13

Probabilités

Au programme

- √ Modéliser une expérience aléatoire
- √ Comprendre le langage des événements et les notations
- √ Dénombrer à l'aide d'arbres ou de tableaux pour des expériences à deux ou trois étapes
- √ Déterminer des probabilités

Table des matières

Le chapitre précédent (« Statistiques ») était consacré à l'« étude du passé ». Nous allons maintenant essayer d'« étudier l'avenir ». On commence par mettre en place le vocabulaire et les notations. La mise en place est longue et il vous faudra attendre plusieurs pages avant de commencer à vraiment calculer des probabilités.

I Evénements

A Expériences aléatoires

Définition 1

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît toutes les **issues** ou encore tous les résultats possibles mais dont on ne peut prévoir le résultat que l'on obtient effectivement.

Par exemple, quand on lance un dé à six faces, on peut obtenir le 1, le 2, le 3, le 4, le 5 ou le 6, mais on ne sait pas s'il va sortir le 1, le 2, le 3, le 4, le 5 ou le 6.

B L'ensemble des issues : l'univers

En reprenant l'exemple du lancer d'un dé à six faces, on dit que l'**ensemble des issues** associé à cette **expérience aléatoire** est l'ensemble $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
(Ω se lit « Omega ». Ω est le O majuscule de l'alphabet grec et c'est la dernière lettre de cet alphabet).

Examinons un deuxième exemple. On lance simultanément deux dés à six faces, l'un blanc et l'autre jaune, et on s'intéresse à la somme des points obtenus sur les faces supérieures des deux dés.

On peut décider arbitrairement qu'une **issue** de cette expérience aléatoire est la succession des deux nombres obtenus, le premier nombre sur le dé blanc et le deuxième nombre sur le dé jaune. Une telle issue peut être modélisée par un **couple** de nombres ou encore une suite ordonnée de deux nombres avec répétition possible. Il y en a $6\times 6 = 36$ et l'ensemble des issues est
$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1)(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),$
$(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$.

On peut aussi décider arbitrairement qu'une **issue** est une paire de nombres (les deux nombres obtenus), sans tenir compte du dé sur lequel a été obtenu chaque nombre ou encore sans tenir compte de l'ordre de ces deux nombres. Dans ce cas, $\Omega = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,3\},\{3,4\},\{3,5\},$
$\{3,6\},\{4,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,5\},\{5,6\},\{6,6\}\}$ (la paire $\{2,1\}$ et la paire $\{1,2\}$ sont une seule et même paire) et il y a 21 issues.

On peut encore décider qu'une **issue** de cette expérience aléatoire est tout simplement la somme des points obtenus sur les deux dés. Il y a 11 sommes possibles et dans ce cas $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

Ainsi, face à une même expérience aléatoire, il y a plusieurs façons de concevoir une issue. Cette activité qui consiste à décider de ce qu'est une issue est la **modélisation** de l'expérience aléatoire. La modélisation est arbitraire et est effectuée par celui ou celle qui va calculer des probabilités. De la qualité de cette modélisation dépendra la qualité de nos calculs de probabilité.

Définition 2

L'**univers** associé à une certaine expérience aléatoire est l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire. Le choix d'un univers est arbitraire et est le résultat d'une **modélisation** de l'expérience aléatoire.

C Evénements

1 Définition d'un événement

On reprend l'expérience qui consiste à lancer deux dés et à s'intéresser à la somme des points obtenus à laquelle on associe l'univers $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ c'est-à-dire l'ensemble des sommes possibles. On peut alors considérer l'ensemble de toutes les issues telles que la somme des points soit un nombre pair : c'est l'ensemble $\mathrm{A} = \{2,4,6,8,10,12\}$. A est une partie de l'univers Ω et est appelée **événement**. De manière générale :

Définition 3

Soit Ω un univers associé à une certaine expérience aléatoire.

Un **événement** est une partie de l'univers Ω.

Ainsi, quand on lance deux dés, l'événement « obtenir une somme qui est un nombre pair » est $A = \{2,4,6,8,10,12\}$ si $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ et est $A = \{\{1,1\},\{1,3\},\{1,5\},\{2,2\},\{2,4\},\{2,6\},\{3,3\},\{3,5\},\{4,4\},\{4,6\},\{5,5\},\{6,6\}\}$ si $\Omega = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,5\},$ $\{5,6\},\{6,6\}\}$

Définition 4

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

Quand une issue appartient à un événement A, on dit que cette issue est une **réalisation** de l'événement A ou encore que cette issue **réalise** l'événement A.

Par exemple, toujours avec un lancer de deux dés auquel on associe l'univers $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, une réalisation de l'événement A : « obtenir une somme qui est un nombre pair » est l'issue 2. Une autre réalisation de l'événement A est l'issue 4.

Toujours avec l'expérience qui consiste à lancer deux dés et à s'intéresser à la somme des points obtenus, l'ensemble des issues constituant l'événement « la somme des points obtenus est inférieure ou égale à 12 » est l'ensemble Ω tout entier (quelque soit le choix de l'univers Ω modélisant l'expérience) et l'ensemble des issues constituant l'événement « la somme des points obtenus est strictement supérieure à 12 est l'ensemble vide $\varnothing$. Dans le cas général, il existe toujours deux événements plus particuliers :

Définition 5

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

L'**événement impossible** est $\varnothing$. L'**événement certain** est Ω.

