Chapitre 12. Ensembles dénombrables

Plan du chapitre

1 Définition d'un ensemble dénombrable

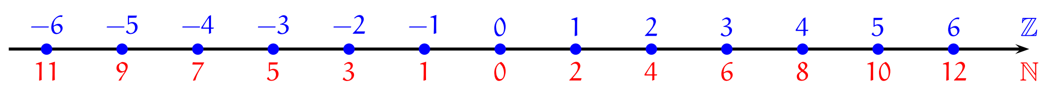
Définition 1. Soit E un ensemble. E est **dénombrable** si et seulement si il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.

⇛ **Commentaire**.

◇ *Les éléments d'un ensemble dénombrable peuvent être « égrenés » les uns après les autres : le premier, le deuxième, le troisième ... Dit autrement, un ensemble dénombrable E peut être décrit comme l'ensemble des valeurs d'une suite :* $E = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. ❏

◇ *Si φ est une bijection de E sur $\mathbb{N}$, alors φ^{-1} est une bijection de $\mathbb{N}$ sur E et si φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur E, alors φ^{-1} est une bijection de E sur $\mathbb{N}$. Donc, on a aussi : E est dénombrable si et seulement si il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$.*

Exemple 1. Soit $\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{array}\right. \end{array}$ est une bijection.



En effet, φ est bien une application. Soit alors $\begin{array}{rccl} \psi : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 2n \text{ si } n \geqslant 0 \\ -(2n+1) \text{ si } n < 0 \end{array}\right. \end{array}$.

ψ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\psi(\varphi(n)) = \left\{\begin{array}{l} 2\varphi(n) \text{ si } \varphi(n) \geqslant 0 \\ -(2\varphi(n)+1) \text{ si } \varphi(n) < 0 \end{array}\right.$. De plus, $\varphi(n) \geqslant 0 \Leftrightarrow n$ est pair et donc

$$\psi(\varphi(n)) = \left\{\begin{array}{l} 2 \times \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\left(2\left(-\dfrac{n+1}{2}\right)+1\right) \text{ si } n \text{ est impair} \end{array}\right. = n.$$

De même, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(\psi(n)) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2n}{2} \text{ si } n \geqslant 0 \\ -\dfrac{-(2n+1)+1}{2} \text{ si } n < 0 \end{array}\right. = n.$$

Donc, $\psi \circ \varphi = Id_{\mathbb{N}}$ et $\varphi \circ \psi = Id_{\mathbb{Z}}$. On sait alors que φ est une bijection et que $\psi = \varphi^{-1}$. Puisqu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z} \text{ est dénombrable.}$$

❏

Exemple 2. Soit $\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ & n & \mapsto & 2n \end{array}$. φ est une bijection de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels sur l'ensemble $2\mathbb{N}$ des entiers pairs. Donc,

$$2\mathbb{N} \text{ est dénombrable.}$$

❏

Théorème 1. Si E est un ensemble dénombrable et si F est un ensemble en bijection avec E, alors F est dénombrable.

Démonstration. Soit f une bijection de E sur $\mathbb{N}$ et soit g une bijection de F sur E. Alors, $g \circ f$ est une bijection de F sur $\mathbb{N}$ et donc F est dénombrable. ❏

2 Divers types d'ensembles dénombrables

On a vu précédemment que $2\mathbb{N}$ est dénombrable. Plus généralement :

Théorème 2. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration . Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. Construisons une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur A.

• A est en particulier une partie non vide de $\mathbb{N}$. Donc, A admet un plus petit élément que l'on note $\varphi(0)$. Puisque A est infinie, $A \setminus [\![0, \varphi(0)]\!]$ est encore infinie et en particulier n'est pas vide. Donc, $A \setminus [\![0, \varphi(0)]\!]$ admet donc un plus petit élément que l'on note $\varphi(1)$. Par construction, $\varphi(1) > \varphi(0)$. De plus, $A \cap]\!]\varphi(0), \varphi(1)]\!] = \{\varphi(1)\}$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons avoir construit $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ tels que $\varphi(0) < \dots < \varphi(n)$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $A \cap]\!]\varphi(k-1), \varphi(k)]\!] = \{\varphi(k)\}$.
Puisque A est infinie, $A \setminus [\![0, \varphi(n)]\!]$ est encore infinie et en particulier, $A \setminus [\![0, \varphi(n)]\!]$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. $A \setminus [\![0, \varphi(n)]\!]$ admet un plus petit élément que l'on note $\varphi(n+1)$. Par construction, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $A \cap]\!]\varphi(n), \varphi(n+1)]\!] = \{\varphi(n+1)\}$.

