^2-3n+4 \geqslant A$. *On a obtenu* ***un rang*** *(*$n_0 = \left\lfloor \frac{\sqrt{|A|}}{2} \right\rfloor + 1$*)* ***à partir duquel on est sûr*** *que* $5n^2-3n+4 \geqslant A$.

Exercice 8. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle. Enoncer avec des quantificateurs les phrases suivantes :

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$.
2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers le réel ℓ.
4) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Solution 8.

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$ si et seulement si $\exists A \in \mathbb{R}/\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}/\ (n \geqslant n_0$ et $u_n < A)$.

2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée si et seulement si $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}/\ u_n > M$.

3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers ℓ si et seulement si $\exists \varepsilon > 0/\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}/\ (n \geqslant n_0$ et $|u_n - \ell| > \varepsilon)$.

4) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente si et seulement si $\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0/\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}/\ (n \geqslant n_0$ et $|u_n - \ell| > \varepsilon)$.

2.3 Quelques limites de référence

On donne ici quelques limites de suites usuelles avant de donner au paragraphe suivant les différents résultats sur les opérations sur les limites.

Théorème 10.

1) Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $q \leqslant -1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

2) Soit $q \in \mathbb{C}$.

- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Dans tous les autres cas, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Démonstration .

1) Soit $q \in \mathbb{R}$.

• Supposons $-1 < q < 1$. Si $q = 0$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 0, 0, \dots)$ est nulle à partir du rang 1 et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Sinon $q \in]-1, 0[\cup]0, 1[$ puis $|q| \in]0, 1[$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier naturel n (en tenant compte de $\ln(|q|) < 0$),

$$\begin{aligned}|q^n| \leqslant \varepsilon &\Leftarrow e^{n\ln(|q|)} \leqslant \varepsilon \Leftarrow n\ln(|q|) \leqslant \ln(\varepsilon) \Leftarrow n \geqslant \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)} \Leftarrow n \geqslant \left|\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}\right| \\ &\Leftarrow n \geqslant \left\lfloor\left|\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}\right|\right\rfloor + 1.\end{aligned}$$

Posons $n_0 = \left\lfloor\left|\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}\right|\right\rfloor + 1$. n_0 est un entier naturel tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|q^n| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |q^n - 0| \leqslant \varepsilon)$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

• Supposons $q > 1$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}q^n \geqslant A &\Leftarrow e^{n\ln(q)} \geqslant |A| + 1 \Leftarrow n\ln(q) \geqslant \ln(|A| + 1) \Leftarrow n \geqslant \frac{\ln(|A| + 1)}{\ln(q)} \\ &\Leftarrow n \geqslant \left\lfloor\frac{\ln(|A| + 1)}{\ln(q)}\right\rfloor + 1.\end{aligned}$$

Posons $n_0 = \left\lfloor\frac{\ln(|A| + 1)}{\ln(q)}\right\rfloor + 1$. n_0 est un entier naturel tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $q^n \geqslant A$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow q^n \geqslant A)$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

• Si $q = 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en particulier immédiatement convergente de limite 1.

• Supposons maintenant $q \leqslant -1$. Donc, pour tout entier naturel n,

$$\left|q^{n+1} - q^n\right| = |q|^n|q - 1| \geqslant 1^n \times 2 = 2.$$

Supposons par l'absurde que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$, il existe alors un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $|q^n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$\left|q^{n+1} - q^n\right| = \left|\left(q^{n+1} - \ell\right) + (\ell - q^n)\right| \leqslant \left|q^{n+1} - \ell\right| + |\ell - q^n| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ceci contredit le fait que pour tout entier naturel n, $\left|q^{n+1} - q^n\right| \geqslant 2$. Il était donc absurde de supposer la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. On a montré que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

2) On suppose maintenant que q est un nombre complexe.

• Si $|q| < 1$, alors la suite $(|q^n|)_{n\in\mathbb{N}} = (|q|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après l'étude du cas où q est réel. On en déduit que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après le théorème 9, page 12.

• Si $|q| > 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et donc la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

• Le cas où $q = 1$ a déjà été traité.

• Il reste le cas où $q \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Posons $q = e^{i\theta}$ où $\theta \in]0, 2\pi[$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|e^{i(n+1)\theta} - e^{in\theta}\right| = \left|e^{i(2n+1)\theta/2}\right| \times \left|e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}\right| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \text{ (car } \frac{\theta}{2} \in]0, \pi[).$$

Comme plus haut, si par l'absurde la suite $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, l'expression $\left|e^{i(n+1)\theta} - e^{in\theta}\right|$ doit être petite pour n grand ce qui n'est pas. Donc, la suite $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

❑

Théorème 11. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
• Si $\alpha < 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.
• Si $\alpha = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 1$.
• Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$.

Démonstration .

• Soit $\alpha < 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}|n^\alpha| \leqslant \varepsilon &\Leftarrow n^\alpha \leqslant \varepsilon \Leftarrow n \geqslant \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \text{ (par décroissance de la fonction } x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}} \text{ sur }]0, +\infty[)\\ &\Leftarrow n \geqslant \left\lfloor \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \right\rfloor + 1.\end{aligned}$$

Soit $n_0 = \left\lfloor \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \right\rfloor + 1$. n_0 est un entier naturel tel que pour $n \geqslant n_0$, on a $|n^\alpha| \leqslant \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} /\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |n^\alpha - 0| \leqslant \varepsilon)$$

et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.

• Soit $\alpha > 0$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}n^\alpha \geqslant A &\Leftarrow n^\alpha \leqslant |A| \Leftarrow n \geqslant |A|^{\frac{1}{\alpha}} \text{ (par croissance de la fonction } x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}} \text{ sur } [0, +\infty[)\\ &\Leftarrow n \geqslant \left\lfloor |A|^{\frac{1}{\alpha}} \right\rfloor + 1.\end{aligned}$$

Soit $n_0 = \left\lfloor |A|^{\frac{1}{\alpha}} \right\rfloor + 1$. n_0 est un entier naturel tel que pour $n \geqslant n_0$, on a $n^\alpha \geqslant A$. On a montré que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} /\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow n^\alpha \geqslant A)$$

et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$. ❑

2.4 Opérations sur les limites

2.4.1 Combinaisons linéaires

Théorème 12. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes et λ et μ deux nombres complexes. Soient ℓ et ℓ' deux nombres complexes.

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ et ℓ' respectivement, **alors** la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$.

Démonstration . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)}$ et il existe un rang n_2 tel que pour $n \geqslant n_2$, $|v_n - \ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)}$.

Soit $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$\begin{aligned}
\left|(\lambda u_n + \mu v_n) - \left(\lambda\ell + \mu\ell'\right)\right| &= \left|\lambda\left(u_n - \ell\right) + \mu\left(v_n - \ell'\right)\right| \\
&\leqslant |\lambda|\,|u_n - \ell| + |\mu|\left|v_n - \ell'\right| \leqslant |\lambda|\frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)} + |\mu|\frac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)} \\
&\leqslant (|\lambda|+1)\frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)} + (|\mu|+1)\frac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a montré que $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda\ell + \mu\ell')| \leqslant \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\ell + \mu\ell'$.

❏

Théorème 13. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1) a) Si l'une des deux suites tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et l'autre est bornée, **alors** la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

b) Si l'une des deux suites tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et l'autre converge, **alors** la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

2) Si les deux suites tendent vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), **alors** la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration .

1) a) Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, $|v_n| \leqslant M$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A + M$. Pour $n \geqslant n_0$, on a alors

$$u_n + v_n \geqslant A + M - M = A.$$

On a montré que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n + v_n \geqslant A)$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$. La démonstration est analogue si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b) Une suite convergente est bornée et donc le b) est une conséquence du a).

2) Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant \dfrac{A}{2}$ et il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_2$, $v_n \geqslant \dfrac{A}{2}$.

Soit $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$,

$$u_n + v_n \geqslant \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A.$$

On a montré que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n + v_n \geqslant A)$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$. La démonstration est analogue si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

❏

Sinon, on a immédiatement

Théorème 14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et λ un réel.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \begin{cases} -\infty \text{ si } \lambda < 0 \\ 0 \text{ si } \lambda = 0 \\ +\infty \text{ si } \lambda > 0 \end{cases}$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda < 0 \\ 0 \text{ si } \lambda = 0 \\ -\infty \text{ si } \lambda > 0 \end{cases}$.

On peut résumer la plupart des résultats précédents dans le tableau suivant :

u_n tend vers	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
v_n tend vers	ℓ'	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$u_n + v_n$ tend vers	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Le tableau ci-dessus comporte un ?. Cela signifie que si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, tout est possible concernant $u_n + v_n$. $(+\infty) + (-\infty)$ est une **forme indéterminée** qui sera analysée plus loin.

2.4.2 Produits

Théorème 15. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. Soient ℓ et ℓ' deux nombres complexes.

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ et ℓ' respectivement, **alors** la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.

Démonstration . La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donc bornée. Soit M un majorant de la suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$ et il existe un rang n_2 tel que pour $n \geqslant n_2$, $|v_n - \ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)}$.

Soit $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$\begin{aligned}
\left|u_n v_n - \ell\ell'\right| &= \left|u_n v_n - \ell v_n + \ell v_n - \ell\ell'\right| = \left|(u_n - \ell)\, v_n + \ell\left(v_n - \ell'\right)\right| \\
&\leqslant |v_n|\,|u_n - \ell| + |\ell|\left|v_n - \ell'\right| \leqslant M\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + |\ell|\frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)} \\
&\leqslant (M+1)\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + (|\ell|+1)\frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant \varepsilon)$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = \ell\ell'$.

❏

Théorème 16. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n = 0$.

