11

# Les fonctions de référence

**Au programme**

- $\surd$ Se constituer un répertoire de fonctions de référence
- $\surd$ Connaître les graphes des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
- $\surd$ En particulier, connaître les sens de variation de ces fonctions et connaître les démonstrations dans le cas les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
- $\surd$ Faire le lien avec la résolution d'une équation du type $f(x) = k$ ou d'une inéquation du type $f(x) < k$ quand $f$ est l'une des fonctions de référence

## Table des matières

Ce chapitre est consacrée à l'étude de certaines fonctions de référence. Vous avez commencé à étudier au collège les **fonctions affines**, fonctions du type $x \mapsto ax+b$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels et les **fonctions linéaires**, fonctions du type $x \mapsto ax$ où $a$ est un nombre réel, une fonction linéaire étant une fonction affine d'un type particulier. Vous allez petit à petit augmenter le stock de fonctions de référence. En seconde, on découvre la **fonction carré** $x \mapsto x^2$, la **fonction racine carrée** $x \mapsto \sqrt{x}$, la **fonction cube** $x \mapsto x^3$ et la **fonction inverse** $x \mapsto \frac{1}{x}$. Dans les classes suivantes, on continue à augmenter ce stock de fonctions de référence et on en découvre d'autres (qui apparaissent sur la calculatrice) comme par exemple la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ en première, la fonction logarithme $x \mapsto \ln(x)$ ou les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ en terminale.

La connaissance du sens de variation et du graphe des fonctions de référence doit être parfaite. Cette connaissance sera très utile le moment venu pour résoudre certaines équations ou inéquations comme par exemple $-2x+3 \geqslant 0$ ou $x^2 > 4$ ou $x^3 = -8$ ou $\frac{1}{x} \leqslant -4$.

On commence par un rappel sur les fonctions affines.

# I Les fonctions affines

## A Définition d'une fonction affine

**Définition 1**

Une fonction **affine** est une fonction de la forme $x \mapsto ax+b$ où $a$ et $b$ sont deux nombre réels fixés.
Quand $b=0$, la fonction est dite **linéaire** (une fonction linéaire est donc une fonction de la forme $x \mapsto ax$ où $a$ est un nombre réel fixé.)
Quand $a=0$, la fonction est **constante** (fonction de la forme $x \mapsto b$).

☞ *Le mot linéaire fait référence au fait que le graphe d'une fonction linéaire est une ligne droite. Mais pour avoir une définition précise du mot « linéaire », il vous faudra attendre plusieurs années : ce mot est précisément défini au cours de la première année d'étude après le bac.*

## B Sens de variation d'une fonction affine

**Theoreme 1**

Soient $a$ et $b$ deux réels. Pour tout réel $x$, on pose $f(x) = ax+b$.

Si $a>0$, la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a<0$, la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a=0$, la fonction $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.

**Démonstration :** Soient $a$ et $b$ deux réels.Pour tout réel $x$, on pose $f(x) = ax+b$.

Soient $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2+b) - (ax_1+b) = ax_2 + b - ax_1 - b = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1).$$

Puisque $x_1 < x_2$, on a $x_2 - x_1 > 0$. Donc,

• si $a>0$, alors $a(x_2-x_1) > 0$ ou encore $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou enfin $f(x_1) < f(x_2)$,
• si $a<0$, alors $a(x_2-x_1) < 0$ ou encore $f(x_2) - f(x_1) < 0$ ou enfin $f(x_1) > f(x_2)$,

Ainsi,
• si $a>0$, pour tous réels $x_1$ et $x_2$, si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$ puis la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
• si $a<0$, pour tous réels $x_1$ et $x_2$, si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$ puis $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$,

Enfin, si $a=0$, pour tout réel $x$, $f(x) = b$ puis $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.

■

## C Signe d'une fonction affine

La connaissance du sens de variation d'une fonction affine (déjà étudié dans le chapitre 5 « Inégalités ») nous permet de décrire le signe d'une fonction affine non constante :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $ax+b$ | | $-$signe de $a$ | $0$ | $+$signe de $a$ | |

En effet, si $a>0$, la fonction $f\ :\ x\mapsto ax+b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc, si $x>-\dfrac{b}{a}$, alors $f(x)>f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ ou encore $ax+b>0$ et si $x<-\dfrac{b}{a}$, alors $f(x)<f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ ou encore $ax+b<0$.

De même, si $a<0$, la fonction $f\ :\ x\mapsto ax+b$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, si $x>-\dfrac{b}{a}$, alors $f(x)<f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ ou encore $ax+b<0$ et si $x<-\dfrac{b}{a}$, alors $f(x)>f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ ou encore $ax+b>0$.

Ainsi, par exemple, le signe de la fonction $x\mapsto 2x+3$ est

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $2x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

ce qui signifie que si $x<-\dfrac{3}{2}$, alors $2x+3<0$, si $x>-\dfrac{3}{2}$, alors $2x+3>0$ et si $x=-\dfrac{3}{2}$, alors $2x+3=0$. De même le signe de $-2x+3$ est

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-2x+3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

ce qui signifie que si $x<\dfrac{3}{2}$, alors $-2x+3>0$, si $x>\dfrac{3}{2}$, alors $2x+3<0$ et si $x=\dfrac{3}{2}$, alors $-2x+3=0$.