Il y a ensuite les événements constitués d'une seule issue :

Définition 6

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

Un événement constitué d'une seule issue s'appelle un **événement élémentaire**.

Exemple. Quand on lance un dé, l'événement « on obtient le 1 » est l'événement $A = \{1\}$ et il est constitué de l'unique issue 1. C'est un événement élémentaire.

En toute rigueur, il faut faire la différence entre les différentes issues possibles et les événements élémentaires ou encore il faut faire une différence entre ce qui peut se réaliser et ce qui se réalise. Mais si vous confondez les deux notions en classe de seconde, normalement, personne ne vous en voudra car la différence entre les deux notions est délicate à maîtriser.

2 Opérations sur les événements

Ainsi, un événement est, après modélisation, un ensemble et nous avons parlé des ensembles dans le chapitre 3. Les définitions qui suivent montrent tout l'intérêt de cette modélisation.

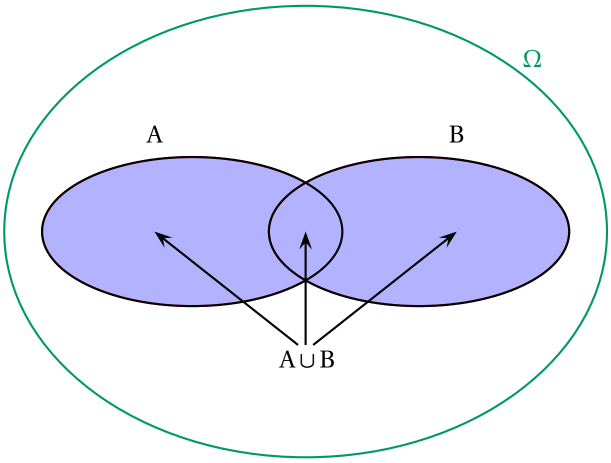
Définition 7

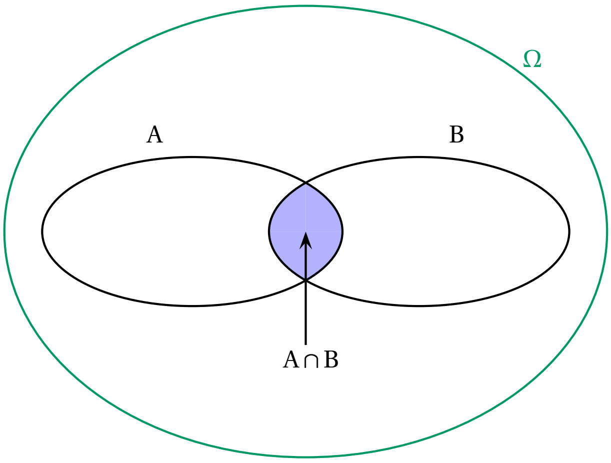
Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire. Soient A et B deux événements.

La **réunion des événements** A **et** B est l'ensemble des issues qui appartiennent à au moins un des deux événements A ou B. Elle se note $A \cup B$ (ce qui se lit A union B).
L'**intersection des événements** A **et** B est l'ensemble des issues qui appartiennent aux deux événements A et B. Elle se note $A \cap B$ (ce qui se lit A inter B).

La réunion de deux événements est la traduction en termes d'ensembles du mot « ou » et l'intersection de deux événements est la traduction en termes d'ensembles du mot « et ». Par exemple, les événements « obtenir une somme qui est un nombre divisible par 3 ou par 4 » et « obtenir une somme qui est un nombre divisible par 3 et par 4 » sont les événements $A \cup B$ et $A \cap B$ où A est l'événement « obtenir une somme qui est un nombre divisible par

3 » et B est l'événement « obtenir une somme qui est un nombre divisible par 4 ». Si $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, alors $A \cup B = \{3,4,6,8,9,12\}$ et $A \cap B = \{12\}$.





Définition 8

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire. Soit A et B deux événements.

Les événements A et B sont **disjoints** ou aussi **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

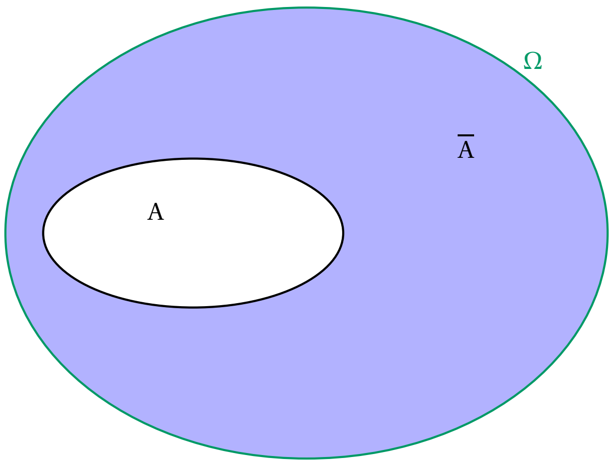
Par exemple, quand on jette un dé à 6 faces, les événements A : « on obtient un nombre pair » et B : « on obtient un 5 », sont incompatibles, et si C est l'événement « on obtient un multiple de 3 », les événements A et C ne sont pas incompatibles (car l'issue 6 est un élément commun à A et à C).

Définition 9

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire. Soit A un événement.