Démonstration . La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit M un majorat de la suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M+1}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a :

$$|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M+1} \times M \leqslant \frac{\varepsilon}{M+1} \times (M+1) = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n v_n| \leqslant \varepsilon)$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 0$.

❏

Par exemple, la suite $(\sin(n))$ est bornée et la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge vers 0. Donc, la suite $\left(\dfrac{\sin(n)}{n}\right)$ converge vers 0. On doit noter que la suite $(\sin(n))$ est divergente (il est possible de le démontrer mais nous ne le ferons pas ici).

Théorème 17. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel non nul ℓ, **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n = \text{sgn}(\ell) \times (+\infty)$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel non nul ℓ, **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n = \text{sgn}(\ell) \times (-\infty)$.

2) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n = +\infty$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n = -\infty$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n = +\infty$.

Démonstration .

1) Supposons par exemple que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell > 0$. Le réel $\dfrac{\ell}{2}$ est strictement positif et donc il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $|v_n - \ell| \leqslant \dfrac{\ell}{2}$. Pour $n \geqslant n_1$, on a $v_n - \ell \geqslant -\dfrac{\ell}{2}$ et donc $v_n \geqslant \dfrac{\ell}{2} > 0$.

Soit $A \in [0, +\infty[$. Il existe un rang n_2 tel que pour $n \geqslant n_2$, $u_n \geqslant \dfrac{2A}{\ell} \geqslant 0$. Soit $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$u_n \times v_n \geqslant \frac{2A}{\ell} \times \frac{\ell}{2} = A.$$

On a montré que $\forall A \in [0, +\infty[$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/ \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n v_n \geqslant A)$. Mais alors, $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/ \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n v_n \geqslant A)$ car si A est un réel strictement négatif, un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n v_n \geqslant 0$, est aussi un rang à partir duquel $u_n v_n \geqslant A$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

2) Supposons par exemple que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Comme précédemment, on se contente de montrer que $\forall A \in [0, +\infty[$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/ \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n v_n \geqslant A)$.

Soit $A \in [0, +\infty[$. Il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant \sqrt{A}$ et il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_2$, $v_n \geqslant \sqrt{A}$. Soit $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$u_n \times v_n \geqslant \sqrt{A} \times \sqrt{A} = A.$$

On a montré que $\forall A \in [0, +\infty[$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/ \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n v_n \geqslant A)$ et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

❏

On peut résumer la plupart des résultats précédents dans le tableau suivant :

u_n tend vers	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
v_n tend vers	ℓ'	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$u_n \times v_n$ tend vers	$\ell\ell'$	$\text{sgn}(\ell) \times +\infty$	$\text{sgn}(\ell) \times -\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Le tableau ci-dessus comporte un ?. Cela signifie que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, tout est possible concernant $u_n \times v_n$. $\infty \times 0$ est une **forme indéterminée** qui sera analysée plus loin.

2.4.3 Quotients

Théorème 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Soit ℓ un nombre complexe non nul.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, **alors** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang et la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration . Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre complexe non nul ℓ. Le réel $\dfrac{|\ell|}{2}$ est strictement positif et donc, il existe un rang n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{|\ell|}{2}$. Pour $n \geqslant n_1$, on a

$$|\ell| - |u_n| \leqslant ||\ell| - |u_n|| \leqslant |\ell - u_n| \leqslant \frac{|\ell|}{2}$$

et donc $|u_n| \geqslant |\ell| - \dfrac{|\ell|}{2} = \dfrac{|\ell|}{2}$. En particulier, $|u_n| > 0$ puis $u_n \neq 0$. La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie à partir du rang n_1.

Pour $n \geqslant n_1$, on a

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n|\,|\ell|} \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{\dfrac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \frac{2}{|\ell|^2}\,|u_n - \ell|.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Le réel $\dfrac{|\ell|^2}{2}\varepsilon$ est un réel strictement positif. Donc, il existe un rang n_2 tel que, pour $n \geqslant n_2$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{|\ell|^2}{2}\varepsilon$. Soit $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{2}{|\ell|^2}\,|u_n - \ell| \leqslant \frac{2}{|\ell|^2} \times \frac{|\ell|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\left(n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| \leqslant \varepsilon\right)$. Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$. ❑

Théorème 19. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes et ℓ et ℓ' deux complexes, ℓ' étant non nul.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', **alors** la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration . Puisque pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$, il suffit d'appliquer les théorèmes 15 et 18.

❑

Théorème 20. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et est strictement positive à partir d'un certain rang, **alors** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et est strictement négative à partir d'un certain rang, **alors** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$.

Démonstration . Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et soit strictement positive à partir d'un certain rang n_1.

Soit A un réel strictement positif. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_2$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{A}$. Soit $n_0 = \mathrm{Max}\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{A}$ et donc $\dfrac{1}{u_n} \geqslant A$.

On a montré que : $\forall A \in]0, +\infty[$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\left(n \geqslant n_0 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \geqslant A\right)$ et donc aussi que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\left(n \geqslant n_0 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \geqslant A\right)$. Par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

La démonstration est analogue si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement négative à partir d'un certain rang.

❑

Théorème 21. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, **alors** la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

Démonstration . Supposons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir du rang n_1 et donc la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir du rang n_1

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_2$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. Soit $n_0 = \mathrm{Max}\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ et donc $0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\left(n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon\right)$. Par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

❑

On peut synthétiser les théorèmes 20 et 21 avec les égalités efficaces :

$$\frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

Sinon, en combinant les résultats sur les produits et les inverses, on obtient le tableau suivant :

u_n tend vers	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
v_n tend vers	$\ell' \neq 0$	0^+	0^+	0^-	0^-	$\ell > 0$	$\ell < 0$
u_n/v_n tend vers	ℓ/ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

u_n tend vers	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
v_n tend vers	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$\pm\infty$
u_n/v_n tend vers	$-\infty$	$+\infty$	?	?

Le tableau ci-dessus comporte deux ?. Cela signifie que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$, tout est possible concernant $\dfrac{u_n}{v_n}$.
$\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$ sont des **formes indéterminées** qui seront analysées au paragraphe suivant.

2.4.4 Les formes indéterminées

On récupère les différentes formes indéterminées des paragraphes précédents et on en rajoute une. On obtient les cinq formes indéterminées des classes préparatoires :

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \Big| \quad \infty \times 0 \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \quad \Big| \quad 1^{\infty}$$

Puisque $\dfrac{1}{\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{0} = \infty$, les trois formes indéterminées $\infty \times 0$, $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$, sont une seule et même forme indéterminée.
On donne différents exemples montrant que dans chacun des cas ci-dessus, tout est possible.

Pour $(+\infty) + (-\infty)$,

- $u_n = n^2 + n$ et $v_n = -n^2$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
- $u_n = n^2$ et $v_n = -n^2 - n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.
- $u_n = n^2 + 1$ et $v_n = -n^2$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 1$.
- $u_n = n^2 + (-1)^n$ et $v_n = -n^2$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $u_n + v_n$ n'a pas de limite.

Pour $0 \times \infty$,

- $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
- $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
- $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.
- $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $u_n v_n$ n'a pas de limite.

Pour 1^{∞},

- $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ puis

$$u_n^{v_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(n^2)} = e^{-n\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{X\to0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}} = -\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{v_n} = 0$.

- $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ puis

$$u_n^{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(n^2)} = e^{n\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = +\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{v_n} = +\infty$.

- $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ puis

$$u_n^{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n^{v_n}=e$.

On a obtenu au passage :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

On donne maintenant un exemple où « on lève une indétermination » mais l'aspect technique des calculs de limites sera principalement travaillé dans le chapitre suivant.

Exemple. On veut $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$. On est en présence d'une indétermination du type $(+\infty)+(-\infty)$.

On va transformer l'expression $\sqrt{n^2+2n+3}-n$ sans écrire le symbole $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et ceci pour deux raisons. La première est qu'on n'écrit pas ce symbole tant qu'on n'est pas sûr de l'existence de la limite. Il serait mauvais de faire un calcul du type $\lim\limits_{n\to+\infty}\ldots=\lim\limits_{n\to+\infty}\ldots=\ldots=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ qui n'existe pas. La deuxième raison est que, pendant un certain nombre d'étapes de calcul, on transforme l'expression $\sqrt{n^2+2n+3}-n$ sans jamais s'intéresser à sa limite. Il serait donc techniquement maladroit d'écrire de nombreuses fois le symbole $\lim\limits_{n\to+\infty}$ pour rien. **Quand on ne travaille que sur un morceau d'une expression, on n'écrit que ce morceau**.

Pour tout entier naturel n, $\sqrt{n^2+2n+3}+n\neq 0$ puis

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+2n+3}-n&=\frac{\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=\frac{\left(n^2+2n+3\right)-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}\\&=\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}.\end{aligned}$$

L'utilisation de la **quantité conjuguée** $\sqrt{n^2+2n+3}+n$ a permis de mettre en évidence le « face à face » n^2-n^2 qui contient l'indétermination $(+\infty)+(-\infty)$. Quand on simplifie n^2-n^2, on fait disparaître l'indétermination $(+\infty)+(-\infty)$.

On ne peut toujours pas calculer la limite car on est toujours en présence d'une indétermination, cette fois-ci du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. On poursuit donc le calcul avec une idée clé : **on met le terme prépondérant en facteur**.

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+2n+3}-n&=\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=\frac{2n\left(1+\dfrac{3}{2n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)}+n}\\&=\frac{2n}{n}\frac{1+\dfrac{3}{2n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}=2\frac{1+\dfrac{3}{2n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}.\end{aligned}$$

Quand on met en facteur le prépondérant $2n$ dans $2n+3$, on obtient $2n\times$ une expression qui tend vers 1. La mise en facteur du prépondérant est la technique algébrique qui permet de dire que « $2n+3$ vaut environ $2n$ pour n grand ». De même, on a écrit le dénominateur sous la forme $n\times$ une expression qui tend vers 2. Le face à face $\dfrac{2n}{n}$ contient l'indétermination $\dfrac{\infty}{\infty}$. Cette indétermination disparaît quand on simplifie n.