## D Représentation graphique d'une fonction affine

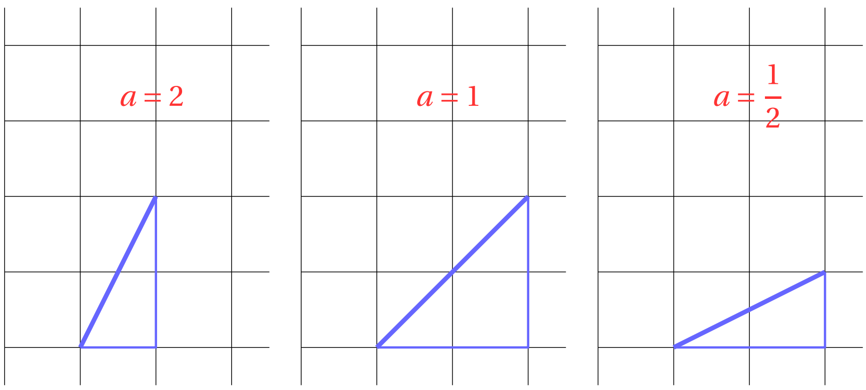
Revenons maintenant sur le graphe d'une fonction affine qui est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. Plus précisément, la représentation graphique de la fonction $f\ :\ x\mapsto ax+b$ ($a$ et $b$ réels donnés) est la droite $(\mathrm{D})$ d'équation $y=ax+b$.

On rappelle que le réel $b$ est l'**ordonnée à l'origine** de la droite $(\mathrm{D})$ : si $x=0$, on obtient $y=b$ et donc le point de coordonnées $(0,b)$ est le point de la droite $(\mathrm{D})$ qui appartient à la droite $(\mathrm{O}y)$.

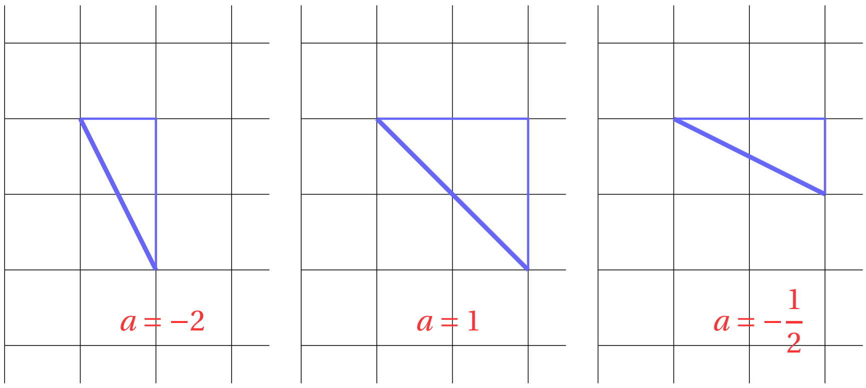
On rappelle aussi que le réel $a$ est le **coefficient directeur** de la droite $(\mathrm{D})$ : si $\mathrm{A}(x_\mathrm{A},y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B},y_\mathrm{B})$ sont deux points de la droite $(\mathrm{D})$, alors

$$a=\frac{y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}}.$$

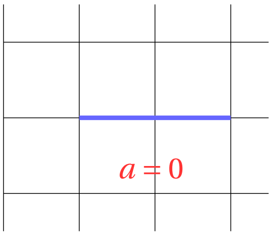
Comme son nom l'indique, le coefficient directeur de la droite $(\mathrm{D})$ indique la direction de cette droite. On visualise le coefficient directeur d'une droite à l'aide du quadrillage. Pour les droites « qui montent » (quand on lit de gauche à droite) :




De manière générale, quand on avance d'une quantité vers la droite, on monte de $a$ quantités.
Pour les droites « qui descendent » :




Enfin, si $a = 0$, la droite (D) est parallèle à l'axe des abscisses ce qui correspond au cas où la fonction $f$ est constante.

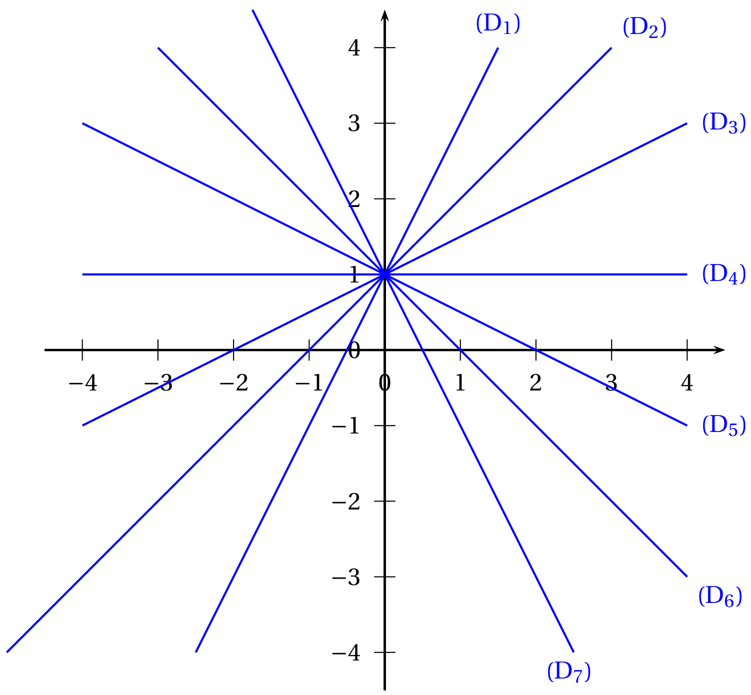



**Exercice 1**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Tracer les droites suivantes

$(D_1)$ : $y = 2x + 1$.
$(D_2)$ : $y = x + 1$.
$(D_3)$ : $y = \frac{1}{2}x + 1$.
$(D_4)$ : $y = 1$.
$(D_5)$ : $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
$(D_6)$ : $y = -x + 1$.
$(D_7)$ : $y = -2x + 1$.