L'**événement contraire de** A est l'ensemble des issues qui n'appartiennent pas à A. Il se note $\overline{A}$ (ce qui se lit A barre) ou aussi $\Omega \setminus A$ (ce qui se lit Ω privé de A).

Par exemple, quand on jette deux, l'événement contraire de l'événement A : « la somme des points obtenus est inférieure ou égale à 10 » (c'est-à-dire $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ est l'événement $\overline{A}$: « la somme des points obtenus est strictement supérieure à 10 » (c'est-à-dire $\overline{A} = \{11,12\}$).



On note qu'un événement et son contraire sont toujours incompatibles.

II Probabilités sur un univers fini

A Définition d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement

Quand on lance une fois un dé à six faces bien équilibré, il est raisonnable de se dire que chaque nombre a une chance sur six d'être obtenu. On dit alors que la probabilité de chacun des six événements élémentaires est $p = \dfrac{1}{6}$.

Mais le dé peut être truqué (par la mise en place d'une petite bille de plomb à l'intérieur par exemple) de sorte que le 1 ait une chance sur deux d'être obtenu, le 2 et le 3 aient chacun une chance sur six d'être obtenus et le 4, le 5 et 6 aient une chance sur 18 d'être obtenus. Dans ce cas, on écrira $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = p_3 = \frac{1}{6}$ et $p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{18}$. Tout ce qui importe, c'est que les six nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 soient des nombres compris entre 0 et 1 au sens large et que

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{18} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

On dit alors que les 6 nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 définissent une loi de probabilité (on dit aussi une distribution de probabilités). De manière générale,

Définition 10

Soit Ω un univers associé à une certaine expérience aléatoire. On suppose que Ω est constitué de n issues où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose donc $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ où e_1, ..., e_n, sont les n issues.

Définir une **loi de probabilité** sur Ω consiste à associer à chacune des n événements élémentaires $\{e_1\}$, $\{e_2\}$, ..., $\{e_n\}$, n nombres p_1, ..., p_n, tels que

1) p_1 est par définition la probabilité de $\{e_1\}$, p_2 est par définition la probabilité de $\{e_2\}$, ..., p_n est par définition la probabilité de $\{e_n\}$,
2) $0 \leqslant p_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant p_2 \leqslant 1$, ..., $0 \leqslant p_n \leqslant 1$,
3) $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

☞ *En classe de seconde, on calcule des probabilités sur des univers **finis**, c'est-à-dire contenant un nombre fini d'issues. On ne s'intéressera donc pas par exemple, au tirage au sort d'un entier parmi tous les entiers.*

Une fois donnée une loi de probabilité sur un univers Ω, on peut alors définir la probabilité d'un événement quelconque.

Définition 11

Soit Ω un univers (fini) associé à une certaine expérience aléatoire. Soit A un événement (c'est-à-dire une partie de Ω).

Si A n'est pas vide (ou encore si A n'est pas l'événement impossible), la probabilité de A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A.

Si A est vide, la probabilité de A est 0.

Dans tous les cas, la probabilité d'un événement A est notée $\mathrm{P}(\mathrm{A})$.

On reprend l'exemple du lancer d'un dé truqué où $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = p_3 = \frac{1}{6}$ et $p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{18}$. On veut la probabilité de l'événement A : « on obtient un nombre pair ». Puisque $\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2} + \frac{2}{18} = \frac{9}{18} + \frac{2}{18} = \frac{11}{18} = 0,61\ldots$$

On a donc environ 61 chances sur 100 d'obtenir un nombre pair.

B La loi équirépartie

Un cas particulier important du calcul des probabilités est quand les différents événements élémentaires ont la même probabilité. C'est par exemple le cas quand on lance un dé à 6 faces bien équilibré. Chaque face a alors la même probabilité d'être obtenue, à savoir $\frac{1}{6}$.

Définition 12

Soit Ω un univers fini à n éléments associé à une certaine expérience aléatoire. Soit p_1, p_2, ..., p_n, une loi de probabilité sur Ω.

Cette loi de probabilité est **équirépartie** si et seulement si les événements élémentaires sont **équiprobables** ce qui équivaut à $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$.

Theoreme 1

Soit Ω un univers fini à n éléments associé à une certaine expérience aléatoire. Soit $p_1, p_2, \dots, p_n$, une loi de probabilité équirépartie sur Ω.

Alors $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \dfrac{1}{n}$.

Démonstration : On a $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ et donc

$$1 = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \underbrace{p_1 + p_1 + \dots + p_1}_{n \text{ termes}} = np_1.$$

Ainsi, $np_1 = 1$ puis $p_1 = \dfrac{1}{n}$. Finalement, $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \dfrac{1}{n}$.

■

Theoreme 2

Soit Ω un univers fini à n éléments associé à une certaine expérience aléatoire. Soit $p_1, p_2, \dots, p_n$, une loi de probabilité **équirépartie** sur Ω.

Soient A un événement puis k le nombre d'issues réalisant l'événement A (ou encore le nombre d'éléments de A). La probabilité de A est donnée par :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{k}{n}.$$

Démonstration : Si $k = 0$, $\mathrm{A} = \varnothing$ puis $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$ ou encore $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{0}{n}$.