On peut maintenant passer à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)=\lim_{n\to+\infty}2\frac{1+\dfrac{3}{2n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}=2\frac{1+0}{\sqrt{1+0}+1}=1.$$

Dans le chapitre suivant, on dégagera des notions et des techniques qui permettront d'améliorer nettement le calcul précédent. ❏

2.5 Limites et inégalités

Théorème 22 (passage à la limite dans les inégalités larges). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Si les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et si il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant v_n$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration . Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (d'après le théorème 5, page 10). Pour $n \geqslant n_1$, on a en particulier $u_n > \ell - \dfrac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_2$, $|v_n - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_2$, on a en particulier $v_n < \ell' + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $N = \text{Max}\{n_0, n_1, n_2\}$. N est un entier naturel supérieur ou égal à n_0, n_1 et n_2. On en déduit que

$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} < u_N \leqslant v_N < \ell' + \frac{\varepsilon}{2}$$

puis que

$$\ell' - \ell > -\varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\ell' - \ell > -\varepsilon$. $\ell' - \ell$ est un réel strictement plus grand que n'importe quel réel strictement négatif et en particulier différent de n'importe quel réel strictement négatif. Donc, $\ell' - \ell \in [0, +\infty[$ ou encore $\ell \leqslant \ell'$.

❏

Le théorème précédent dit que les inégalités larges sont conservées par passage à la limite. Attention, **les inégalités strictes ne sont pas conservées pas passage à la limite** ou encore, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes,

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant n_0/\ u_n < v_n) \not\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n < \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} > 0$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

Par contre, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes, on a bien sûr (puisque $u_n < v_n \Rightarrow u_n \leqslant v_n$)

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant n_0/\ u_n < v_n) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Théorème 23.

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$, **alors** il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $u_n > 0$.

2) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, **alors** il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $u_n < v_n$.

Démonstration .

1) Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Le réel $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$ est strictement positif. Donc, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\ell}{2}$.
Pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n - \ell \geqslant -\dfrac{\ell}{2}$ et donc

$$u_n \geqslant \frac{\ell}{2} > 0.$$

2) On applique le 1) à la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

❏

Théorème 24 (théorème des gendarmes). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.

Si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (les gendarmes) convergent vers une même limite ℓ, **alors** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ.

Démonstration . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, on a $v_n \geqslant \ell - \varepsilon$ et il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_2$, $w_n \leqslant \ell + \varepsilon$.

Soit $N = \text{Max}\{n_0, n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant N$, on a

$$\ell - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

et en particulier

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

❏

Une conséquence du théorème des gendarmes est :

Théorème 25. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un complexe.

Si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, on a $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, **alors** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ.

Démonstration . Pour $n \geqslant n_0$, on a $0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant v_n$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $|u_n - \ell|$ tend vers 0. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ.

❏

Par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = 0$. On peut noter que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et donc que la limite de $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ ne s'obtient pas par opérations sur les limites.

Théorème 26. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant v_n$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration . Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant A$. Soit $N = \text{Max}\{n_0, n_1\}$. Pour $n \geqslant N$, on a $v_n \geqslant u_n \geqslant A$. On a montré que $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Rightarrow v_n \geqslant A)$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

On a montré que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Le deuxième résultat s'obtient alors en appliquant le premier résultat aux suites $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour $n \geqslant n_0$, $-v_n \leqslant -u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -v_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$).

❏

2.6 Limites et parties denses

Définition 8. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).
D est **dense** dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in D/\ |x - y| \leqslant \varepsilon.$$

⇨ **Commentaire** . *La définition du programme officiel est :* D *est* ***dense*** *dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si tout intervalle ouvert non vide rencontre* D*. Cette définition est équivalente à la définition donnée ci-dessus.*

On a déjà vu que $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont des parties de $\mathbb{R}$ denses dans $\mathbb{R}$. Ceci signifie que, aussi près qu'on veut d'un réel donné, on trouve un rationnel (ou un irrationnel ou un décimal). On peut caractériser la densité en terme de limites de suites (caractérisation séquentielle de la densité) :

Théorème 27. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

D est dense dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, convergente, de limite x.

Démonstration . Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)

• Supposons D dense dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit $x \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in D$ tel que $|x - y| \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in D$ tel que $|x - u_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.
On a montré que si D est dense dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, convergente, de limite x.

• Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, convergente, de limite x.
Soit $x \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit $\varepsilon > 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D, convergente, de limite x. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|x - u_n| \leqslant \varepsilon$. Le nombre $y = u_{n_0}$ est alors un élément de D tel que $|x - y| \leqslant \varepsilon$.
On a montré que si pour tout $x \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, convergente, de limite x, alors D est dense dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

❏

⇨ **Commentaire** . *Ainsi, par exemple, tout réel est limite d'une suite de rationnels. On donne ci-dessous quelques exemples célèbres :*

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

et

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right).$$

On peut aussi démontrer que

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} 4\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right).$$

2.7 Compléments sur les suites complexes

On sait qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain nombre complexe ℓ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$. Ainsi, par exemple, la suite $\left(\dfrac{e^{in\pi/3}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 car $\left|\dfrac{e^{in\pi/3}}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1}$.

On décrit ci-dessous d'autres manières d'étudier la convergence de suites complexes.

Théorème 28. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et ℓ un nombre complexe.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si $(\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{\ell}$.

Démonstration . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\overline{u_n} - \overline{\ell}\right| = \left|\overline{u_n - \ell}\right| = |u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

❏

Théorème 29. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(\mathrm{Re}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
De plus, en cas de convergence, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\,(u_n) + i \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}\,(u_n)$.

Démonstration .

• Supposons que les suites $(\mathrm{Re}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathrm{Re}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}} + i\,(\mathrm{Im}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après le théorème 12, page 15, et de plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\,(u_n) + i \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}\,(u_n)$.

• Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors, la suite $(\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après le théorème 28 puis les suites $(\mathrm{Re}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}} = \dfrac{1}{2}\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)$ et $(\mathrm{Im}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}} = \dfrac{1}{2i}\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}} - (\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)$ convergent.

❏

Théorème 30. Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels et r et θ deux réels.

Si les suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, vers r et θ respectivement, **alors** la suite complexe $\left(r_n e^{i\theta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et de plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n e^{i\theta_n} = re^{i\theta}$.

Démonstration .

• Soient θ et θ' deux réels.

$$\left|e^{i\theta}-e^{i\theta'}\right| = \left|e^{i(\theta+\theta')/2}\left(e^{i(\theta-\theta')/2}-e^{-i(\theta-\theta')/2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\frac{\theta-\theta'}{2}\right| = \left|\theta'-\theta\right|.$$

• Pour tout entier naturel n, $\left|e^{i\theta_n}-e^{i\theta}\right| \leqslant |\theta_n-\theta|$. Donc, si la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers θ, alors la suite $\left(e^{i\theta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e^{i\theta}$.

• Si r_n tend vers r et θ_n tend vers θ, alors $r_n e^{i\theta_n}$ tend vers $re^{i\theta}$ d'après le théorème 15, page 17.

❏

Exercice 9. Montrer que pour tout nombre complexe z, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Solution 9. Soit $z\in\mathbb{C}$. Posons $z=x+iy$ où x et y sont deux réels. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}}+i\frac{\frac{y}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}}\right)^n.$$

• Tout d'abord, $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}$ puis

$$\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}{\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}} = \left(x+\frac{x^2+y^2}{2n}\right)\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}{\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}{\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}} = \lim\limits_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x+\frac{x^2+y^2}{2n}\right) = x$.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x+\frac{x^2+y^2}{2n}\right)\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}{\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}} = x$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} = e^x$.

• Il reste à déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n^n$ où $z_n = \frac{1+\frac{x}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}}+i\frac{\frac{y}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}}$.

z_n est un nombre complexe de module 1. Donc, il existe $\theta_n\in\mathbb{R}$ tel que $z_n = e^{i\theta_n}$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right) = 1 > 0$.

Donc, pour n suffisamment grand, $\mathrm{Re}(z_n) > 0$ et on peut choisir θ_n dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Puisque $\tan(\theta_n) = \frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}$, on peut prendre $\theta_n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{n+x}\right)$. Pour n suffisamment grand, on a alors

$$z_n^n = \left(e^{i\theta_n}\right)^n = e^{in\theta_n} = e^{in\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{n+x}\right)}.$$

Or, si $y\neq0$, $n\theta_n = n\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{n+x}\right) = \frac{ny}{n+x}\frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{n+x}\right)}{\frac{y}{n+x}}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{n+x}\right)}{\frac{y}{n+x}} = \lim\limits_{X\to0}\frac{\mathrm{Arctan}\,X}{X} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{ny}{n+x} = y$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\theta_n = y$ ce qui reste clair si $y=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\theta_n = y$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{in\theta_n} = e^{iy}$ et enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x\times e^{iy} = e^z$.

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

⇨ **Commentaire** . *Ci-dessus, on a écrit des expressions assez longues et pénibles. Le chapitre suivant apportera des notations et des techniques permettant d'alléger énormément la solution précédente.*

3 Suites monotones

3.1 Suites monotones et limites

Théorème 31. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, **alors** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, **alors** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

DÉMONSTRATION .

1) Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée. Alors, $\mathcal{E} = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et donc $\mathcal{E}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ que l'on note ℓ.