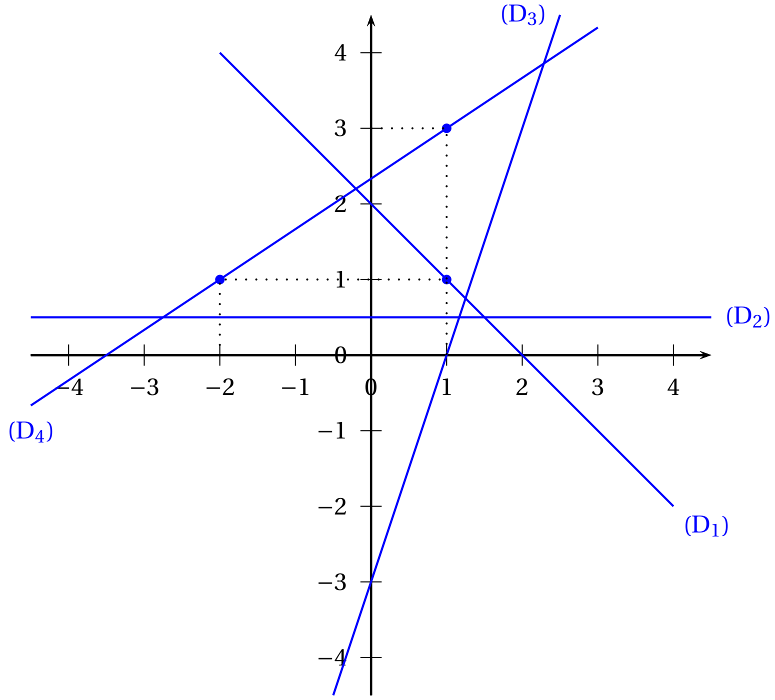
**Solution 1 :** Les droites $(D_1)$, ..., $(D_7)$ ont toutes même ordonnée à l'origine, à savoir 1.




■

**Exercice 2**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Ci-dessous, on a dessiné les graphes $(D_1)$, $(D_2)$, $(D_3)$ et $(D_4)$ de quatre fonctions affines $f_1$, $f_2$, $f_3$ et $f_4$. Déterminer ces quatre fonctions.




**Solution 2 :**

• L'ordonnée à l'origine de la droite $(D_1)$ est $2$ et son coefficient directeur est $-1$. Donc, $(D_1)$ est la droite d'équation $y = -x + 2$.

• L'ordonnée à l'origine de la droite $(D_2)$ est $\frac{1}{2}$ et son coefficient directeur est $0$. Donc, $(D_2)$ est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

• L'ordonnée à l'origine de la droite $(D_3)$ est $-3$ et son coefficient directeur est $3$. Donc, $(D_3)$ est la droite d'équation $y = 3x - 3$.

• La droite $(D_4)$ est plus difficile à « lire ». Cette droite passe par les points $A(-2, 1)$ et $B(1, 3)$. Son coefficient directeur est

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{1-(-2)} = \frac{2}{3}.$$

La droite $(D_4)$ a donc une équation de la forme $y = \frac{2}{3}x + b$ où $b$ est un nombre réel. Puisque la droite $(D_4)$ passe par le point B, on a $y_B = \frac{2}{3}x_B + b$ ou encore $3 = \frac{2}{3} \times 1 + b$ puis $b = 3 - \frac{2}{3}$ et finalement $b = \frac{7}{3}$. Donc, $(D_4)$ est la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

Les quatre fonctions affines à déterminer sont définies par : pour tout réel $x$, $f_1(x) = -x + 2$, $f_2(x) = \frac{1}{2}$, $f_3(x) = 3x - 3$ et $f_4(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

■

## E Expression d'une fonction affine définie par deux valeurs

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On veut donner une équation cartésienne d'une droite $(D)$ quand $A\left(x_A, y_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B\right)$ sont deux points distincts connus de cette droite tels que $x_A \neq x_B$ ou encore, on veut une équation de la droite $(AB)$.

Soit $M(x,y)$ un point du plan d'abscisse distincte de $x_A$. Le point M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\dfrac{y-y_A}{x-x_A}$ est le coefficient directeur de la droite (AB) c'est-à-dire $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$. Or, $\dfrac{y-y_A}{x-x_A}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ équivaut à $y-y_A=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x_B-x_A)$ ou encore $y=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x_B-x_A)+y_A$.

Enfin, dans le cas où l'abscisse du point M est l'abscisse du point A, c'est-à-dire dans le cas où $x=x_A$, l'égalité précédente fournit $y=y_A$. Puisque la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, le point A est le seul point de la droite (AB) d'abscisse $x_A$ et donc encore une fois l'appartenance du point M à la droite (AB) est équivalente à l'égalité $y=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x_B-x_A)+y_A$.

Finalement, dans tous les cas, $M(x,y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si $y=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x_B-x_A)+y_A$. On peut énoncer :

**Theoreme 2**

Soient $A\left(x_A,y_A\right)$ et $B\left(x_B,y_B\right)$ deux points du plan tels que $x_A\neq x_B$. Une équation de la droite (AB) est

$$y=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)+y_A.$$

Appliquons ce résultat aux fonctions affines. On veut déterminer une fonction affine $f$ connaissant les images $f(a)$ et $f(b)$ de deux réels $a$ et $b$ vérifiant $a\neq b$. Les points $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$ sont alors deux points distincts de sa représentation graphique qui est une droite. Cette droite a pour équation cartésienne $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$. Donc,

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

On peut énoncer :

**Theoreme 3**

Soient $a$ et $b$ deux réels distincts. La fonction affine $f$ prenant la valeur $f(a)$ en $a$ et $f(b)$ en $b$ est définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

☞ *Dans la pratique, on procède souvent autrement. Quand on cherche une fonction affine dont on connaît deux valeurs, on pose pour tout réel $x$, $f(x)=ax+b$ où $a$ et $b$ sont deux réels. Les réels $a$ et $b$ sont alors entièrement déterminés par les deux valeurs connues de la fonction. C'est ce que l'on fait dans l'exercice suivant.*

**Exercice 3**

Déterminer la fonction affine $f$ telle que $f(-1)=4$ et $f(2)=-1$.

