Planche n° 12. Suites et séries de fonctions

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1

Etudier les suites de fonctions suivantes (convergence simple, convergence uniforme, convergence localement uniforme)

$$\textbf{1) (**)}\ f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\quad \textbf{2) (**)}\ f_n(x)=e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\quad \textbf{3) (**)}\ f_n(x)=n(1-x)^n\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Exercice n° 2 (* I)**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } x\in[0,n]\\ 0 \text{ si } x\geqslant n\end{cases}$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f\ :\ x\mapsto e^{-x}$.

Exercice n° 3 (* I)** (Polynômes de Bernstein. Théorème de Weierstrass).

1) Soit f une application continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour n entier naturel non nul, on définit le n-ème polynôme de Bernstein associé à f par

$$B_n(f)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)X^k(1-X)^{n-k}.$$

a) Calculer $B_n(f)$ quand f est la fonction $x\mapsto 1$, quand f est la fonction $x\mapsto x$, quand f est la fonction $x\mapsto x(x-1)$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nX)^2X^k(1-X)^{n-k}=nX(1-X)$.

2) En séparant les entiers k tels que $\left|x-\dfrac{k}{n}\right|>\alpha$ et les entiers k tels que $\left|x-\dfrac{k}{n}\right|\leqslant\alpha$ ($\alpha>0$ donné), montrer que la suite de polynômes $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

3) Montrer le théorème de Weierstrass : soit f une application continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.

Exercice n° 4 (I)**

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.

Exercice n° 5 (**)

Soit $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\sin(nx)}{n}$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

2) Calculer $f'(x)$ et en déduire que pour tout réel x de $]-1,1[$, $f(x)=\text{Arctan}\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$.

Exercice n° 6 (**)

Soit $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1) Vérifier que f est bien définie sur $]1,+\infty[$.

2) Limites de f en 1 et $+\infty$.

3) Montrer que f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Exercice n° 7 (**)

Etudier (convergence simple, convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) les séries de fonctions de termes généraux :

1) $f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}^+$ **2)** $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^3x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ **3)** $f_n(x) = (-1)^n\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

Exercice n° 8 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(t) = (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$.

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la série de terme général f_n puis la continuité de la somme f.

2) Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$ à l'aide de la formule de STIRLING.

Exercice n° 9 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, soit $f_n(t) = \dfrac{\text{Arctan}(nt)}{n^2}$.

Etude complète de $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$: domaine de définition, parité, limites, continuité, dérivabilité (vérifier que f n'est pas dérivable en 0), allure du graphe .

Exercice n° 10 (**)

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$. Trouver un équivalent simple de f en 0 à droite.

Exercice n° 11 (***)

Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$. Trouver un équivalent simple de f en 1 (on admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$).