Vérifions alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition d'une borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant \ell$. Soit $n \geqslant n_0$. Puisque la suite u est croissante, on a $u_n \geqslant u_{n_0} > \ell - \varepsilon$ et aussi $u_n \leqslant \ell$ puisque $\ell = \mathrm{Sup}(A)$. En résumé, pour $n \geqslant n_0$, $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell$ et en particulier, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$. Ceci montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée. Alors, la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée. On en déduit que la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = -(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. A n'est pas un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$. Puisque la suite u est croissante, pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant A$.
On a montré que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A)$. Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et non minorée. Alors, la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et non majorée. On en déduit que la suite $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

❏

⇨ **Commentaire** .

◇ *On peut dire que toute suite croissante (ou toute suite décroissante) converge dans* $\overline{\mathbb{R}}$.

◇ *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle croissante, alors* $\lim u = \mathrm{Sup}\ \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. *En particulier, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \lim u$.

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ puis $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.
b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n$.
c) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2) a) Etudier les variations de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel γ de $[0, 1]$.

Le nombre γ s'appelle la **constante d'EULER**.

Solution 10.

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est définie et décroissante sur $[k, k+1]$. Donc, $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$. Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de plus continue sur $[k, k+1]$, par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = (k+1-k)\frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

En additionnant membre à membre ces inégalités pour k variant de 1 à n, on obtient

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1).$$

De même, pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k},$$

puis en additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = \int_1^{n} \frac{dt}{t} = \ln(n)$$

et donc $H_n \leqslant 1 + \ln(n)$. Cette dernière inégalité reste vraie quand $n = 1$ et on a donc montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).}$$

b) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n \geqslant \ln(n+1)$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty.}$$

c) Pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant H_n - \ln(n) \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \gamma_n \leqslant 1$. En résumé, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \gamma_n \leqslant 1$. Ceci montre que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} - \gamma_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\, dt - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, dt \\ &= \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt.\end{aligned}$$

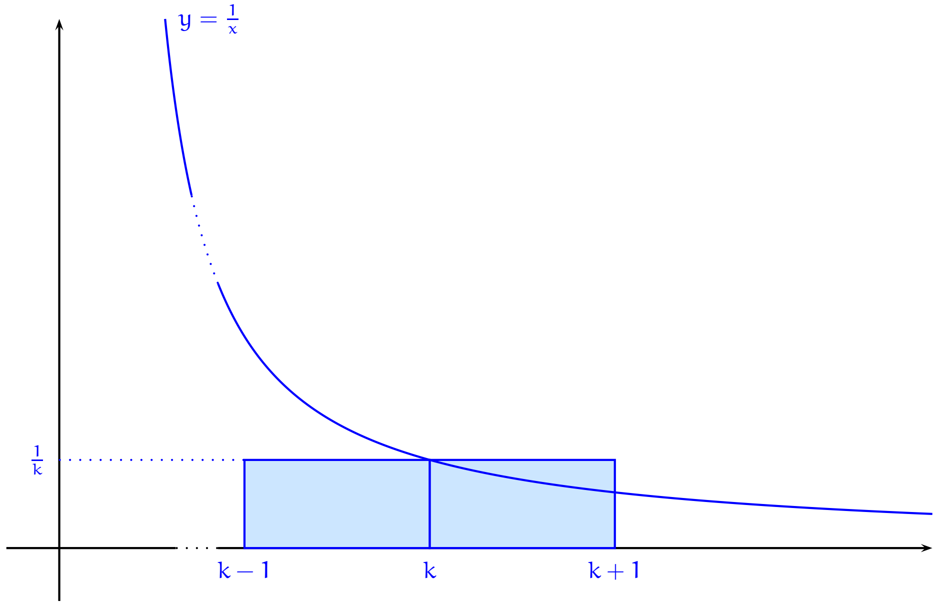
Maintenant, pour tout $t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{t} \leqslant 0$ et donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \leqslant 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_{n+1} \leqslant \gamma_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

b) La suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel γ. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \gamma_n \leqslant 1$. Par passage à la limite, on obtient

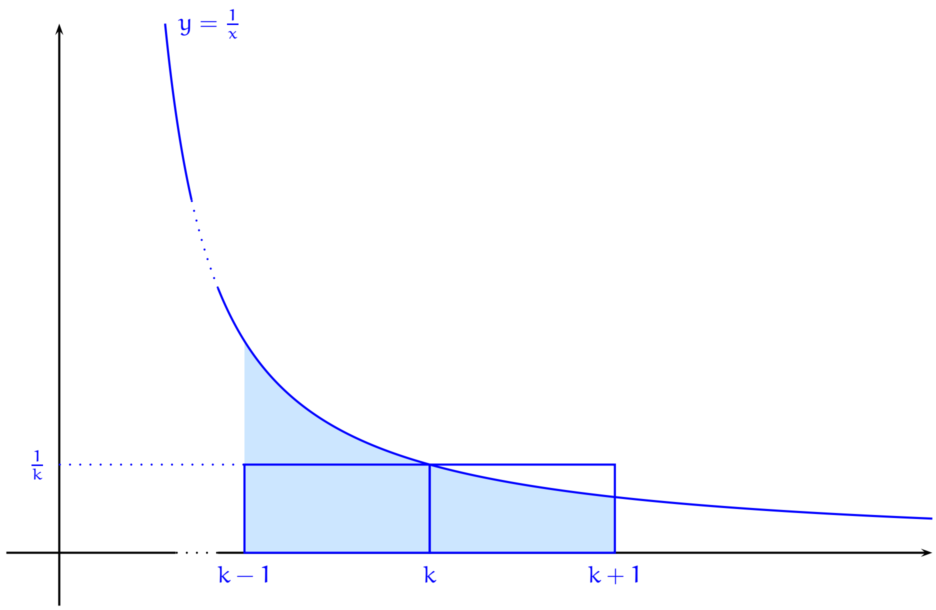
$$\boxed{0 \leqslant \gamma \leqslant 1.}$$

⇨ **Commentaire** . *Pour* $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k}(k+1-k)$ *est l'aire, exprimée en unités d'aire, d'un rectangle de côtés* 1 *et* $\dfrac{1}{k}$ *et donc l'aire de l'un des deux rectangles ci-dessous.*

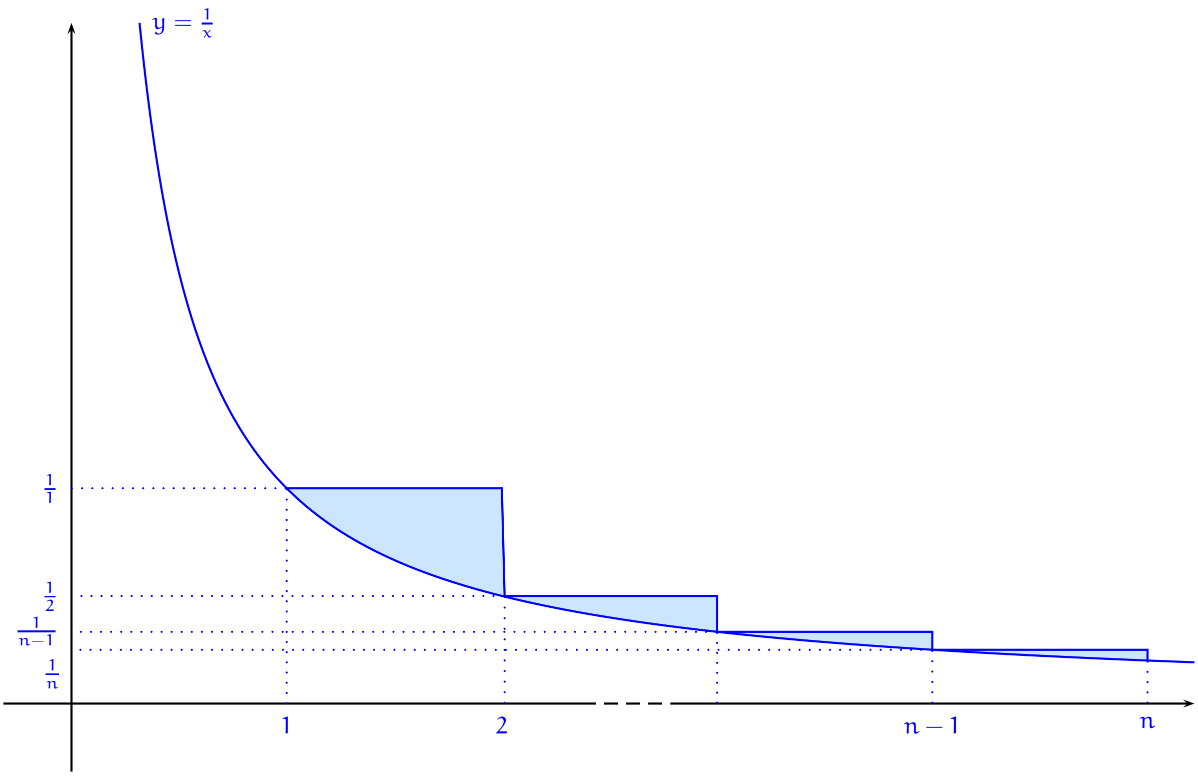


Pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \ln(k+1) - \ln(k)$ *est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ k \leqslant x \leqslant k+1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x}\right\}$ *et pour* $k \in [\![2,n]\!]$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} = \ln(k) - \ln(k-1)$ *est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ k-1 \leqslant x \leqslant k \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x}\right\}$.

L'encadrement $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_k^{k-1} \frac{dx}{x}$ *se visualise donc ainsi :*



Sinon $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)$ *est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine coloré en bleu ci-après.*



Théorème 32. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \lim u$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \lim u$.