**Solution 3 :** Pour tout réel $x$, posons $f(x)=ax+b$ où $a$ et $b$ sont deux réels. L'égalité $f(-1)=4$ s'écrit $-a+b=4$. L'égalité $f(2)=-1$ s'écrit $2a+b=-1$. Les nombres $a$ et $b$ sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{l}-a+b=4\\2a+b=-1\end{array}\right.$ (S).

Le système (S) est équivalent au système $\left\{\begin{array}{l}b=a+4\\2a+(a+4)=-1\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l}b=a+4\\3a=-5\end{array}\right.$ ou enfin $\left\{\begin{array}{l}a=-\dfrac{5}{3}\\b=\dfrac{7}{3}\end{array}\right.$. La fonction affine demandée est la fonction $f$ définie par :

$$\text{Pour tout réel } x,\ f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3}.$$

(Par acquis de conscience, vérifions : $f(-1)=-\dfrac{5}{3}\times(-1)+\dfrac{7}{3}=\dfrac{5}{3}+\dfrac{7}{3}=\dfrac{12}{3}=4$ et $f(2)=-\dfrac{5}{3}\times2+\dfrac{7}{3}=-\dfrac{10}{3}+\dfrac{7}{3}=-\dfrac{3}{3}=-1$).

■

# II La fonction carré

## A Symétrie du graphe de la fonction $x \mapsto x^2$

On commence par rappeler la

**Définition 2**

Soit $f$ une fonction définie sur un partie $\mathrm{D}$ de $\mathbb{R}$, $\mathrm{D}$ étant symétrique par rapport à $0$.

La fonction $f$ est paire si et seulement si pour tout réel $x$ de $\mathrm{D}$, $f(-x) = f(x)$.

On sait de plus que si la fonction $f$ est paire, son graphe, dans un repère orthonormé du plan, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**Theoreme 4**

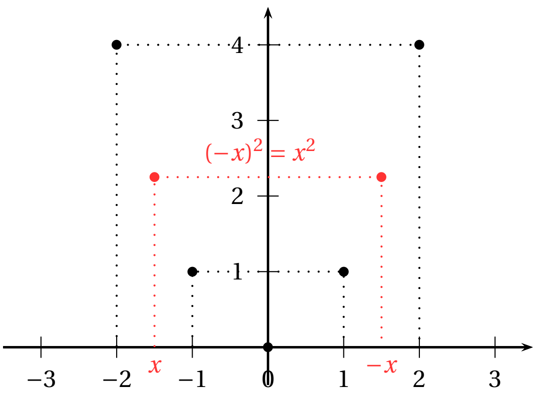
La fonction $x \mapsto x^2$ est paire. Le graphe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**Démonstration :** Pour tout nombre réel $x$, posons $f(x) = x^2$. Soit $x$ un nombre réel.

$$f(-x) = (-x)^2 = (-x) \times (-x) = x \times x = x^2 = f(x).$$

Donc, la fonction $f$ est paire. On sait que son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

■




- Sur le graphique ci-contre, on visualise le fait que deux réels opposés ont le même carré.
- L'égalité $(-x)^2 = x^2$ est vraie y compris dans le cas où $x = 0$, auquel cas $x$ et $-x$ sont un seul et même nombre.
- Il ne faut pas croire que le réel $-x$ est obligatoirement un réel négatif. Le signe $-$ placé devant la lettre $x$ signifie simplement : l'opposé du réel $x$.
  Si $x$ est un réel positif, alors $-x$ est un réel négatif et
  si $x$ est un réel négatif, alors $-x$ est un réel positif.

## B Sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$

**Theoreme 5**

La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

**Démonstration :** (au programme).

Pour tout réel $x$, posons $f(x) = x^2$. Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leqslant b$. On a

$$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a).$$

Puisque $a \leqslant b$, on a $b - a \geqslant 0$.

• Si de plus $a$ et $b$ sont deux réels positifs, alors $b + a \geqslant 0$. Dans ce cas, $(b-a)(b+a)$ est le produit de deux réels positifs et donc $(b-a)(b+a) \geqslant 0$. On en déduit que $f(b) - f(a) \geqslant 0$ et donc que $f(a) \leqslant f(b)$.

On a montré que pour tous réels $a$ et $b$ de l'intervalle $[0, +\infty[$, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$. Donc, la fonction $f$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

• Si maintenant $a$ et $b$ sont deux réels négatifs, alors $b + a \leqslant 0$. Dans ce cas, $(b-a)(b+a)$ est le produit d'un réel positif et d'un réel négatif et donc $(b-a)(b+a) \leqslant 0$. On en déduit que $f(b) - f(a) \leqslant 0$ et donc que $f(a) \geqslant f(b)$.

On a montré que pour tous réels $a$ et $b$ de l'intervalle $]-\infty, 0]$, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$. Donc, la fonction $f$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.

