

Planche n° 11. Intégration sur un intervalle quelconque

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1

Etudier l'existence des intégrales suivantes

- 1) (**) $\int_0^{+\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}\right) dx$ 2) (**) $\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) dx$ 3) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^x} dx$
 4) (***) $\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}} dx$ 5) (**) $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}} dx$ 6) (**) $\int_0^{+\infty} x^{-\ln x} dx$
 7) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}} dx$ 8) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$ 9) (**) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} dx$
 10) (**) $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$ 11) (**) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} dx$ 12) (***) $\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{Arccos}(1-x)} dx$.

Exercice n° 2

Etudier l'existence des intégrales suivantes

- 1) (***) I $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b x} dx$ (Intégrales de BERTRAND) 2) (**) $\int_0^{\pi/2} (\tan x)^a dx$
 3) (**) $\int_1^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}\right) dx$ 4) (***) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x^b)} dx$

Exercice n° 3

Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes

- 1) (**) I $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 2) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$ ($a > 0$) 3) (**) $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$
 4) (**) $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$ 5) (**) $\int_0^{+\infty} \cos(e^x) dx$.

Exercice n° 4

Existence et calcul de

- 1) (**) I $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$ 2) (**) I $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx$
 3) (***) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} dx$ 4) (***) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} dx$ ($a > 0$)
 5) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} dx$ 6) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4} dx$
 7) (***) $\int_0^{+\infty} \left(2 + (t+3) \ln \left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right) dt$ 8) (**) I $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{Arctan} x}{(1+x^2)^2} dx$
 9) (**) I $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$ 10) (***) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$
 11) (***) I $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ ($0 < a < b$)

Exercice n° 5 (Deux calculs de $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$.)

1) (** I) En utilisant $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$, calculer I (et J).

2) (***) I) Calculer $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$ (commencer par P_n^2) et en déduire I .

Exercice n° 6 (** I)

En utilisant un développement de $\frac{1}{1-t}$, calculer $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$.

Exercice n° 7 (***) I)

Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ (en écrivant $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$).

Exercice n° 8

1) (** I) Trouver un équivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de $e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

2) (***) Montrer que $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \underset{a \rightarrow 0}{\sim} -\ln a$.

3) (*) Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{x^3 + a^2} dx \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}$.

Exercice n° 9 (***)

Etude complète de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$.

Exercice n° 10 (***)

Convergence et calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx$ (où $[x]$ désigne la partie entière du réel x).

Exercice n° 11 (**)

Soit f définie, continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, intégrable sur $[1, +\infty[$.

Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice n° 12 (***)

Soit f de classe C^2 sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur \mathbb{R} . Montrer que f'^2 est intégrable sur \mathbb{R} et que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx\right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) dx\right)$. Cas d'égalité ?