Planche n° 12. Fonctions puissances. Corrigé

Exercice n° 1

1) La fonction $u_1 : x \mapsto x^2+1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et positive sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $f_1 = \sqrt{u_1}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $u_1 : x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $f_1 = \sqrt{u_1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $u_2 : x \mapsto x^3+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Donc, la fonction $f_2 = \sqrt[3]{u_2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Etudions la dérivabilité de la fonction f_2 en -1. Pour $x \neq -1$,

$$\frac{f_2(x)-f_2(-1)}{x-(-1)} = \frac{\sqrt[3]{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}}{x+1} = \frac{\sqrt[3]{x^2-x+1}}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}.$$

Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{f_2(x)-f_2(-1)}{x-(-1)} = +\infty$. La fonction f_2 n'est pas dérivable en -1.

En résumé, la fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et pas dérivable en -1.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_3(x)$ existe $\Leftrightarrow x^3-x^4 \geqslant 0$. Or, pour tout réel x,

$$\mathrm{sgn}\left(x^3-x^4\right) = \mathrm{sgn}\left(x^3(1-x)\right) = \mathrm{sgn}\left(x(1-x)\right).$$

Donc, pour tout réel x, $f(x)$ existe si et seulement si $x \in [0,1]$. Le domaine de définition de la fonction f_3 est $[0,1]$.

La fonction $u_3 : x \mapsto x^3-x^4$ est dérivable sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]0,1[$. Donc, la fonction $f_3 = \sqrt{u_3}$ est dérivable sur $]0,1[$.

Dérivabilité en 0 (à droite). Pour $x \in]0,1]$,

$$\begin{aligned}\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} &= \frac{\sqrt{x^3(1-x)}}{x} = \frac{\sqrt{x^3}\sqrt{1-x}}{x} \text{ (car } x^3 \geqslant 0 \text{ et } 1-x \geqslant 0)\\ &= \frac{x^{3/2}}{x}\sqrt{1-x} = \sqrt{x}\sqrt{1-x}.\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = 0$. La fonction f_3 est dérivable en 0.

Dérivabilité en 1 (à gauche). Pour $x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned}\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} &= \frac{\sqrt{x^3(1-x)}}{x-1} = -\frac{\sqrt{x^3}\sqrt{1-x}}{1-x}\\ &= -\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{1-x}}.\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = -\infty$. La fonction f_3 n'est pas dérivable en 1.

En résumé, la fonction f_3 est définie sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$ et pas dérivable en 1.

Exercice n° 2

1) Pour tout réel x, $f_1(x) = \sqrt{x^2+1}$ puis

$$f_1'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2) Pour tout réel x, $f_2(x) = \left(x^3+1\right)^{1/3}$ puis, pour tout réel x différent de -1,

$$f_2'(x) = \frac{1}{3}\times\left(3x^2\right)\times\left(x^3+1\right)^{-2/3} = \frac{x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2}.$$

3) Pour tout réel x, $f_3(x) = \left(x^2+x+1\right)^{-3/4}$ puis pour tout réel x

$$f_3'(x) = -\frac{3}{4} \times (2x+1) \times \left(x^2+x+1\right)^{-7/4} = -\frac{3(2x+1)}{4\left(\sqrt[4]{x^2+x+1}\right)^7}.$$

4) Pour tout réel x, $f_4(x) = x\left(x^2+1\right)^{-1/2}$ puis, pour tout réel x

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= 1 \times \left(x^2+1\right)^{-1/2} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)\left(x^2+1\right)^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

5) f_5 est définie sur $]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$, dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et pour $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$,

$$f_5'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{(x+1)^{3/2}(x-1)^{1/2}} \text{ si } x > 1 \\ \dfrac{1}{(-1-x)^{3/2}(1-x)^{1/2}} \text{ si } x < -1 \end{array} \right. .$$

Exercice n° 3

1) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) = +\infty$.

• Pour tout $x < 0$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x+1}+x &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-x} = \frac{x+1}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-x} \\ &= \frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1\right)} = \frac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) = -\dfrac{1}{2}$.

2) Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3+1}-x &= \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2} = \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3 - x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}. \end{aligned}$$

Le dénominateur de cette fraction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right) = 0$.

3) • **1 ère solution.** Pour $x \geqslant -\dfrac{7}{2}$ et $x \neq 1$,

$$\frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1} = \frac{\left(\sqrt{2x+7}-3\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)} = \frac{2x-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)} = \frac{2}{\sqrt{2x+7}+3}$$

et donc $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1} = \dfrac{1}{3}$.

2 ème solution. Pour $x \geqslant -\dfrac{7}{2}$, posons $f(x) = \sqrt{2x+7}$. Pour $x \geqslant -\dfrac{7}{2}$ et $x \neq 1$,

$$\frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

f est dérivable en 1 et donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1} = f'(1) = \dfrac{2}{2\sqrt{2\times 1+7}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

• **1 ère solution.** Pour $x \geqslant -\dfrac{5}{2}$ et $x \neq -2$,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2x+5}-1}{\sqrt{3x+15}-3} &= \frac{\left(\sqrt{2x+5}-1\right)\left(\sqrt{2x+5}+1\right)\left(\sqrt{3x+15}+3\right)}{\left(\sqrt{3x+15}-3\right)\left(\sqrt{3x+15}+3\right)\left(\sqrt{2x+5}+1\right)} = \frac{(2x+4)\left(\sqrt{3x+15}+3\right)}{(3x+6)\left(\sqrt{2x+5}+1\right)}\\ &= \frac{2\left(\sqrt{3x+15}+3\right)}{3\left(\sqrt{2x+5}+1\right)}\end{aligned}$$

et donc $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{2x+5}-1}{\sqrt{3x+15}-3} = \dfrac{2\times 6}{3\times 2} = 2$.