■

☞ *Attention, le théorème précédent permettra de résoudre des inéquations comportant des inégalités larges comme $\sqrt{x} \leqslant 2$ mais pas des inéquations comportant des inégalités strictes comme $\sqrt{x} < 2$.*

Par exemple, si on cherche les réels positifs $x$ tels que $\sqrt{x} \leqslant 2$, puisque la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$, en élevant au carré les deux membres de l'inégalité, on obtient $x \leqslant 4$. Mais on n'a pas encore de résultat sur la fonction carré permettant de résoudre l'inéquation $\sqrt{x} < 2$. On peut (et on doit) affiner le résultat du théorème précédent :

**Theoreme 6**

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

**Démonstration :** On reprend la démonstration précédente en remplaçant la condition $a \leqslant b$ par la condition $a < b$. On a donc $b - a > 0$.

Si $a$ et $b$ sont deux réels positifs, puisque $a < b$, le réel $a$ est supérieur ou égal à 0 et le réel $b$ est strictement positif. On en déduit que $b + a > 0$ puis que $f(b) - f(a) > 0$. Ainsi, pour tous réels $a$ et $b$ de $[0, +\infty[$ tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$ et donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Si $a$ et $b$ sont deux réels négatifs, puisque $a < b$, le réel $a$ est strictement inférieur à 0 et le réel $b$ est négatif. On en déduit que $b + a < 0$ puis que $f(b) - f(a) < 0$. Ainsi, pour tous réels $a$ et $b$ de $]-\infty, 0]$ tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$ et donc la fonction $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

■

**Exercice 4**

Soient $f_1$ et $f_2$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : pour tous réels $x$, $f_1(x) = -2x^2$ et $f_2(x) = \dfrac{x^2}{2}$. Etudier le sens de variation des fonctions $f_1$ et $f_2$ sur $\mathbb{R}$.

**Solution 4 :**

• Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leqslant b$.

$$f_1(b) - f_1(a) = -2b^2 + 2a^2 = -2\left(b^2 - a^2\right) = -2(b-a)(b+a).$$

Si de plus $a$ et $b$ sont dans $[0, +\infty[$, alors $b - a \geqslant 0$ et $b + a \geqslant 0$ puis $-2(b-a)(b+a) \leqslant 0$ puis $f_1(b) - f_1(a) \leqslant 0$ et donc $f_1(a) \geqslant f_1(b)$.
Et si de plus $a$ et $b$ sont dans $]-\infty, 0]$, alors $b - a \geqslant 0$ et $b + a \leqslant 0$ puis $-2(b-a)(b+a) \geqslant 0$ puis $f_1(b) - f_1(a) \geqslant 0$ et donc $f_1(a) \leqslant f_1(b)$.

Ainsi, pour tout réel $a$ et $b$ de $[0, +\infty[$ tels que $a \leqslant b$, on a $f_1(a) \geqslant f_1(b)$. La fonction $f_1$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Et de même, pour tout réel $a$ et $b$ de $]-\infty, 0]$, tels que $a \leqslant b$, on a $f_1(a) \leqslant f_1(b)$. La fonction $f_1$ est croissante sur $]-\infty, 0]$.

• Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leqslant b$.

$$f_2(b) - f_2(a) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) = \frac{1}{2}(b-a)(b+a).$$

Si de plus $a$ et $b$ sont dans $[0, +\infty[$, alors $b - a \geqslant 0$ et $b + a \geqslant 0$ puis $\dfrac{1}{2}(b-a)(b+a) \geqslant 0$ puis $f_2(b) - f_2(a) \geqslant 0$ et donc $f_2(a) \leqslant f_2(b)$.
Et si de plus $a$ et $b$ sont dans $]-\infty, 0]$, alors $b - a \geqslant 0$ et $b + a \leqslant 0$ puis $\dfrac{1}{2}(b-a)(b+a) \leqslant 0$ puis $f_2(b) - f_2(a) \leqslant 0$ et donc $f_2(a) \geqslant f_1(b)$.

Ainsi, pour tout réel $a$ et $b$ de $[0, +\infty[$ tels que $a \leqslant b$, on a $f_2(a) \leqslant f_2(b)$. La fonction $f_2$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Et de même, pour tout réel $a$ et $b$ de $]-\infty, 0]$, tels que $a \leqslant b$, on a $f_2(a) \geqslant f_2(b)$. La fonction $f_2$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$.

■

**Exercice 5**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel $x$, $f(x) = -(x-3)^2 + 4$. Etudier les variations de la fonction $f$ sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 3]$ et $[3, +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

**Solution 5 :** • Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leqslant b$.

$$\begin{aligned}
f(b)-f(a) &= \left(-(b-3)^2+4\right)-\left(-(a-3)^2+4\right) = -(b-3)^2+4+(a-3)^2-4 = -\left((b-3)^2-(a-3)^2\right)\\
&= -((b-3)-(a-3))((b-3)+(a-3)) = -(b-3-a+3)(b-3+a-3)\\
&= -(b-a)(a+b-6).
\end{aligned}$$

Si de plus $a$ et $b$ sont dans $[3,+\infty[$, alors $b-a \geqslant 0$ et $a+b-6 \geqslant 3+3-6$ ou encore $a+b-6 \geqslant 0$. Mais alors, $-(b-a)(a+b-6) \leqslant 0$ puis $f(b)-f(a) \leqslant 0$ et donc $f(a) \geqslant f(b)$.
Et si de plus $a$ et $b$ sont dans $]-\infty,3]$, alors $b-a \geqslant 0$ et $a+b-6 \leqslant 3+3-6$ puis $a+b-6 \leqslant 0$. Mais alors, $-(b-a)(a+b-6) \geqslant 0$ et donc $f(a) \leqslant f(b)$.