Si $k \neq 0$, alors $\mathrm{A} \neq \varnothing$ et on peut poser $\mathrm{A} = \{a_1, \dots, a_k\}$. D'après le théorème précédent, $\mathrm{P}(\{a_1\}) = \dots = \mathrm{P}(\{a_k\}) = \dfrac{1}{n}$. Par définition d'une probabilité,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\{a_1\}) + \dots + \mathrm{P}(\{a_k\}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{k \text{ termes}} = \frac{k}{n}.$$

■

Par exemple, on lance un dé à six faces bien équilibré et on s'intéresse à l'événement A : « obtenir un nombre pair ». Il y a 6 événements élémentaires et, puisque le dé est bien équilibré, les six événements élémentaires sont équiprobables. Puisque $\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$, il y a 3 issues réalisant l'événement A. Donc,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Il y a une chance sur deux d'obtenir un nombre pair.

Remarque. Les issues sont souvent appelées « les cas possibles » et les issues réalisant l'événement A sont aussi appelées « les cas favorables ». La formule donnant la probabilité d'un événement A dans le cas d'une loi équirépartie s'écrit encore :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exercice 1

1) On lance deux fois une pièce de monnaie non truquée. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile.

2) Même question en lançant trois fois la pièce de monnaie.

Solution 1 :

1) On peut associer à l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois une pièce de monnaie l'univers $\Omega = \{(\mathrm{P}, \mathrm{P}), (\mathrm{P}, \mathrm{F}), (\mathrm{F}, \mathrm{P}), (\mathrm{F}, \mathrm{F})\}$, (P, P) signifiant qu'on obtient Pile au premier lancer et au deuxième lancer, (P, F) signifiant qu'on obtient Pile au premier lancer et Face au deuxième lancer, ...

Ω est constitué de 4 issues ou encore, il y a 4 cas possibles. D'autre part, les événements élémentaires sont équiprobables car la pièce n'est pas truquée. L'événement A : « on obtient au moins une fois Pile » est $A = \{(P,P),(P,F),(F,P)\}$. A est constitué de 3 issues ou encore il y a 3 cas favorables. On en déduit que

$$P(A) = \frac{3}{4} = 0,75.$$

En lançant deux fois une pièce de monnaie non truquée, on a trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois Pile.

2) Cette fois-ci, on prend $\Omega = \{(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(P,F,F),(F,P,P)(F,P,F)(F,F,P),(F,F,F)\}$, Il y a 8 cas possibles équiprobables. L'événement A : « on obtient au moins une fois Pile » est $A = \{(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(P,F,F),(F,P,P)(F,P,F)(F,F,P)\}$. Il y a 7 cas favorables. On en déduit que

$$P(A) = \frac{7}{8} = 0,875.$$

En lançant trois fois une pièce de monnaie non truquée, on a sept chances sur huit d'obtenir au moins une fois Pile.

■

C Propriétés des probabilités

Theoreme 3

Soit Ω un univers fini associé à une certaine expérience aléatoire. On suppose Ω muni d'une loi de probabilité quelconque.

Alors, $P(\varnothing) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.

Démonstration : Par définition, $P(\varnothing) = 0$ (l'événement impossible a une probabilité nulle d'être obtenu). D'autre part, si on pose $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ puis $p_1 = P(\{e_1\})$, $p_2 = P(\{e_2\})$, $\ldots$, $p_n = P(\{e_n\})$, on a

$$P(\Omega) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \ldots + P(\{e_n\}) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

(L'événement certain a une probabilité 1 d'être obtenu).

■

Theoreme 4

Soit Ω un univers fini associé à une certaine expérience aléatoire. On suppose Ω muni d'une loi de probabilité quelconque.

Soient A et B deux événements disjoints (ou encore incompatibles). Alors, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

☞ *La formule précédente se généralise à 3, 4, 5, $\ldots$ événements deux à deux disjoints. Par exemple, si A, B et C sont trois événements deux à deux disjoints, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.*

Démonstration : Soient A et B deux événements disjoints.

Si $A = \varnothing$, alors $A \cup B = B$ puis $P(A \cup B) = P(B)$. D'autre part, $P(A) + P(B) = 0 + P(B) = P(B)$. Dans ce cas, on a effectivement $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. De même, si $B = \varnothing$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Supposons maintenant $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$. On note k le nombre d'éléments de A et l le nombre d'éléments de B. On peut poser $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ et $B = \{b_1, \ldots, b_l\}$. On a alors $A \cup B = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l\}$. Puisque $A \cap B = \varnothing$, les issues a_1, $\ldots$, a_k, b_1, $\ldots$, b_l, sont deux à deux distinctes et donc

$$P(A \cup B) = P(\{a_1\}) + \ldots + P(\{a_k\}) + P(\{b_1\}) + \ldots + P(\{b_l\}) = P(A) + P(B).$$

■

Exercice 2

Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une carte. Calculer la probabilité d'obtenir un roi ou une dame.

Solution 2 : Il y a 32 cas possibles équiprobables. On note R l'événement « on obtient un roi », D l'événement « on obtient une dame » et A l'événement « on obtient un roi ou une dame ». L'événement R est constitué de quatre issues. Donc, $\mathrm{P(R)} = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$. De même, $\mathrm{P(D)} = \dfrac{1}{8}$.

Ensuite, $\mathrm{A} = \mathrm{R} \cup \mathrm{D}$ et de plus, $\mathrm{R} \cap \mathrm{D} = \varnothing$. Donc,

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(R)} + \mathrm{P(D)} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

En tirant au hasard une carte dans un jeu de trente-deux cartes, on a une chance sur quatre d'obtenir un roi ou une dame.