2 ème solution. Pour $x \geqslant -\dfrac{5}{2}$, posons $f(x) = \sqrt{2x+5}$ et $g(x) = \sqrt{3x+15}$. Pour $x \geqslant -\dfrac{5}{2}$ et $x \neq -2$,

$$\frac{\sqrt{2x+5}-1}{\sqrt{3x+15}-3} = \frac{\sqrt{2x+5}-1}{x+2} \times \frac{x+2}{\sqrt{3x+15}-3} = \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} \times \frac{x-(-2)}{g(x)-g(-2)}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{2x+5}-1}{\sqrt{3x+15}-3} = \dfrac{f'(-2)}{g'(-2)} = \dfrac{\dfrac{2}{2\sqrt{2\times(-2)+5}}}{\dfrac{3}{2\sqrt{3\times(-2)+15}}} = 2$.

Exercice n° 4

Domaine de définition. Soit x un réel. $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 1$ et $\dfrac{x^3}{x-1} \geqslant 0$.

Pour $x \neq 1$, $\dfrac{x^3}{x-1}$ a le même signe que $x(x-1)$. Donc pour $x \neq 1$, $\dfrac{x^3}{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.

$$\text{f est définie sur } D =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[.$$

Dérivabilité en 0 à gauche. Soit $x < 0$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2\times x}{x-1}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}} = -\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $-\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ tend vers 0 et donc $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.

$$\text{f est donc dérivable (à gauche) en 0 et } f'(0) = 0.$$

Etude en $+\infty$. Pour $x > 1$,

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}} = \frac{x}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} = 1$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ensuite, pour $x > 1$,

$$f(x) - x = \frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} - x = x\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} - 1\right) = x\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + 1\right)}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + 1}$$

$$= x\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + 1} = x\frac{\frac{1/x}{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + 1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + 1}.$$

L'expression précédente tend vers $\frac{1}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ et donc $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

Etude en $-\infty$. Pour $x < 0$,

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = -\frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Ensuite, pour $x < 0$,

$$f(x) + x = -\frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + x = -\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + 1}.$$

L'expression précédente tend vers $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ et donc $f(x) - \left(-x - \frac{1}{2}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$. On en déduit que la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$.

Dérivée et variations. Pour $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$,

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^3}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|x|^3}{|x-1|}\right) = \frac{1}{2}\left(3\ln(|x|) - \ln(|x-1|)\right)$$

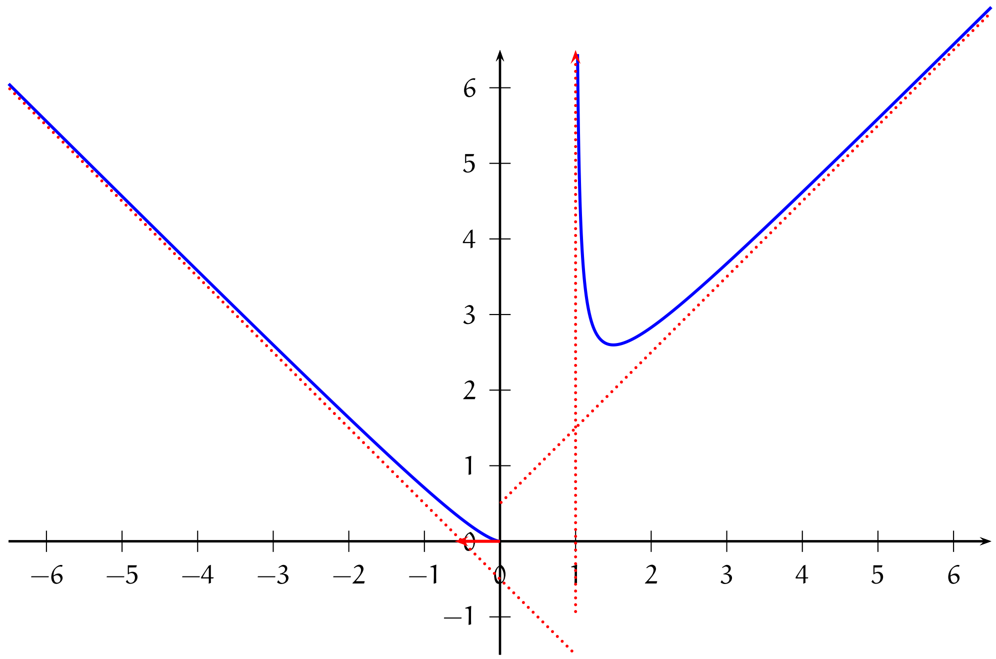
puis

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{2x-3}{2x(x-1)}.$$

Pour $x \in D$, $f(x) > 0$ et $x(x-1) > 0$, donc pour tout x de D, $f(x)$ est du signe de $2x - 3$. On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe.



Exercice n° 6 Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
2^{4\cos^2 x+1} + 16.2^{4\sin^2 x-3} = 20 &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x+1} + 16\times 2^{1-4\cos^2 x} = 20 \Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x} - 10 + 16\times 2^{-4\cos^2 x} = 0\\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x} - 10 + \frac{16}{2^{4\cos^2 x}} = 0 \Leftrightarrow \left(2^{4\cos^2 x}\right)^2 - 10\times 2^{4\cos^2 x} + 16 = 0\\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x} = 2 \text{ ou } 2^{4\cos^2 x} = 8 \Leftrightarrow 4\cos^2 x = 1 \text{ ou } 4\cos^2 x = 3\\
&\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right).
\end{aligned}$$