Ainsi, pour tout réel $a$ et $b$ de $[3,+\infty[$ tels que $a \leqslant b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$. La fonction $f$ est décroissante sur $[3,+\infty[$. Et de même, pour tout réel $a$ et $b$ de $]-\infty,3]$, tels que $a \leqslant b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$. La fonction $f$ est croissante sur $]-\infty,3]$. On en déduit le tableau de variation de la fonction $f$ (en tenant compte de $f(3) = -(3-3)^2+4 = 4$) :

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | |

■

## C Représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2$

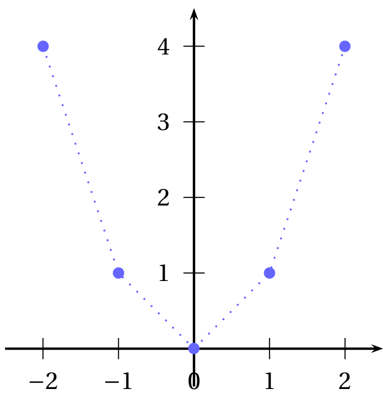
Nous sommes parvenu au moment où nous allons essayer de construire le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ dans un repère orthonormé du plan. Nous savons déjà que ce graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que le tableau de variation de la fonction carré a l'allure suivante (en notant $f$ la fonction $x \mapsto x^2$) :

| $x$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

On commence par remplir un petit tableau de valeurs en n'oubliant pas que le graphe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées de sorte que si on obtient un point de coordonnées $(x,y)$ du graphe de la fonction carré, le point de coordonnées $(-x,y)$ fait aussi partie de ce graphe :

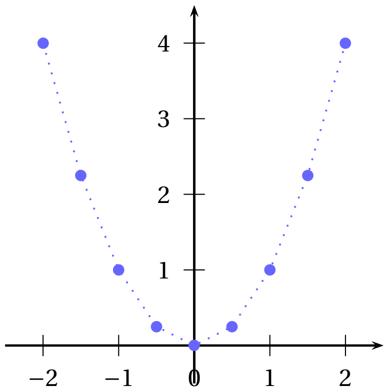
| $x$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $x^2$ | $0$ | $1$ | $4$ |

On place les points correspondants dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On a alors peut-être l'envie de relier ces points par des segments de droite.

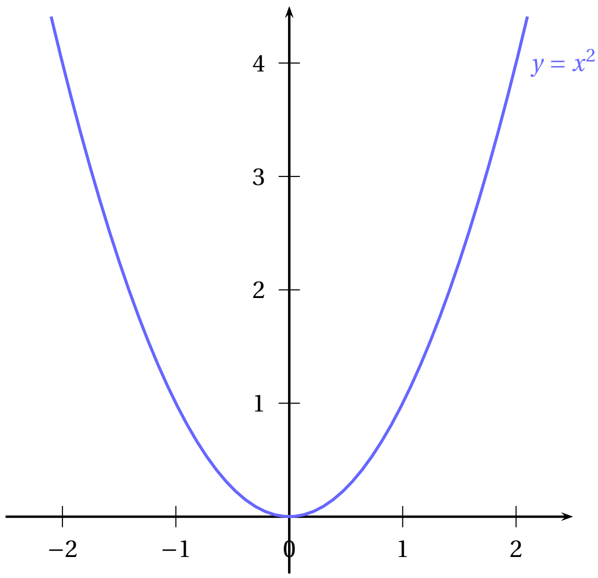



Si l'on s'en tient à ce graphe, on lit que l'image de $0,5$ est $0,5$ ce qui est faux car $(0,5)^2 = 0,25$. Affinons avec un tableau de valeurs un peu plus fourni :

| $x$ | $0$ | $0,5$ | $1$ | $1,5$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $0$ | $0,25$ | $1$ | $2,25$ | $4$ |




On voit de dessiner petit à petit une courbe « bien courbe ». Quand on calcule beaucoup plus de points, on obtient la courbe suivante :




La courbe obtenue s'appelle une parabole. Plus généralement, les graphes des fonctions $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a$, $b$ et $c$ trois réels donnés tels que $a \neq 0$, fonctions étudiées en classe de première, sont des paraboles. Mais attention, il ne faut pas croire que toute courbe ayant cette allure est une parabole et par exemple, le graphe de la fonction $x \mapsto x^4$ (étudié plus tard dans la scolarité) a l'allure d'une parabole mais n'est pas une parabole.

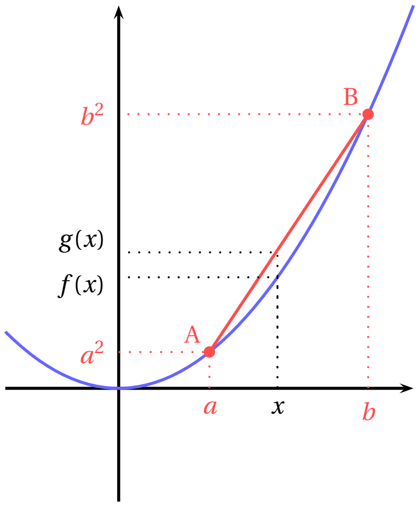
**Approfondissement.** Nous allons vérifier que la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$ ne contient pas de segment de droite (de longueur non nulle). Plus précisément, nous allons vérifier que chaque fois que l'on se donne deux points de cette courbe $\mathrm{A}\left(a, a^2\right)$ et $\mathrm{B}\left(b, b^2\right)$ avec $a < b$, la courbe représentative de la fonction carré est strictement au-dessous de la droite joignant ces deux points sur l'intervalle $]a, b[$.