Démonstration . Supposons par exemple que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit strictement croissante et majorée. Cette suite converge vers un certain réel ℓ et de plus, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$. Supposons par l'absurde qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} = \ell$. Puisque la suite u est croissante, pour $n \geqslant n_0$, on a $\ell = u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant \ell$ et donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n_0}$. Ceci contredit la stricte croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$.

❏

3.2 Suites adjacentes

Définition 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si et seulement si

- l'une des deux suites croît,
- l'autre décroît,
- $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Théorème 33. Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Démonstration . Supposons par exemple que la suite u soit croissante, la suite v soit décroissante et que la suite $v - u$ converge vers 0.

• Vérifions tout d'abord que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$. Supposons par l'absurde qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > v_{n_0}$. Puisque la suite u est croissante et la suite v est décroissante, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$ et $v_n \leqslant v_{n_0}$ puis $u_n - v_n \geqslant u_{n_0} - v_{n_0} > 0$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) \geqslant u_{n_0} - v_{n_0} > 0$ ce qui contredit le fait que la suite $u - v$ converge vers 0. Donc, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.

• Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. La suite u est donc croissante et majorée par v_0. On en déduit que la suite u converge vers un certain réel ℓ. De même, la suite v est décroissante et minorée par u_0. Donc, la suite v converge vers un certain réel ℓ'.
Puisque les suites u et v convergent, on peut écrire $\ell - \ell' = \lim(u - v) = 0$ et donc $\ell = \ell'$.

❏

⇨ **Commentaire** . *Si u et v sont deux suites adjacentes telles que $u \leqslant v$ et si ℓ est leur limite commune, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant v_n \leqslant \ldots \leqslant v_1 \leqslant v_0.$$

Exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ puis $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.

1) Montrer que les suites u et v sont adjacentes et retrouver ainsi la convergence de la suite u vers un certain réel γ.

2) Montrer que $\gamma \in [0,5; 0,6]$.

Solution 11.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \leqslant 0.$
- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t} = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \geqslant 0.$
- $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right).$

Ainsi, la suite u est décroissante, la suite v est croissante et la suite $u - v$ converge vers 0. On a montré que les suites u et v sont adjacentes et on en déduit que les suites u et v convergent vers une limite commune notée γ.

2) On a $v_6 \leqslant \gamma \leqslant u_{22}$ avec $v_6 = 0,504\ldots$ et $u_{22} = 0,5997\ldots$ En particulier, $0,5 \leqslant \gamma \leqslant 0,6$.

Exercice 12. (moyenne arithmético-géométrique de deux nombres réels positifs).
Soient a et b deux réels positifs tels que $a \leqslant b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ puis,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

1) Vérifier que les suites u et v sont bien définies.

2) Montrer que les suites u et v convergent vers une limite commune appelée moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b (on ne cherchera pas à calculer cette limite).

Solution 12.

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ et v_n existent et sont positifs.

- C'est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n et v_n existent et soient positifs. Alors, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$ existent et sont positifs.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n et v_n existent et sont positifs. Les suites u et v sont donc bien définies.

2)

- Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) - \sqrt{u_n v_n} = \dfrac{1}{2}(u_n - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n} + v_n) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2.$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \geqslant u_{n+1}$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant u_n$. Cette inégalité restant vraie pour $n = 0$ puisque $a \leqslant b$, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right) \geqslant 0$. La suite u est donc croissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) - v_n = \dfrac{1}{2}(u_n - v_n) \leqslant 0$. La suite v est donc décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. La suite u est croissante et majorée par v_0. On en déduit que la suite u converge. On note ℓ sa limite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. La suite v est décroissante et minorée par u_0. On en déduit que la suite v converge. On note ℓ' sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell' = \dfrac{1}{2}(\ell + \ell')$ et donc $\ell = \ell'$.

On a montré que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune.

---

4 Suites particulières

4.1 Suites arithmétiques. Suites géométriques

4.1.1 Suites arithmétiques

DÉFINITION 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** si et seulement si $\exists r \in \mathbb{C}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.

Si u est arithmétique, le complexe r est uniquement défini et s'appelle la **raison** de la suite.

On affirme ci-dessus que la raison r est uniquement définie. En effet, si u est une suite arithmétique, alors nécessairement $r = u_1 - u_0$.

On démontre facilement par récurrence :

Théorème 34. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
2) Plus généralement, $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Ainsi, les suites arithmétiques sont les suites de la forme $(an+b)_{n\in\mathbb{N}}$. Sinon, on rappelle le sens de variation d'une suite arithmétique réelle (qui s'obtient immédiatement à partir de : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$) :

Théorème 35. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique réelle de raison r.

Si $r > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Si $r < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
Si $r = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Enfin, les différents résultats sur les sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ont été donnés dans le chapitre « Les symboles $\sum$ et $\prod$. Le binôme de NEWTON ».

4.1.2 Suites géométriques

DÉFINITION 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** si et seulement si $\exists q \in \mathbb{C}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$.

Si u est géométrique et si $u_0 \neq 0$, le complexe q est uniquement défini et s'appelle la **raison** de la suite

On affirme ci-dessus que la raison q est uniquement définie si $u_0 \neq 0$. En effet, si u est une suite géométrique et si $u_0 \neq 0$, alors nécessairement $q = \dfrac{u_1}{u_0}$.

On démontre facilement par récurrence :

Théorème 36. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.
2) Plus généralement, si $q \neq 0$, $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_p q^{n-p}$ (si $q = 0$, on n'accepte pas des exposants $n-p$ négatifs).

Sinon, on rappelle le sens de variation de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $q \in]0,+\infty[$ (qui s'obtient immédiatement à partir de : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$) :

Théorème 37. Soit q un réel de $]0,+\infty[$.

Si $q > 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Si $q < 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
Si $q = 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Enfin, les différents résultats sur les sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique ont été donnés dans le chapitre « Les symboles $\sum$ et $\prod$. Le binôme de NEWTON ».

4.2 Suites arithmético-géométriques

On se donne deux complexes a et b et on s'intéresse aux suites complexes u tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \quad (*).$$

De telles suites sont appelées **suites arithmético-géométriques**.

• Si $a = 1$, une suite u vérifiant $(*)$ est arithmétique de raison b. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

• On suppose dorénavant $a \neq 1$. L'équation $z = az + b$ admet une solution et une seule à savoir $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. Soit alors u une suite complexe.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \omega = (au_n + b) - (a\omega + b)\\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \omega = a\,(u_n - \omega)\\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - \omega = a^n\,(u_0 - \omega)\\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \omega + a^n\,(u_0 - \omega)
\end{aligned}$$

Théorème 38. Soient a et b deux nombres complexes tels que $a \neq 1$. Soit u la suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Alors, pour tout entier naturel n, $u_n = \omega + a^n\,(u_0 - \omega)$ où $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

Exercice 13. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

1) Calculer u_n en fonction de n.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Solution 13.

1) L'équation $z = 2z + 3$ admet pour solution $z = -3$.

$$\begin{aligned}
u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3 &\Leftrightarrow u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + 3 = 2\,(u_n + 3)\\
&\Leftrightarrow u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n + 3 = 2^n\,(u_0 + 3)\\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -3 + 4 \times 2^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+2} - 3.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} (-3 + 4 \times 2^n) = -3(n+1) + 4\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}\\
&= 2^{n+3} - 3n - 7.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = 2^{n+3} - 3n - 7.}$$

4.3 Récurrences linéaires homogènes d'ordre 2

On se donne trois nombres complexes a, b et c tels que $a \neq 0$. On note $(\mathcal{E})$ l'ensemble des suites complexes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \qquad (*).$$

On veut déterminer $(\mathcal{E})$. On peut noter que $(\mathcal{E})$ n'est pas vide car la suite nulle est solution de $(*)$. On commence par deux résultats généraux :

Théorème 39. Soient u et v deux éléments de $(\mathcal{E})$. Alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, la suite $\lambda u + \mu v$ est un élément de $(\mathcal{E})$.

Démonstration . Soient u et v deux éléments de $(\mathcal{E})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a\left(\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2}\right) + b\left(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}\right) + c\left(\lambda u_n + \mu v_n\right) &= \lambda\left(au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n\right) + \mu\left(av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n\right) \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Donc, la suite $\lambda u + \mu v$ est un élément de $(\mathcal{E})$.

❏

Théorème 40. Soit $\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathcal{E}) & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & u & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$.

φ est une bijection et donc pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, il existe une suite complexe et une seule vérifiant $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

Démonstration .

- φ est effectivement une application.
- Vérifions que φ est injective. Soient u et v deux éléments de $(\mathcal{E})$ tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$.

Montrons par récurrence (double) que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n$.

- Puisque $\varphi(u) = \varphi(v)$, on a $(u_0, u_1) = (v_0, v_1)$ et donc l'affirmation est vraie quand $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= -\frac{b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n \text{ (car } a \neq 0) \\ &= -\frac{b}{a}v_{n+1} - \frac{c}{a}v_n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= v_{n+2}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$ et donc $u = v$. Ceci montre que φ est injective.

- Vérifions que φ est surjective. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

Soit u la suite complexe définie par $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -\dfrac{b}{a}u_{n+1} - \dfrac{c}{a}u_n$.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ et donc u est un élément de $(\mathcal{E})$. De plus, $\varphi(u) = (u_0, u_1) = (\alpha, \beta)$. Ceci montre que φ est surjective.

Finalement, φ est bijective.

❏

On va maintenant chercher les suites géométriques solutions de $(*)$.

Si $c = 0$, $(*)$ s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} = 0$. Pour une telle suite, u_0 est quelconque et d'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = -\dfrac{b}{a}u_n$. La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est géométrique de raison $-\dfrac{b}{a}$. Le calcul de u_n s'achève donc aisément.

