FICHE n° 12. RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS.

I Généralités

Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle apparaît une **inconnue**. **Résoudre** une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs que peut prendre l'inconnue telles que l'inégalité est vraie. L'ensemble de ces valeurs est l'**ensemble des solutions de l'inéquation**.

Définition 1

Deux inéquations sont **équivalentes** si et seulement si ces deux équations ont le même ensemble de solutions.

Certaines manipulations transforment une inéquation en une inéquation équivalente :

- Ajouter à chaque membre de l'inégalité un même réel.
- Simplifier chaque membre de l'inégalité par un même réel pour l'addition.
- Faire passer de l'autre côté du signe $\leqslant$ (ou $<$ ou $\geqslant$ ou $>$) un réel pour l'addition.

Avec la multiplication, il y a des problèmes supplémentaires :

- Simplifier chaque membre de l'inégalité pour la multiplication par un même réel **strictement positif** transforme une inéquation en une inéquation équivalente.
- Simplifier chaque membre de l'inégalité pour la multiplication par un même réel **strictement négatif** en changeant le sens de l'inégalité transforme une inéquation en une inéquation équivalente.
- Multiplier chaque membre de l'inégalité par un même réel **strictement positif** transforme une inéquation en une inéquation équivalente.
- Multiplier chaque membre de l'inégalité par un même réel **strictement négatif** en changeant le sens de l'"inégalité transforme une inéquation en une inéquation équivalente.
- Faire passer de l'autre côté du signe $\leqslant$ (ou $<$ ou $\geqslant$ ou $>$) pour la multiplication un réel **strictement positif** transforme une inéquation en une inéquation équivalente.
- Faire passer de l'autre côté du signe $\leqslant$ (ou $<$ ou $\geqslant$ ou $>$) pour la multiplication un réel **strictement négatif** en changeant le sens de l'inégalité transforme une inéquation en une inéquation équivalente.

Par exemple, l'inéquation $-2x < 3$ est équivalente à l'inéquation $x > \dfrac{3}{-2}$.

II Inéquations diverses

1 Inéquations du premier degré

La démarche est la même que pour les équations : on isole l'inconnue dans le membre de gauche. Il y a tout de même une nuance : en fin de résolution, on doit prendre garde à la division éventuelle par un nombre strictement négatif qui change le sens de l'inégalité.

Par exemple, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{3} \leqslant \frac{5x-3}{2} &\Leftrightarrow 2(2x+1) \leqslant 3(5x-3) \text{ (on supprime tout de suite les fractions)}\\
&\Leftrightarrow 4x+2 \leqslant 15x-9 \Leftrightarrow 4x-15x = \leqslant 2-9 \text{ (on isole } x \text{ dans le membre de gauche)}\\
&\Leftrightarrow -11x \leqslant -11\\
&\Leftrightarrow x \geqslant \frac{-11}{-11} \text{ (la division des deux membres par } -11 \text{ change le sens de l'inégalité)}\\
&\Leftrightarrow x \geqslant 1.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $[1, +\infty[$.

2 Inéquations avec des produits ou des quotients

Quand on doit résoudre une inéquation du type $\mathrm{A} \leqslant 0$ (ou $\geqslant$ ou $<$ ou >0) où A est un produit ou quotient, on fait un tableau de signes qui fournit le signe de A puis on lit ce tableau pour fournir l'ensemble des solutions.

Par exemple, on veut résoudre l'inéquation $\dfrac{-x+3}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0$. On donne le signe de $\dfrac{-x+3}{(x-1)(x+1)}$ en fonction de x dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$-x+3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{-x+3}{(x-1)(x+1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dans le tableau de signes, on lit l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de l'inéquation proposée : $\mathscr{S} =]-1,1[\cup[3,+\infty[$.

Quand on doit résoudre une inéquation du type $\mathrm{A} \leqslant \mathrm{B}$ (ou $\geqslant$ ou $<$ ou >0), on se ramène à la situation précédente en écrivant l'inéquation sous la forme $\mathrm{A}-\mathrm{B} \leqslant 0$.

Par exemple, on veut résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \dfrac{2}{x+1}$. Pour tout réel x différent de -1 et 1,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1} \leqslant \frac{2}{x+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-2x+2}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0.\end{aligned}$$

D'après plus haut, l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de l'inéquation proposée est $\mathscr{S} =]-1,1[\cup[3,+\infty[$.