Pour tout réel $x$, on pose $f(x) = x^2$. Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ puis A le point de coordonnées $\left(a, a^2\right)$ et B le point de coordonnées $\left(b, b^2\right)$. Le coefficient directeur de la droite $(\mathrm{AB})$ est $\dfrac{b^2 - a^2}{b - a}$ ou encore $\dfrac{(b-a)(b+a)}{b-a}$ ou enfin $a + b$. Une équation cartésienne de la droite $(\mathrm{AB})$ est $y = (a+b)(x-a) + a^2$.

On considère maintenant $g$, la fonction affine dont le graphe est la droite $(\mathrm{AB})$. Pour tout réel $x$, on a $g(x) = (a+b)(x-a) + a^2$. Etudions le signe de $f(x) - g(x)$ quand $x$ est un réel de l'intervalle $]a, b[$. On doit factoriser l'expression obtenue pour en déterminer le signe.

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= x^2 - \left((a+b)(x-a) + a^2\right) = x^2 - (a+b)(x-a) - a^2 = \left(x^2 - a^2\right) - (a+b)(x-a) \\
&= (x+a)(x-a) - (a+b)(x-a) = (x-a)((x+a) - (a+b)) = (x-a)(x+a-a-b) \\
&= (x-a)(x-b).
\end{aligned}$$

Si $x$ est un réel de l'intervalle $]a, b[$ ou encore si $a < x < b$, alors $x - a > 0$ et $x - b < 0$ puis $(x-a)(x-b) < 0$. On a montré que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]a, b[$, $f(x) - g(x) < 0$ ou encore $f(x) < g(x)$. Donc, la représentation graphique de la fonction carré est strictement en dessous de la droite $(\mathrm{AB})$ sur l'intervalle $]a, b[$ (c'est-à-dire quand l'abscisse $x$ est dans l'intervalle $]a, b[$).

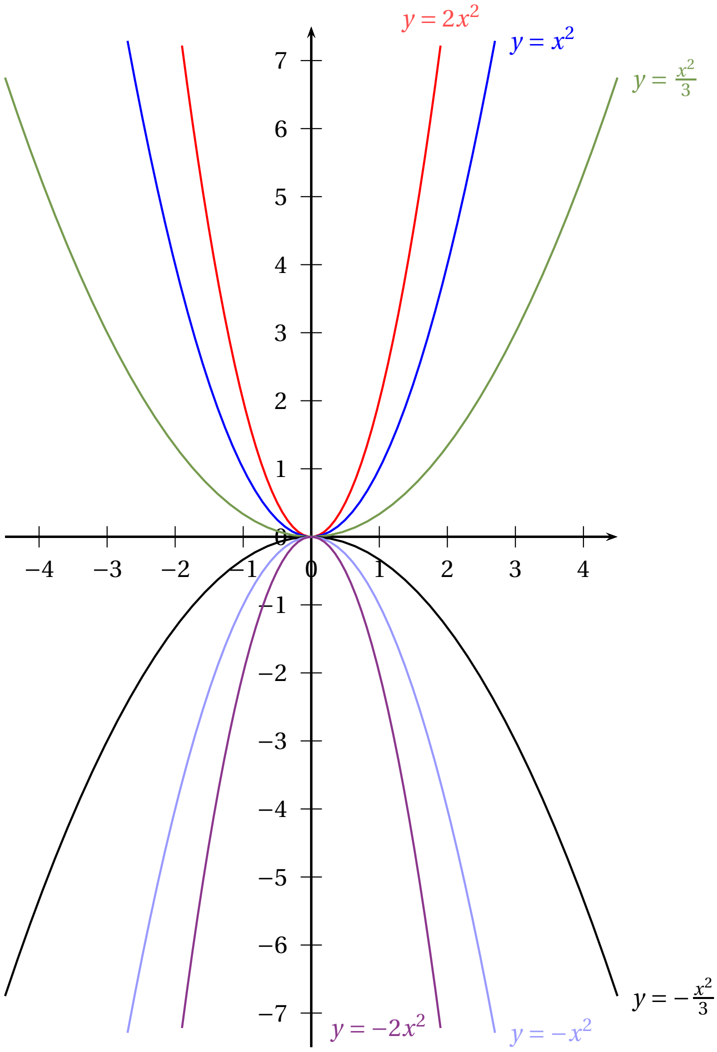



☞ *Le segment* $[AB]$ *s'appelle une **corde** de la courbe représentative de la fonction* $x \mapsto x^2$.

**Exercice 6**

Tracer dans un même repère les graphes des fonctions $f_1 : x \mapsto 2x^2$, $f_2 : x \mapsto x^2$, $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^2}{3}$, $f_4 : x \mapsto -\dfrac{x^2}{3}$, $f_5 : x \mapsto -x^2$ et $f_6 : x \mapsto -2x^2$.

**Solution 6 :** On obtient les graphes suivants :




■

# III La fonction cube

## A Symétrie du graphe de la fonction $x \mapsto x^3$

On rappelle la

**Définition 3**

Soit $f$ une fonction définie sur une partie $\mathrm{D}$ de $\mathbb{R}$, $\mathrm{D}$ étant symétrique par rapport à $0$.

La fonction $f$ est impaire si et seulement si pour tout réel $x$ de $\mathrm{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

On sait de plus que si la fonction $f$ est impaire, son graphe, dans un repère orthonormé du plan, est symétrique par rapport l'origine du repère.