On suppose dorénavant que $c \neq 0$. Soit q un nombre complexe non nul (par convention si $q = 0$, la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(1\ 0\ 0\ 0\ \ldots)$ et donc $aq^2 + bq^1 + cq^0 = c \neq 0$ de sorte que la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas solution de $(*)$).

$$\begin{aligned} (q^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ solution de } (*) &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ aq^{n+2} + bq^{n+1} + cq^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ q^n\left(aq^2 + bq + c\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow aq^2 + bq + c = 0. \end{aligned}$$

Définition 12. L'équation (E_c) : $az^2+bz+c=0$ est l'**équation caractéristique** associée à la relation de récurrence $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$, $n\in\mathbb{N}$.

Deux cas de figure se présentent alors.

1er cas. Si $b^2-4ac\neq 0$, l'équation caractéristique (E_c) admet deux solutions complexes distinctes q_1 et q_2. D'après le travail précédent, les deux suites géométriques $\left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solution de $(*)$. D'après le théorème 38, les suites de la forme $\lambda\left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}+\mu\left(q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, sont solutions de $(*)$. On va vérifier que ce sont toutes les solutions de $(*)$.

Soit u une solution de $(*)$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n=\lambda q_1^n+\mu q_2^n$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ et déterminons λ et μ tels que $v_0=u_0$ et $v_1=u_1$.

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}v_0=u_0\\ v_1=u_1\end{array}\right.&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=u_0\\ \lambda q_1+\mu q_2=u_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mu=u_0-\lambda\\ \lambda q_1+(u_0-\lambda)q_2=u_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(q_1-q_2)\lambda=-u_0q_2+u_1\\ \mu=u_0-\lambda\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{-u_0q_2+u_1}{q_1-q_2}\\ \mu=u_0-\dfrac{-u_0q_2+u_1}{q_1-q_2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{-u_0q_2+u_1}{q_1-q_2}\\ \mu=\dfrac{u_0q_1-u_1}{q_1-q_2}\end{array}\right..\end{aligned}$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n=\dfrac{-u_0q_2+u_1}{q_1-q_2}q_1^n+\dfrac{u_0q_1-u_1}{q_1-q_2}q_2^n$. v est un élément de $(\mathcal{E})$ vérifiant $v_0=u_0$ et $v_1=u_1$ ou encore $\varphi(u)=\varphi(v)$ où φ est l'application du théorème 39. Puisque φ est injective, on en déduit que $u=v$ et donc qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que $u=\lambda\left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}+\mu\left(q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$.

En résumé, si $b^2-4ac\neq 0$, les suites solutions de $(*)$ sont les suites de la forme $\lambda\left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}+\mu\left(q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, où q_1 et q_2 sont les deux solutions distinctes de (E_c).

2ème cas. Si $b^2-4ac\neq 0$, l'équation caractéristique (E_c) admet une solution complexe double $q_0=-\dfrac{b}{2a}$. D'après le travail précédent, la suite géométrique $\left(q_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de $(*)$. Vérifions que la suite $\left(nq_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de $(*)$. Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}a(n+2)q_0^{n+2}+b(n+1)q_0^{n+1}+cnq_0^n&=nq_0^n\left(aq_0^2+bq_0+c\right)+q_0^{n+1}(2aq_0+b)\\&=nq_0^n\times 0+q^{n+1}\times 0=0.\end{aligned}$$

La suite $\left(nq_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc solution de $(*)$. D'après le théorème 38, les suites de la forme $\lambda\left(nq_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}+\mu\left(q_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left((\lambda n+\mu)q_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, sont solutions de $(*)$. On va vérifier que ce sont toutes les solutions de $(*)$.

Soit u une solution de $(*)$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n=(\lambda n+\mu)q_0^n$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ et déterminons λ et μ tels que $v_0=u_0$ et $v_1=u_1$.

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}v_0=u_0\\ v_1=u_1\end{array}\right.&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mu=u_0\\ (\lambda+\mu)q_0=u_1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mu=u_0\\ \lambda=-u_0+\dfrac{u_1}{q_0}\end{array}\right.\quad(q_0\neq 0\text{ car }c\neq 0).\end{aligned}$$

Comme dans le premier cas, si pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=\left(\left(-u_0+\dfrac{u_1}{q_0}\right)n+u_0\right)q_0^n$, alors $v=u$. Les solutions de $(*)$ sont les suites de la forme $\lambda\left(nq_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}+\mu\left(q_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left((\lambda n+\mu)q_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$.

On peut énoncer :

Théorème 41. Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Soit (E_c) l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

d'inconnue le nombre complexe z. Soit $(\mathcal{E})$ l'ensemble des suites complexes vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

Si $b^2 - 4ac \neq 0$, (E_c) admet deux solutions complexes distinctes q_1 et q_2. Dans ce cas,

$$(\mathcal{E}) = \left\{ (\lambda q_1^n + \mu q_2^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Si $b^2 - 4ac = 0$, (E_c) admet une solution double q_0. Dans ce cas,

$$(\mathcal{E}) = \left\{ ((\lambda n + \mu) q_0^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Exercice 14. Soit u la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci).

Déterminer u_n en fonction de n.

Solution 14. L'équation caractéristique associée est $z^2 - z - 1 = 0$. Cette équation admet deux solutions distinctes $q_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Donc, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. De plus,

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = -\lambda \\ \sqrt{5}\,\lambda = 1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).}$$

On étudie maintenant le cas particulier où a, b et c sont réels et toujours $a \neq 0$ et $c \neq 0$. On veut déterminer les suites réelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad (*).$$

1er cas. On suppose que $b^2 - 4ac > 0$. L'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes q_1 et q_2. On sait que les suites complexes solutions de $(*)$ sont les suites de la forme $\lambda \left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \mu \left(q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Soit u une telle suite.

$$\begin{aligned}
u \text{ est réelle} &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \overline{\lambda} q_1^n + \overline{\mu} q_2^n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n \text{ (car } (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2) \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \overline{\lambda} + \overline{\mu} = \lambda + \mu & \text{(I)} \\ \overline{\lambda} q_1 + \overline{\mu} q_2 = \lambda q_1 + \mu q_2 & \text{(II)} \end{array}\right. \text{(obtenu pour } n = 0 \text{ et } n = 1) \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} (q_2 - q_1)\,\overline{\lambda} = (q_2 - q_1)\,\lambda & q_2(\text{I}) - (\text{II}) \\ (q_2 - q_1)\,\overline{\mu} = (q_2 - q_1)\,\mu & (\text{II}) - q_1(\text{I}) \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \overline{\lambda} = \lambda \text{ et } \overline{\mu} = \mu \text{ (car } q_2 - q_1 \neq 0) \\
&\Rightarrow (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Réciproquement, si λ et μ sont réels, il est clair que u est une suite réelle. Finalement, dans ce cas, les suites réelles solutions de $(*)$ sont les suites de la forme $\lambda \left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \mu \left(q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2ème cas. On suppose que $b^2 - 4ac = 0$. L'équation caractéristique admet une solution réelle double q_0 non nulle (car $c \neq 0$). On sait que les suites complexes solutions de $(*)$ sont les suites de la forme $\lambda\left(nq_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\left(q_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$. Soit u une telle suite.

$$\begin{aligned}
u \text{ est réelle} &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \overline{\lambda} n q_0^n + \overline{\mu} q_0^n = \lambda n q_0^n + \mu q_0^n \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \overline{\mu} = \mu & \text{(I)} \\ \overline{\lambda} q_0 + \overline{\mu} q_0 = \lambda q_0 + \mu q_0 & \text{(II)} \end{array}\right. \quad \text{(obtenu pour } n = 0 \text{ et } n = 1\text{)} \\
&\Rightarrow \overline{\lambda} = \lambda \text{ et } \overline{\mu} = \mu \text{ (car } q_0 \neq 0\text{)} \\
&\Rightarrow (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Réciproquement, si λ et μ sont réels, il est clair que u est une suite réelle. Finalement, dans ce cas, les suites réelles solutions de $(*)$ sont les suites de la forme $\lambda\left(nq_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\left(q_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

3ème cas. On suppose que $b^2 - 4ac < 0$. L'équation caractéristique admet deux solutions non réelles conjuguées q_1 et q_2. Posons $q_1 = \rho e^{i\theta}$ où $\rho \in]0,+\infty[$ et $\theta \in]0,\pi[$ (q_1 est donc la solution de partie imaginaire strictement positive) puis $q_2 = \rho e^{-i\theta}$. On sait que les suites complexes solutions de $(*)$ sont les suites de la forme $\lambda\left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\left(q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\rho^n\left(\lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$. Soit u une telle suite.

$$\begin{aligned}
u \text{ est réelle} &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \overline{\lambda}\rho^n e^{-in\theta} + \overline{\mu}\rho^n e^{in\theta} = \lambda\rho^n e^{in\theta} + \mu\rho^n e^{-in\theta} \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \overline{\lambda} + \overline{\mu} = \lambda + \mu & \text{(I)} \\ \overline{\lambda} e^{-i\theta} + \overline{\mu} e^{i\theta} = \lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta} & \text{(II)} \end{array}\right. \quad \text{(obtenu pour } n = 0 \text{ et } n = 1 \text{ en tenant compte de } \rho \neq 0\text{)} \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\overline{\lambda} = \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\mu & e^{i\theta}\text{(I)} - \text{(II)} \\ \left(e^{-i\theta} - e^{i\theta}\right)\overline{\mu} = \left(e^{-i\theta} - e^{i\theta}\right)\lambda & e^{-i\theta}\text{(I)} - \text{(II)} \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \mu = \overline{\lambda} \text{ (car } \theta \in]0,\pi[\text{ et donc } e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta) \neq 0\text{)}.
\end{aligned}$$

Réciproquement, si $\mu = \overline{\lambda}$, $u = \lambda\left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \overline{\lambda}\left(\overline{q_1}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle. Les suites réelles solutions de $(*)$ sont donc les suites de la forme $\left(\rho^n\left(\lambda e^{in\theta} + \overline{\lambda} e^{-in\theta}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. En posant $\lambda = a + ib$ où a et b sont deux réels, on obtient les suites de la forme $\left(\rho^n\left(2a\cos(n\theta) - 2b\sin(n\theta)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Maintenant, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & (a',b') = (2a,-2b) \end{array}$ est bien sûr une bijection et donc les suites réelles solutions de $(*)$ sont les suites de la forme $\left(\rho^n\left(a'\cos(n\theta) + b'\sin(n\theta)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a',b') \in \mathbb{R}^2$.