■

Theoreme 5

Soit Ω un univers fini associé à une certaine expérience aléatoire. On suppose Ω muni d'une loi de probabilité quelconque.

Soit A un événement. Alors, $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \mathrm{P(A)}$.

Démonstration : Soit A un événement. Les événements A et $\overline{\mathrm{A}}$ sont incompatibles. Donc, d'après les deux théorèmes précédents

$$\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}}\right) = \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

Ainsi, $\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1$ et donc $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \mathrm{P(A)}$.

■

Exercice 3

On reprend l'exercice 1, page 6. On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile.

Solution 3 : On prend toujours $\Omega = \{(\mathrm{P,P,P}), (\mathrm{P,P,F}), (\mathrm{P,F,P}), (\mathrm{P,F,F}), (\mathrm{F,P,P})(\mathrm{F,P,F})(\mathrm{F,F,P}), (\mathrm{F,F,F})\}$, Il y a 8 cas possibles équiprobables. L'événement contraire de l'événement A : « on obtient au moins une fois Pile » est l'événement $\overline{\mathrm{A}}$: « on obtient trois fois Face ». $\overline{\mathrm{A}}$ est constitué d'une seule issue à savoir $(\mathrm{F,F,F})$. Donc, $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{1}{8}$ puis

$$\mathrm{P(A)} = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

■

Theoreme 6

Soit Ω un univers fini associé à une certaine expérience aléatoire. On suppose Ω muni d'une loi de probabilité quelconque.

Soient A et B deux événements. Alors, $\mathrm{P(A \cup B)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A \cap B)}$.

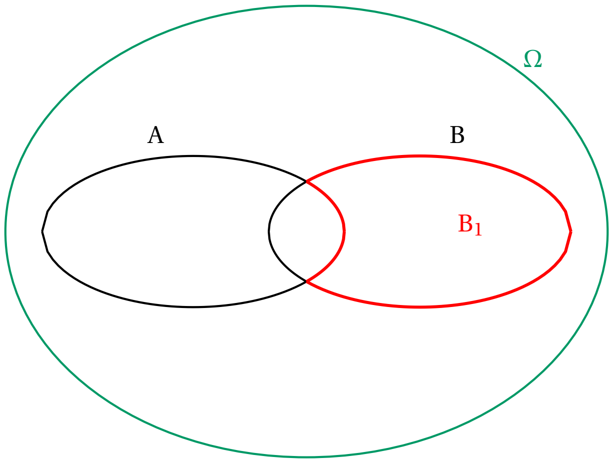
Démonstration : Soient A et B deux événements.

• Si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$, alors A et B sont disjoints puis

$$\mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - 0 = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} = \mathrm{P(A \cup B)}.$$

Dorénavant, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \varnothing$ (et donc en particulier $\mathrm{A} \neq \varnothing$ et $\mathrm{B} \neq \varnothing$).

• On note B_1 l'ensemble des issues qui sont dans B et pas dans A. Vérifions que $A \cup B = A \cup B_1$.



Si une issue e est dans $A \cup B_1$, elle est dans A ou dans B_1 et donc elle est dans A ou dans B car toute issue de B_1 est dans B. Mais alors, e est dans $A \cup B$.
Inversement, soit e une issue de $A \cup B$. Si e est dans A, alors e est dans $A \cup B_1$. Sinon, e n'est pas dans A mais est dans B et est donc dans B_1. Par suite, e est dans $A \cup B_1$.
Finalement, toute issue de $A \cup B$ est dans $A \cup B_1$ et toute issue de $A \cup B_1$ est dans $A \cup B$. Ceci montre que $A \cup B = A \cup B_1$.

• Puisque aucun élément de B_1 n'est dans A, on a $A \cap B_1 = \varnothing$. Donc, $P(A \cup B) = P(A \cup B_1) = P(A) + P(B_1)$.

• Vérifions alors que $P(B_1) = P(B) - P(A \cap B)$. Pour cela, vérifions d'abord que $B = (A \cap B) \cup B_1$.

Un élément de B est soit un élément de A et donc dans $A \cap B$, soit n'est pas élément de A et est donc un élément de B_1. Ainsi, tout élément de B est soit dans $A \cap B$, soit dans B_1 et donc tout élément de B est un élément de $(A \cap B) \cup B_1$. Inversement, un élément de $(A \cap B) \cup B_1$ est soit dans $A \cap B$, soit dans B_1 et donc, dans tous les cas, un élément de $(A \cap B) \cup B_1$ est un élément de B. Finalement, $B = (A \cap B) \cup B_1$.

Mais cette fois-ci, $(A \cap B) \cap B_1 = \varnothing$ car par exemple, un élément de B_1 n'est pas dans A et n'est donc pas dans $A \cap B$. On en déduit que

$$P(B) = P((A \cap B) \cup B_1) = P(A \cap B) + P(B_1)$$

et donc que $P(B_1) = P(B) - P(A \cap B)$.

• Finalement, $P(A \cup B) = P(A) + P(B_1) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

■

Exercice 4

On tire au hasard une carte dans un jeu de trente-deux cartes. Calculer la probabilité d'obtenir un roi ou un pique.

Solution 4 : Il y a 32 cas possibles équiprobables. On note A l'événement « on obtient un roi », B l'événement « on obtient un pique » et C l'événement « on obtient un roi ou un pique ».