On vient de construire par récurrence une application φ de $\mathbb{N}$ dans A, strictement croissante et donc injective.

Soit alors $y \in A$. Si $y \in [\![0, \varphi(0)]\!]$, alors $y \in [\![0, \varphi(0)]\!] \cap A = \{\varphi(0)\}$ et donc $y = \varphi(0) \in \varphi(\mathbb{N})$.
Sinon, puisque la suite $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(k-1) < y \leqslant \varphi(k)$. On en déduit que $y \in A \cap]\!]\varphi(k-1), \varphi(k)]\!] = \{\varphi(k)\}$ et donc que $y = \varphi(k) \in \varphi(\mathbb{N})$.

On a montré que $\varphi(\mathbb{N}) = A$ et donc que φ est surjective. Finalement, φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur A ou encore A est dénombrable.

❑

Une conséquence du théorème 1 est :

Théorème 3. Un ensemble non vide est fini ou dénombrable si et seulement si il est en bijection avec une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Démonstration . Soit E un ensemble non vide fini ou dénombrable. Si E est fini, on sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$ (n est alors le cardinal de E). Si E est infini dénombrable, E est en bijection avec $\mathbb{N}$. Dans tous les cas, E est en bijection avec une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Réciproquement, soit E est un ensemble non vide tel qu'il existe une bijection f de E sur une certaine partie non vide A de $\mathbb{N}$.
Si A est finie, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et g bijection de A sur $[\![1, n]\!]$ (où n est le cardinal de A). Mais alors, $g \circ f$ est une bijection de E sur $[\![1, n]\!]$ et donc E est fini (de cardinal n).
Si A est infinie, d'après le théorème 1, A est dénombrable et donc il existe une bijection g de A sur $\mathbb{N}$. Dans ce cas, $g \circ f$ est une bijection de E sur $\mathbb{N}$ et donc E est dénombrable.

❑

Théorème 4. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Démonstration . Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}^* \\ (m, p) & \mapsto & 2^m(2p+1) \end{array}$. φ est une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$.
Soit $(m, p) \in \mathbb{N}^2$. $\varphi(m, p) = 1 \Leftrightarrow 2^m(2p+1) = 1 \Leftrightarrow 2^m = 2p+1 = 1 \Leftrightarrow m = p = 0 \Leftrightarrow (m, p) = (0, 0)$. Donc, l'élément 1 de $\mathbb{N}^*$ a un et seul antécédent par φ à savoir $(0, 0)$.
Sinon, pour $n \geqslant 2$ donné, le théorème fondamental de l'arithmétique montre qu'il existe un et un seul couple (m, p) d'entiers naturels tel que $n = 2^m(2p+1)$ (n est de manière unique le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair) et que ce couple (m, p) n'est pas le couple $(0, 0)$. En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists!(m, p) \in \mathbb{N}^2/\ \varphi(m, p) = n.$$

φ est donc une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$. Puisque $\mathbb{N}^*$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ est dénombrable d'après le théorème 2 et finalement $\mathbb{N}^2$ est dénombrable d'après le théorème 1.

❑

⇛ **Commentaire** . *On peut citer une autre bijection de* $\mathbb{N}^2$ *sur* $\mathbb{N}$ *(voir exercices maths sup, planche n° 4, exercice n° 13) :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2,\ f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y.$$

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	...
0	0 *(0,0)*	1 *(0,1)*	3 *(0,2)*	6 *(0,3)*	10 *(0,4)*	*(0,5)*	...
0	2 *(1,0)*	4 *(1,1)*	7 *(1,2)*	11 *(1,3)*	*(1,4)*	*(1,5)*	...
0	5 *(2,0)*	8 *(2,1)*	12 *(2,2)*	*(2,3)*	*(2,4)*	*(2,5)*	...
0	9 *(3,0)*	13 *(3,1)*	*(3,2)*	*(3,3)*	*(3,4)*	*(3,5)*	...
0	*(4,0)*	*(4,1)*	*(4,2)*	*(4,3)*	*(4,4)*	*(4,5)*	...
0	*(5,0)*	*(5,1)*	*(5,2)*	*(5,3)*	*(5,4)*	*(5,5)*	...

❑

Théorème 5. Un produit cartésien (fini) d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration .

• Commençons par vérifier le résultat pour un produit de deux ensembles dénombrables. Soient E_1 et E_2 deux ensembles dénombrables.
Il existe une bijection f_1 de E_1 sur $\mathbb{N}$ et une bijection f_2 de E_2 sur $\mathbb{N}$.
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \to & \mathbb{N}^2 \\ (a,b) & \mapsto & (f_1(a), f_2(b)) \end{array}$. Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, il existe un et un seul $(a,b) \in E_1 \times E_2$ tel que $(f_1(a), f_2(b)) = (n,m)$.
Ceci montre que φ est une bijection de $E_1 \times E_2$ sur $\mathbb{N}^2$. Puisque $\mathbb{N}^2$ est dénombrable d'après le théorème 4, $E_1 \times E_2$ est dénombrable d'après le théorème 1.