On peut énoncer :

Théorème 42. Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Soit (E_c) l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

d'inconnue le nombre complexe z. Soit $(\mathcal{E})$ l'ensemble des suites réelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

Si $b^2 - 4ac > 0$, (E_c) admet deux solutions réelles distinctes q_1 et q_2. Dans ce cas,

$$(\mathcal{E}) = \left\{\left(\lambda q_1^n + \mu q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Si $b^2 - 4ac = 0$, (E_c) admet une solution réelle double q_0. Dans ce cas,

$$(\mathcal{E}) = \left\{\left((\lambda n + \mu) q_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, (E_c) admet deux solutions non réelles conjuguées $q_1 = \rho e^{i\theta}$ et $q_2 = \rho e^{-i\theta}$ où $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in]0,\pi[$. Dans ce cas,

$$(\mathcal{E}) = \left\{\left(\rho^n\left(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 15. Soit $\theta \in]0,\pi[$. Soit u la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \cos(\theta)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

Déterminer u_n en fonction de n.

Solution 15. L'équation caractéristique associée à l'équation $u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$ est $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0$. Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0 &\Leftrightarrow (z - \cos(\theta))^2 + 1 - \cos^2(\theta) = 0 \Leftrightarrow (z - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - \cos(\theta) - i\sin(\theta))(z - \cos(\theta) + i\sin(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \left(z - e^{i\theta}\right)\left(z - e^{-i\theta}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = e^{i\theta} \text{ ou } z = e^{-i\theta}. \end{aligned}$$

L'équation caractéristique admet deux solutions non réelles (car $\theta \in]0, \pi[$) conjuguées $q_1 = e^{i\theta}$ et $q_2 = e^{-i\theta}$. Les suites réelles vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$ sont les suites de la forme $(1^n (\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)))_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit u une telle suite.

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_1 = \cos(\theta) \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda\cos(\theta) + \mu\sin(\theta) = \cos(\theta) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \mu\sin(\theta) = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{array}\right. \quad (\text{car } \sin(\theta) \neq 0). \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos(n\theta).}$$

---

5 Suites extraites

5.1 Définition

On commence par établir un résultat qui étaiera la définition d'une suite extraite.

Théorème 43. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, strictement croissante sur $\mathbb{N}$. Alors,

1) φ est injective.
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$.

Démonstration .

1) Immédiat.

2) Montrons le résultat par récurrence.

- $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ et donc $\varphi(0) \geqslant 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\varphi(n) \geqslant n$. Puisque $n + 1 > n$ et que φ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, on a $\varphi(n + 1) > \varphi(n)$. Puisque $\varphi(n)$ et $\varphi(n + 1)$ sont des entiers, on en déduit que

$$\varphi(n + 1) \geqslant \varphi(n) + 1 \geqslant n + 1.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

3) Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$.

❏

On peut maintenant poser la définition suivante :

Définition 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Par exemple, $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ où p_n est le n-ème nombre premier, sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5.2 Convergence de suites extraites

Théorème 44. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{C}$, **alors** toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ.

Démonstration . Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, strictement croissante sur $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{\varphi(n)}$. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Soit $n \geqslant n_0$. D'après le théorème 43, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$. On en déduit que

$$|v_n - \ell| = \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$. Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ.

❑

On en déduit immédiatement le corollaire suivant, fréquemment utilisé dans la pratique pour prouver qu'une suite est divergente :

Théorème 45. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Si il existe deux suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes, de limites différentes, **alors** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Par exemple, si pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, alors les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, de limites respectives 1 et -1. Le théorème précédent montre une nouvelle fois que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Le théorème suivant analyse une situation elle aussi fréquemment rencontrée dans la pratique :

Théorème 46. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite, **alors** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Démonstration . Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Soit $n_0 = \mathrm{Max}\{2n_1, 2n_2+1\}$. Soit $n \geqslant n_0$.

- Si n est pair, posons $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}$.

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow 2p \geqslant 2n_1 \Rightarrow p \geqslant n_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- Si n est impair, posons $n = 2p+1$ où $p \in \mathbb{N}$.

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow 2p+1 \geqslant 2n_2+1 \Rightarrow p \geqslant n_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Finalement, pour tout $n \geqslant n_0$ (puisqu'un entier est pair ou impair), $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ.

❑

⇨ **Commentaire** . *Dans le théorème précédent, si on enlève la condition « les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite », l'exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut diverger.*

Exercice 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Montrer que si les trois suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solution 16. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$, $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ et $\ell'' = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n}$.

La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{2\times 3n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{3\times 2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Donc, la suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et vers ℓ''. On en déduit que $\ell = \ell''$.

La suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_{2(3n+1)+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_{3\times(2n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite des suites $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Donc, la suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ' et vers ℓ''. On en déduit que $\ell' = \ell''$.

Finalement, $\ell = \ell'$. Donc, les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 17. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que toutes les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ et plus généralement toutes les suites $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$, $k \geqslant 2$, convergent et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Solution 17. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est un nombre premier} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Donc, $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 0$, $u_5 = 1$, $u_6 = 0$, ...

Soit $p \geqslant 2$. Pour $n \geqslant 2$, l'entier $p \times n$ n'est pas un nombre premier et donc $\forall n \geqslant 2$, $u_{pn} = 0$. En particulier, la suite $(u_{pn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{pn} = 0$.

Il y a une infinité de nombres premiers et donc la suite $(u_2\ u_3\ u_5\ u_7\ \ldots) = (u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ (où p_n est le n-ème nombre premier) est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{p_n} = 1$, la suite extraite $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite 1.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc au moins deux suites extraites convergentes de limites différentes. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

5.3 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 47 (théorème de Bolzano-Weierstrass).

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration .

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant u_n \leqslant b$.
On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On pose aussi $\varphi(0) = 0$ et on a $a_0 \leqslant u_{\varphi(0)} \leqslant b_0$.

L'un au moins des deux intervalles $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ ou $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ contient une infinité de termes de la suite u. En effet dans le cas contraire, les deux intervalles $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ contiendraient un nombre fini de termes de la suite et il en serait de même de l'intervalle $[a, b]$ ce qui n'est pas.

On choisit un des deux intervalles $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ ou $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ qui contient une infinité de termes de la suite u et on le note $[a_1, b_1]$.
On a donc $[a_1, b_1] = \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ ou $[a_1, b_1] = \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. Dans tous les cas, on a $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$ et $b_1 - a_1 = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$. Puisque $[a_1, b_1]$ contient une infinité de termes de la suite u, on peut trouver un entier naturel $\varphi(1)$ strictement supérieur à $\varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} \in [a_1, b_1]$ ou encore tel que $a_1 \leqslant u_{\varphi(1)} \leqslant b_1$.

Soit $n \geqslant 1$. Supposons avoir construit des réels $a_0 = a$, a_1, ..., a_n, $b_0 = b$, b_1, ..., b_n, et des entiers naturels $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1)$, ..., $\varphi(n)$ tels que

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $[a_k, b_k]$ est « l'une des deux moitiés » de l'intervalle $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $[a_k, b_k]$ contient une infinité de termes de la suite u.
- $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \leqslant u_{\varphi(k)} \leqslant b_k$.

L'intervalle $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite u et il en est de même de l'un des deux « intervalles moitié » $\left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right]$ ou $\left[\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$. On note $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ un tel intervalle (qui est donc l'une des deux moitiés de l'intervalle $[a_n, b_n]$). Puisque l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes de la suite u, on peut trouver un entier que l'on note $\varphi(n+1)$, strictement supérieur à $\varphi(n)$, tel que $a_{n+1} \leqslant u_{\varphi(n+1)} \leqslant b_{n+1}$.

On a ainsi construit par récurrence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est l'une des deux moitiés de l'intervalle $[a_n, b_n]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est l'une des deux moitiés de l'intervalle $[a_n, b_n]$, on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$. Ceci montre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est l'une des deux moitiés de l'intervalle $[a_n, b_n]$, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$. On en déduit que $b_n - a_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $b_n - a_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes et donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite ℓ.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergente.

• Soit maintenant $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée (car $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant |z_n| \leqslant M$ où M est un majorant de la suite $|z|$). On peut en extraire une suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Les suites $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(z_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées et donc la suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\mathrm{Im}\left(z_{\varphi(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée. On peut en extraire une suite $\left(y_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. La suite $\left(y_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $\left(x_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et est donc convergente.
Les suites $\left(x_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et donc la suite $\left(z_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(x_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} + i\left(y_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente en tant que combinaison linéaire de suites convergentes.

Finalement, la suite $\left(z_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et est convergente.

❏

6 Etude des suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On se donne une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et un réel a de I et on s'intéresse à la suite u définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On va énoncer quelques généralités sur ce type de suite et fournir un exemple d'étude d'une telle suite. Néanmoins, à ce niveau du cours, il nous manque des outils qui seront fournis dans le chapitre « Dérivation ». On complètera alors l'étude de ces suites.