L'événement A est constitué de quatre issues. Donc, $P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.

L'événement B est constitué de 8 issues. Donc, $P(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.

L'événement $A \cap B$ est constitué d'une seule issue (le roi de pique). Donc, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$.

L'événement C est l'événement $A \cup B$. Donc,

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}.$$

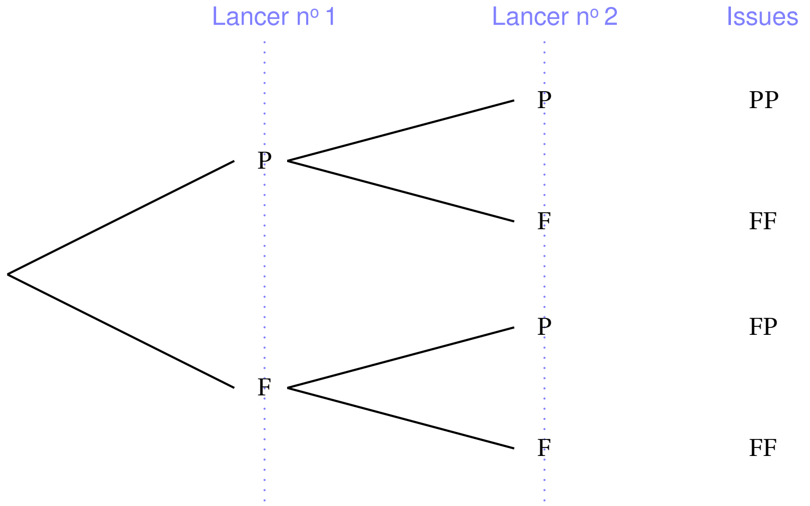
En tirant au hasard une carte dans un jeu de trente-deux cartes, on a onze chances sur trente-deux d'obtenir un roi ou un pique.

■

D Utilisation d'arbres ou de tableaux pour dénombrer

• On lance deux fois une pièce de monnaie non truquée. On est donc dans une situation d'équiprobabilité des événements élémentaires. Pour calculer des probabilités, on a alors besoin de **dénombrer** ou encore de compter des nombres d'issues.

On a 4 possibilités : (P,P), (P,F), (F,P), (F,F). Imaginons nous poser la même question en lançant trois, quatre, cinq ou six fois la pièce (ce que nous ne ferons pas en classe de seconde). Cela devient vite inabordable. Nous avons besoin d'une représentation efficace pour compter les différentes possibilités. L'une d'entre elles est un **arbre** :

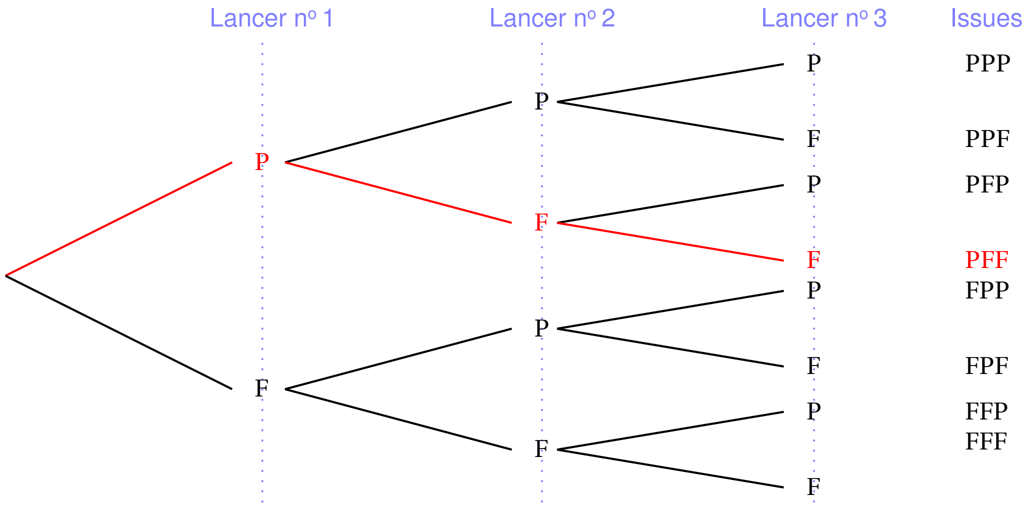


On voit clairement les différentes issues en suivant des **chemins** dans l'arbre (en partant de la gauche, il y a quatre chemins ou encore quatre issues). On peut aussi représenter la même expérience dans un **tableau** :

Deuxième lancer / Premier lancer	Pile	Face
Pile	PP	PF
Face	FP	FF

Le nombre d'issues est alors le nombre de cases rouges du tableau, à savoir 2×2 ou encore 4.