• Soit $k \geqslant 2$. Supposons qu'un produit cartésien de k ensembles dénombrables soit dénombrable. Soient $E_1, \ldots, E_{k+1}$, $k+1$ ensembles dénombrables. Alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{k+1} E_i = \left(\prod_{i=1}^{k} E_i\right) \times E_{k+1}$ est dénombrable par hypothèse de récurrence et d'après le cas $k=2$.

On a montré par récurrence qu'un produit cartésien (fini) d'ensembles dénombrables est dénombrable.

❑

L'exemple 1 du paragraphe 1) permet d'énoncer

Théorème 6. $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

et en cumulant les résultats des théorèmes 4, 5 et 6, on peut énoncer

Théorème 7. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^k$ est dénombrable.

Théorème 8. Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration . Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles dénombrables indexée par I puis $E = \displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i$. Pour chaque $i \in I$, il existe une bijection f_i de $\mathbb{N}$ sur E_i. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{N} & \to & E \\ (i,n) & \mapsto & f_i(n) \end{array}$. φ est une application surjective de $I \times \mathbb{N}$ sur E. D'autre part, I est dénombrable et donc $I \times \mathbb{N}$ est dénombrable d'après le théorème 5. Il existe donc une bijection ψ de $\mathbb{N}$ sur $I \times \mathbb{N}$. L'application $g = \psi \circ \varphi$ est une surjection de $\mathbb{N}$ sur E.

Montrons alors qu'à partir de l'application g, on peut construire une application bijective de E sur une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Soit $y \in E$. $g^{-1}(y) = \{n \in \mathbb{N} / \ g(n) = y\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Donc, $g^{-1}(y)$ admet un plus petit élément que l'on note n_y. Considérons $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{N} \\ y & \mapsto & n_y \end{array}$. f est une application de E dans $\mathbb{N}$. Soient alors y et y' deux éléments de E. Si $n_y = n_{y'}$, alors $y = g(n_y) = g(n_{y'}) = y'$. Donc, f est une application injective de E dans $\mathbb{N}$ ou encore f induit une bijection de E sur $A = f(E)$ qui est une partie de $\mathbb{N}$. On en déduit que E est fini ou dénombrable. Comme E contient au moins un ensemble dénombrable, E est infini et finalement E est dénombrable.

❑

En adaptant un peu la démonstration précédente, on obtient le théorème suivant que nous admettrons :

Théorème 9. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.

On en déduit en particulier que

Théorème 10. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démonstration . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $E_n = \left\{\dfrac{a}{b},\ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ |a| \leqslant n,\ b \leqslant n\right\}$. On a $\mathbb{Q} = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$ et chaque E_n est fini (de cardinal inférieur ou égal à $n(2n+1)$). Donc, $\mathbb{Q}$ est fini ou dénombrable d'après le théorème précédent puis $\mathbb{Q}$ est dénombrable car $\mathbb{Q}$ est infini.

❑

Plus généralement,

Théorème 11. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^k$ est dénombrable.

Le théorème 9 fournit aussi une application aux suites sommables de nombres complexes. Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres complexes indexée par un ensemble non vide I, le **support** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des indices $i \in I$ tels que $u_i \neq 0$. On a alors

Théorème 12. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est fini ou dénombrable.

Démonstration . Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Posons $I_0 = \{i \in I/\ |u_i| > 1\}$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left\{i \in I/\ \dfrac{1}{n+1} < |u_i| \leqslant \dfrac{1}{n}\right\}$. Posons enfin $J = \{i \in I/\ u_i = 0\}$. I est la réunion disjointe des I_n, $n \in \mathbb{N}$, et de J, et le support S de la famille $(u_i)_{i\in I}$. Puisque la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, le théorème de sommation par paquets permet d'écrire

$$\sum_{i\in I} |u_i| = \sum_{i\in J} |u_i| + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i\in I} |u_i| \geqslant \sum_{i\in I_n} |u_i| \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i\in I_n} 1 = \frac{\operatorname{card}(I_n)}{n}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{card}(I_n) \leqslant n \displaystyle\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$.

Finalement, $S = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis et donc S est fini ou dénombrable.