Le premier problème que l'on rencontre est le fait que la suite u soit définie ou pas. Si pour un entier n, u_n existe et est élément de I (par exemple $n = 0$), alors on peut calculer le terme suivant u_{n+1}. Si u_{n+1} reste dans I, on peut continuer. Mais si u_{n+1} n'est plus dans I (et que f n'est pas définie en dehors de I), alors on ne peut plus calculer $f(u_{n+1})$ et le processus s'arrête. Ceci nous amène à poser la définition suivante :

Définition 14. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I est **stable par** $f \Leftrightarrow f(I) \subset I \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (x \in I \Rightarrow f(x) \in I)$.

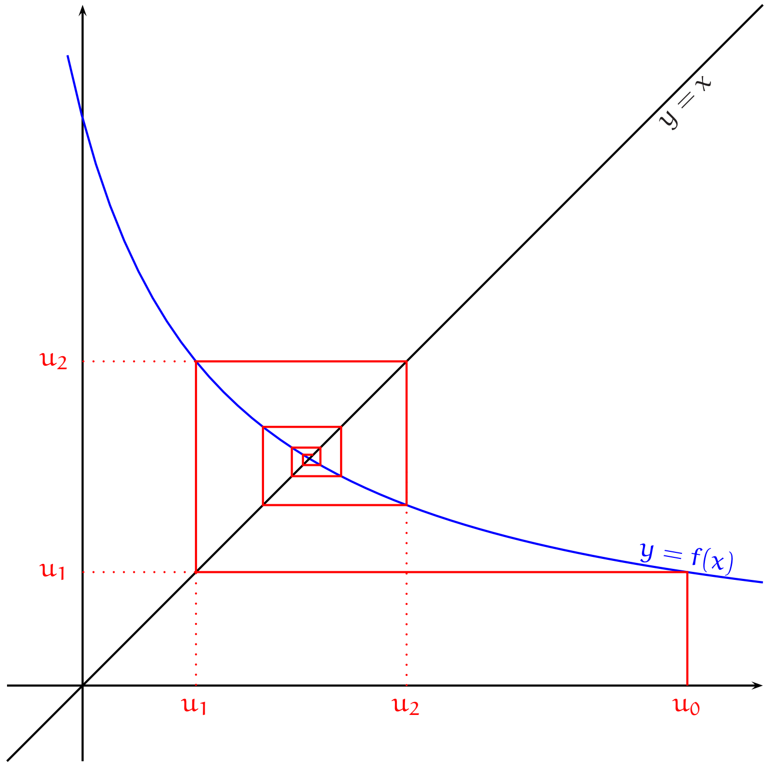
Exemple. Si f est la fonction $x \mapsto x^2$, l'intervalle $[0, +\infty[$ est stable par f car l'image par f d'un réel positif reste un réel positif mais l'intervalle $[0, 2]$ n'est pas stable par f car l'image par f d'un réel compris entre 0 et 2 n'est pas nécessairement un réel compris entre 0 et 2 (par exemple, $f(2) = 4 \notin [0, 2]$). ❏

On suppose dorénavant que f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que I est stable par f. Dans ce cas, pour tout entier naturel n, u_n existe et est dans I. En effet :

- $u_0 = a$. Donc, u_0 existe et u_0 est dans I.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n existe et $u_n \in I$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ existe (car f est définie sur I) et $u_{n+1} \in I$ (car I est stable par f).

Le résultat est démontré par récurrence.

Intéressons nous maintenant à la représentation graphique d'une telle suite. On commence par construire le graphe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$ puis on place $u_0 = a$ sur l'axe des abscisses. En allant parallèlement à (Oy) jusqu'à la courbe représentative de f, on parvient au point de coordonnées $(u_0, f(u_0)) = (u_0, u_1)$ dont l'ordonnée est u_1. En allant parallèlement à (Ox) jusqu'à la droite d'équation $y = x$, on parvient au point de coordonnées (u_1, u_1) dont l'abscisse est u_1. On peut alors de nouveau aller parallèlement à (Oy) jusqu'au graphe de f pour lire u_2 en ordonnée et ainsi de suite ...



Intéressons nous maintenant au sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a le résultat suivant :

Théorème 48. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ où I est stable par f. Soit $a \in I$. Soit u la suite définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1) Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2) Si f est décroissante sur I alors les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

Démonstration . Puisque f est définie sur I et que I est stable par f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in I$.

1) Supposons f croissante sur I. Alors, pour tous réels a et b de I, $\text{sgn}(f(b)-f(a)) = \text{sgn}(b-a)$. Puisque tous les termes de la suite u sont dans I, on en déduit que pour tout entier naturel n,

$$\text{sgn}(u_{n+2}-u_{n+1}) = \text{sgn}(f(u_{n+1})-f(u_n)) = \text{sgn}(u_{n+1}-u_n).$$

Ainsi, la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant ou encore la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

2) Supposons f décroissante sur I. Posons $g = f \circ f$. g est bien définie sur I (car I est stable par f), I est stable par g et g est croissante sur I.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$. Puisque g est croissante sur I, les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

❏

Parlons maintenant de la limite d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Supposons que cette suite converge vers un certain réel ℓ. La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. D'autre part, si la fonction f est **définie et continue** en ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ (cette dernière affirmation sera pour l'instant admise et nous attendrons le chapitre sur la continuité pour l'analyser avec précision). On a obtenu :

Théorème 49. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ où I est stable par f. Soit $a \in I$. Soit u la suite définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ et si f est définie et continue en ℓ, **alors** $f(\ell) = \ell$.

⇨ **Commentaire** . *La condition « f est définie et continue en ℓ » est vérifiée si ℓ reste dans I et si f est continue sur I. Cette dernière condition sera assurée si par exemple l'intervalle I est un intervalle fermé, borné, c'est-à-dire un segment $[\alpha, \beta]$. En effet,* *les inégalités larges : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant u_n \leqslant \beta$, fournissent par passage à la limite $\alpha \leqslant \ell \leqslant \beta$.*

Pour finir ce chapitre, on donne un exemple d'étude d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

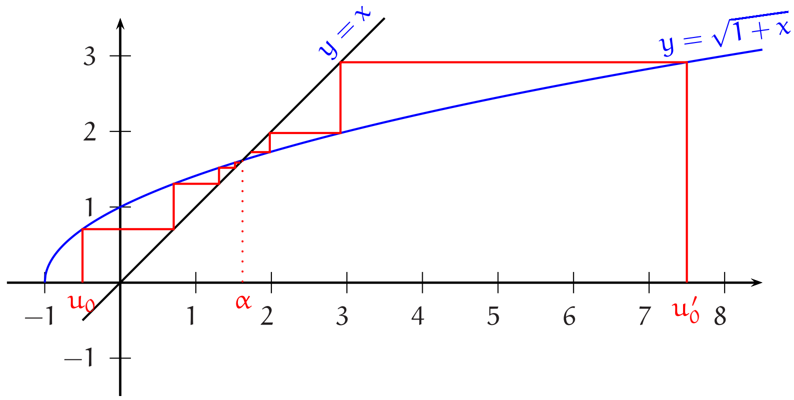
Exercice 18. Soit $a \in [-1, +\infty[$. Soit u la suite définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution 18.

• **Représentation graphique**



• **Définition de la suite u**

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant -1$.

- C'est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n existe et $u_n \geqslant -1$. Alors $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ existe et de plus $u_{n+1} \geqslant 0 \geqslant -1$.

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant -1$.

• **Recherche de la limite éventuelle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$**

Si la suite u converge vers un certain réel ℓ, alors, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant -1$, par passage à la limite on obtient $\ell \geqslant -1$. Par continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ sur $[-1, +\infty[$ et donc en ℓ, on a nécessairement $\ell = \sqrt{1 + \ell}$. Or, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x = \sqrt{1+x} &\Leftrightarrow x^2 = 1 + x \text{ et } x \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \text{ et } x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \text{ et } x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$). Si la suite u converge vers un certain réel ℓ, alors $\ell = \alpha$.

• **Etude de la position de u_n par rapport à α**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(u_{n+1} - \alpha) &= \operatorname{sgn}\left(\sqrt{1 + u_n} - \sqrt{1 + \alpha}\right) \\ &= \operatorname{sgn}(u_n - \alpha) \text{ (par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \sqrt{1+x} \text{ sur } [-1, +\infty[). \end{aligned}$$

Donc, la suite $(u_n - \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est de signe constant. On en déduit que
- Si $-1 \leqslant u_0 < \alpha$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_n < \alpha$;
- Si $u_0 > \alpha$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$;
- Si $u_0 = \alpha$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha$. Dans ce dernier cas, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

• **Etude des variations de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(u_{n+1}-u_n) &= \operatorname{sgn}\left(1+u_n-u_n^2\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } x\mapsto x^2 \text{ sur } [0,+\infty[)\\ &= \operatorname{sgn}((\alpha-u_n)(u_n-\beta)) = \operatorname{sgn}(\alpha-u_n).\end{aligned}$$

Donc,

- Si $u_0 < \alpha$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha - u_n > 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. Dans ce cas, la suite u est strictement croissante.
- Si $u_0 > \alpha$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha - u_n < 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. Dans ce cas, la suite u est strictement décroissante.
- Si $u_0 > \alpha$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha - u_n$. Dans ce cas, la suite u est constante.

• **Convergence de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Si $u_0 < \alpha$, alors la suite u est croissante et majorée par α. On en déduit que la suite u converge. De plus, d'après un calcul fait plus haut, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
- Si $u_0 > \alpha$, alors la suite u est décroissante et minorée par α. On en déduit que la suite u converge. De plus, d'après un calcul fait plus haut, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
- Si $u_0 = \alpha$, alors la suite u est constante et en particulier convergente. De nouveau, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Dans tous les cas, la suite u converge vers α.