• Si on lance trois fois la pièce, le tableau devient inutilisable mais on peut toujours construire un **arbre** :

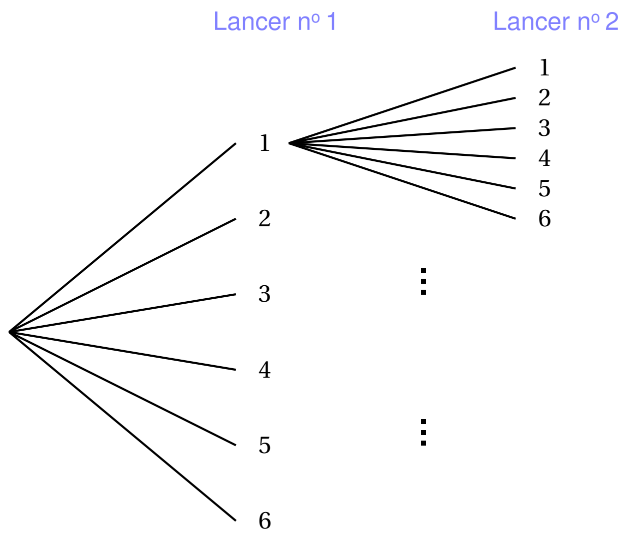


Les trois étapes de l'expérience (les trois lancers de pièce) apparaissent clairement de gauche à droite.

Chaque trait est une **branche** de l'arbre et en rouge, on a fait apparaître un **chemin** dans l'arbre, le chemin PFF, qui symbolise l'événement « on a obtenu Pile au premier lancer, Face au deuxième lancer et Face au troisième lancer ». Un chemin commence complètement à gauche et finit complètement à droite.

Le nombre de cas possibles de cette expérience est alors le nombre de chemins dans cet arbre. Il s'obtient mécaniquement par multiplication.
Pour parvenir à la première étape (le premier lancer), il y a deux chemins (à une seule branche).
Pour parvenir à la deuxième étape (le deuxième lancer), chacune de ces deux branches se divise en deux nouvelles branches et donc, pour parvenir à la deuxième étape, il y a $2 \times 2 = 4$ chemins : PP, PF, FP et FF.
Pour parvenir à la troisième étape, chacune des quatre branches finissant chacun des quatre chemins menant à la deuxième étape, se divise en deux. Il y a donc 4×2 ou encore $2 \times 2 \times 2$ chemins dans l'arbre, soit huit chemins.

• Essayons la même représentation pour deux lancers successifs d'un dé à six faces. Le nombre de chemins est 6×6 ou encore 36. Cela devient compliqué et on peut ne représenter qu'une partie suffisamment explicite de l'arbre :



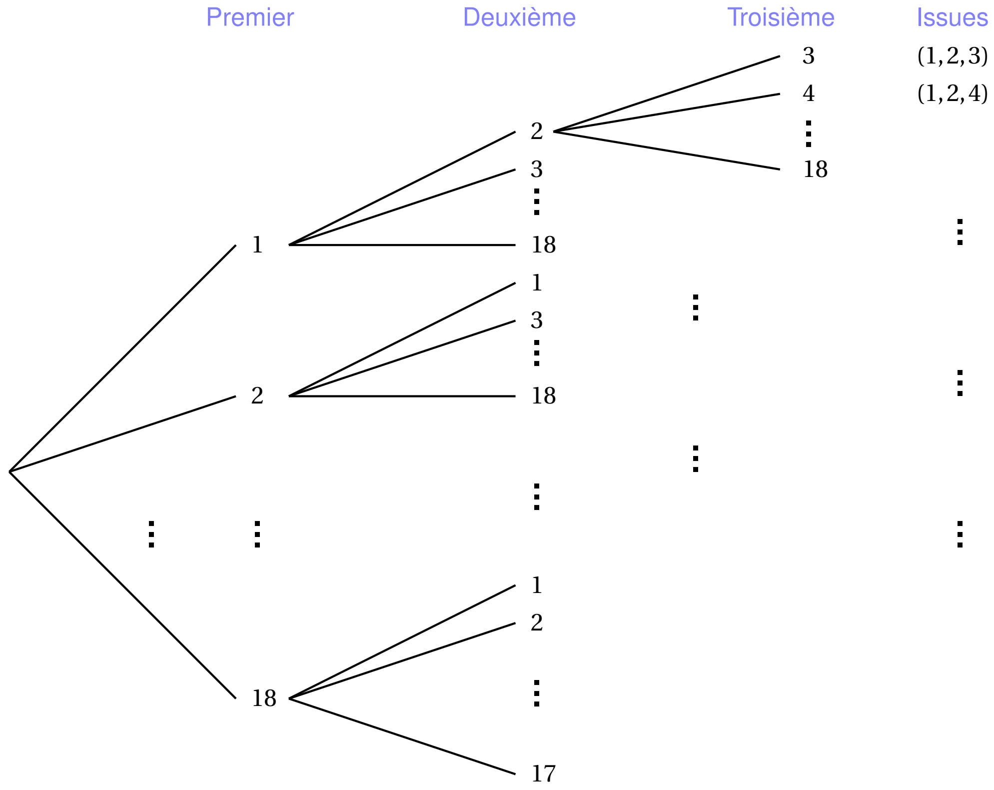
Cette représentation nous montre encore une fois clairement que le nombre de chemins, c'est-dire le nombre d'issues, est 6×6 ou encore 36.

• Dans le premier exemple (successions de Pile ou Face), nous avions la possibilité de répéter plusieurs fois une même lettre (par exemple PPF puis Pile puis encore Pile puis Face). Il en était de même dans le deuxième exemple des deux lancers de dé) où nous pouvions obtenir plusieurs fois un même nombre (par exemple, 1 puis encore 1). Nous étions face à des **suites ordonnées avec répétition**.

Il existe des situations où l'on a pas droit aux répétitions comme par exemple le tiercé. Une course de chevaux est constituée de 18 partants numérotés de 1 à 18. On veut compter le nombre d'arrivées possibles des trois premiers en admettant qu'il n'y a pas d'ex æquo ni d'abandons, pour pouvoir ensuite déterminer la probabilité de gagner au tiercé en jouant au hasard.