❑

Citons enfin un premier exemple très important d'ensemble non dénombrable :

Théorème 13. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration . Contentons nous de montrer que l'intervalle $[0,1[$ n'est pas dénombrable. Supposons le contraire par l'absurde. On peut donc trouver une bijection $n \mapsto x_n$ de $\mathbb{N}$ dans $[0,1[$ et en particulier $[0,1[$ est l'ensemble des valeurs d'une certaine suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$[0,1[= \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

On sait que chaque réel x_n de $[0,1[$ admet un développement décimal propre de la forme $x_n = 0, d_{n,1}d_{n,2}d_{n,3}\ldots$ où les $d_{n,k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, sont les décimales de x_n et donc des éléments de $[\![0,9]\!]$ et les $d_{n,k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, ne sont pas toutes égales à 9 à partir d'un certain rang. On va maintenant construire un réel de $[0,1[$ qui ne peut être l'un des x_n selon le principe de la diagonale de Cantor :

$$\begin{array}{lclllllll}
x_0 & = & 0, & \color{red}{d_{0,1}} & d_{0,2} & d_{0,3} & d_{0,4} & d_{0,5} & \ldots\\
x_1 & = & 0, & d_{1,1} & \color{red}{d_{1,2}} & d_{1,3} & d_{1,4} & d_{1,5} & \ldots\\
x_2 & = & 0, & d_{2,1} & d_{2,2} & \color{red}{d_{2,3}} & d_{2,4} & d_{2,5} & \ldots\\
x_3 & = & 0, & d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & \color{red}{d_{3,4}} & d_{3,5} & \ldots\\
x_4 & = & 0, & d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & \color{red}{d_{4,5}} & \ldots\\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

On considère $x = 0, c_1c_2c_3\ldots$ où c_1, c_2, c_3 sont des chiffres éléments de $[\![0,8]\!]$ tels que $c_1 \neq d_{0,1}$, $c_2 \neq d_{1,2}$, $c_3 \neq d_{2,3}$ …
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \neq d_{n-1,n}$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \neq x_n$ par unicité d'un développement décimal propre. L'hypothèse de dénombrabilité faite sur $[0,1[$ est donc absurde et on a montré que $[0,1[$ n'est pas dénombrable et finalement que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

❑

⇛ **Commentaire .** *$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des ensembles infinis. Il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ mais il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ (il existe néanmoins une injection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ à savoir $n \mapsto n$). Dit autrement, « l'infini de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand que l'infini de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ ». Les mathématiciens ont décidé de noter $\aleph_0$ (aleph 0 où aleph est la première lettre de l'alphabet hébreu) le cardinal de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\aleph_1$ le cardinal de $\mathbb{R}$. On a donc*

$$\aleph_0 < \aleph_1.$$

Cantor a mis en évidence le fait que chaque fois que l'on se donne un ensemble E *(fini ou pas), on peut en construire un autre de cardinal strictement plus grand : si* E *est un ensemble alors card*$(E) <$ *card*$(\mathscr{P}(E))$ *(on a bien sûr card*$(E) \leqslant$ *card*$(\mathscr{P}(E))$ *car on dispose d'une injection de* E *dans* $\mathscr{P}(E)$ *à savoir l'injection* $x \mapsto \{x\}$*). La démonstration du fait qu'il n'existe pas de bijection de* E *sur* $\mathscr{P}(E)$ *ressemble à un tour de magie où l'on doit découvrir le truc et pourtant il n'y a aucun truc :*

Soit f *une application de* E *vers* $\mathscr{P}(E)$*. Soit* $A = \{x \in E / \ x \notin f(x)\}$*. Montrons que* A *est un élément de* $\mathscr{P}(E)$ *qui n'a pas d'antécédent par* f*. Dans le cas contraire, il existe* $x_0 \in E$ *tel que* $f(x_0) = A$*. Mais où est* x_0 *? Si* $x_0 \in A = \{x \in E / \ x \notin f(x)\}$*, alors* $x_0 \notin f(x_0) = A$ *ce qui est une contradiction et si* $x_0 \notin A = \{x \in E / \ x \notin f(x)\}$*, alors* $x_0 \in f(x_0) = A$ *ce qui est une contradiction. Donc,* x_0 *n'existe pas ou encore* A *est un élément de* $\mathscr{P}(E)$ *qui n'a pas d'antécédent dans* E *par* f*.*

On a montré qu'une application de E *vers* $\mathscr{P}(E)$ *n'est jamais surjective. Notons que dans le cas où* E *est fini de cardinal* n*, ce qui précède montre (de manière assez sophistiquée) que* $n < 2^n$*. Ainsi, par exemple,* $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ *est un ensemble infini de cardinal strictement plus grand que* $\aleph_1$ *le cardinal de* $\mathbb{R}$*, cardinal que les mathématiciens ont appelé* $\aleph_2$ *et ainsi de suite.*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 \dots$$