Dans cette situation, une issue est une suite ordonnée de trois numéros sans répétition d'un même numéro du type $(1,2,3)$ ou $(13,2,5)$.

L'arbre est très gros et nous ne pouvons en faire apparaître qu'une petite partie :



Ici, nous étions face à des **suites ordonnées sans répétition**. A la première étape, nous avions 18 branches. Puisqu'il n'y a pas de répétition des numéros (en raison de l'absence d'ex æquo), chacune de ces 18 branches se divise en 17 nouvelles branches. Le nombre d'arrivées possibles des deux premiers ou encore de chemins de longueur 2 démarrant à l'origine de l'arbre est 18×17. Pour aller à la troisième étape, chacun de ces 18×17 chemins donne naissance à 16 nouvelles branches (par exemple, si le premier arrivé porte le numéro 1 et le deuxième arrivé porte le numéro 2, le troisième ne peut plus être ni le 1, ni le 2). Il y a donc au total $18 \times 17 \times 16$ chemins de longueur 3 dans l'arbre ou encore

il y a $4\,896$ arrivées possibles des trois premiers.

Si maintenant on joue au hasard, on a donc une chance sur $4\,896$ de gagner au tiercé (la probabilité de gagner est $p = \dfrac{1}{4\,896}$).

E Modélisation

Modéliser correctement une expérience aléatoire est un problème fondamental du calcul des probabilités. **Modéliser consiste à choisir un univers puis une loi de probabilité sur cet univers**.

• Analysons un exemple. On croise dans la rue un couple dont on sait qu'il a deux enfants. Ce couple est accompagné d'une fille qu'il nous présente comme un de leurs deux enfants. On se demande alors quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon. Si on répond sans prendre la peine de poser correctement le problème, on dit « ben, une chance sur deux évidemment ».

Posons correctement le problème. Le couple a une fille et donc il y a trois possibilités qui sont (G, F), (F, G), (F, F) (G pour garçon et F pour fille) où le premier enfant écrit est le premier enfant arrivé ou encore l'ainé(e). On a ainsi **choisi l'univers** : $\Omega = \{(G, F), (F, G), (F, F)\}$. Les trois situations sont bien sûr équiprobables (en admettant que pour chaque enfant, il y a une chance sur deux que ce soit un garçon et une chance sur deux que ce soit une fille, ce qui n'est pas tout à fait exact dans la réalité). On a donc **défini la loi de probabilité** : $P(\{(G, F)\}) = P(\{F, G\}) = P(\{F, F\}) = \dfrac{1}{3}$ (nous sommes dans une situation d'équiprobabilité des événements élémentaires)

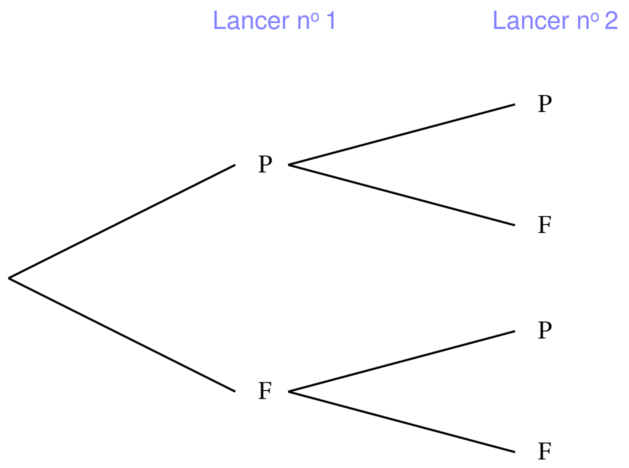
Maintenant, l'événement « l'autre enfant est un garçon » est l'événement $\{(G, F), (F, G)\}$. Sa probabilité est

$$P(\{(G, F), (F, G)\}) = P(\{(G, F)\}) + P(\{(F, G)\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Il y a donc deux chances sur trois que l'autre enfant soit un garçon. Cet exemple montre à quel point il est important de bien modéliser (l'histoire des mathématiques est remplie d'exemples de calculs de probabilités faux).

• Analysons un deuxième exemple : « si je lance une pièce de monnaie non truquée, j'ai une chance sur deux d'obtenir Pile. Donc, si je la lance deux fois, j'ai deux chances sur deux d'obtenir un Pile ou encore je suis sûr d'obtenir au moins un Pile ».
La conclusion est évidemment fausse puisqu'on peut obtenir deux fois un Face au cours des deux lancers avec une probabilité non nulle. Encore une fois, pour calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile, **modélisons**.

Aux deux lancers successifs d'une pièce de monnaie bien équilibrée, on associe l'univers $\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$.
Les quatre événements élémentaires sont équiprobables car la pièce est bien équilibrée et ils ont donc chacun une probabilité égale à $\frac{1}{4}$. On visualise l'expérience avec un arbre :



On note A l'événement « on obtient au moins une fois un Pile » : $A = \{(P,P),(P,F),(F,P)\}$. Sa probabilité est :

$$P(A) = P(\{(P,P)\}) + P(\{P,F\}) + P(\{F,P)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

En lançant, deux fois une pièce de monnaie non truquée, on a trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois un Pile.