**Theoreme 7**

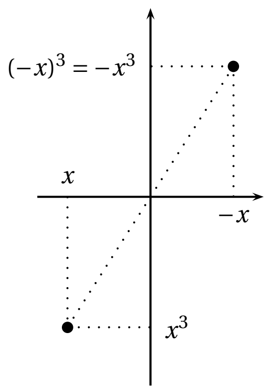
La fonction $x \mapsto x^3$ est impaire. Le graphe de la fonction cube est symétrique par rapport l'origine $\mathrm{O}$ du repère.

**Démonstration :** Pour tout nombre réel $x$, posons $f(x) = x^3$. Soit $x$ un nombre réel.

$$f(-x) = (-x)^3 = (-x) \times (-x) \times (-x) = -x \times x \times x = -x^3 = -f(x).$$

Donc, la fonction $f$ est impaire. On sait que son graphe est symétrique par rapport l'origine du repère.

■




## B Sens de variation de la fonction $x \mapsto x^3$

**Theoreme 8**

La fonction $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et même, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Démonstration :** Cette démonstration n'est pas prévue dans le programme. Nous allons tout de même démontrer que la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$. (On commence la démonstration en découvrant une nouvelle identité remarquable qui n'est pas au programme de la classe de seconde. L'identité remarquable $b^3 - a^3 = (b-a)\left(b^2 + ab + a^2\right)$ fait partie du programme de Première.)

Pour tout réel $x$, posons $f(x) = x^3$. Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leqslant b$.

$$(b-a)\left(b^2 + ab + a^2\right) = b^3 + ab^2 + a^2b - ab^2 - a^2b - a^3 = b^3 - a^3 = f(b) - f(a).$$

Puisque $a \leqslant b$, on a déjà $b - a \geqslant 0$.

• Supposons que $a$ et $b$ sont des réels positifs. Alors, $b^2 \geqslant 0$, $ab \geqslant 0$ et $a^2 \geqslant 0$, puis $b^2 + ab + a^2 \geqslant 0$. Puisque d'autre part, $b - a \geqslant 0$, on en déduit que $(b-a)\left(b^2 + ab + a^2\right) \geqslant 0$ et donc que $f(a) \leqslant f(b)$.

• Supposons que $a$ et $b$ sont des réels négatifs. Alors, $b^2 \geqslant 0$, encore une fois $ab \geqslant 0$ et $a^2 \geqslant 0$, puis $b^2 + ab + a^2 \geqslant 0$. Donc de nouveau $f(a) \leqslant f(b)$.

• Jusqu'ici nous avons envisagé les cas de figure $0 \leqslant a \leqslant b$ et $a \leqslant b \leqslant 0$. Il nous reste à analyser le cas où $a \leqslant 0 \leqslant b$. Dans ce cas, $a^3 \leqslant 0$ et $b^3 \geqslant 0$. En particulier, $a^3 \leqslant b^3$ ou encore $f(a) \leqslant f(b)$.

On a montré que pour tous réels $a$ et $b$, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$. La fonction cube est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

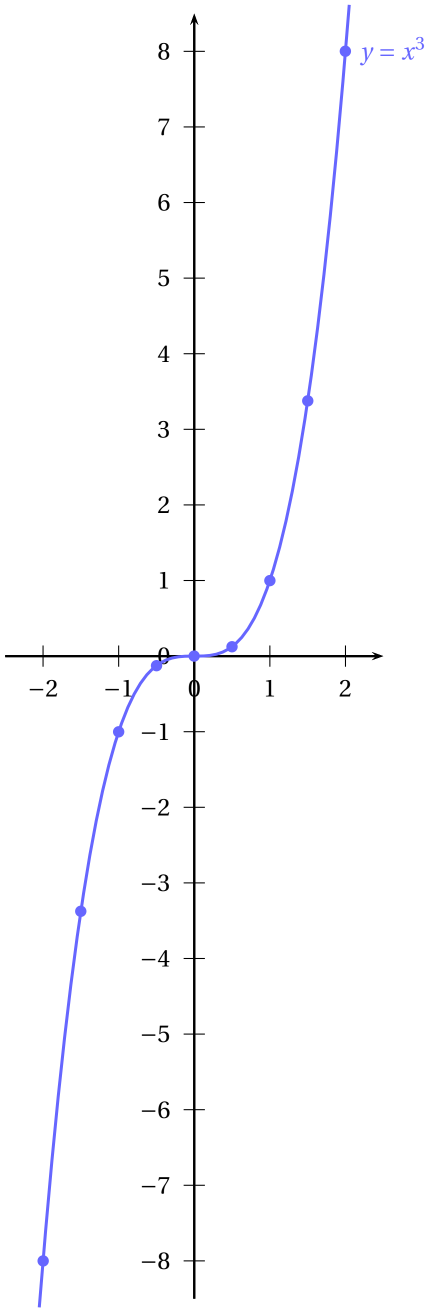
■

## C Représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^3$

On commence par construire un petit tableau de valeurs (et on n'oublie pas que le graphe de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère) :

| $x$ | $0$ | $0,5$ | $1$ | $1,5$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | $0$ | $0,125$ | $1$ | $3,375$ | $8$ |

On obtient le graphe suivant




## D Position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$, pour $x \geqslant 0$

Ici, on a inversé l'ordre de présentation : la démonstration (au programme) se déroule avant l'énoncé du théorème. Pour tout réel $x$, on pose $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = x^3$. On veut étudier les positions relatives des graphes des fonctions $f$, $g$ et $h$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

• Pour tout réel positif $x$,

$$f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1 - x).$$

On peut alors donner le signe de $f(x) - g(x)$ en fonction des valeurs de $x$ dans un tableau de signes :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $1-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)-g(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Ainsi, pour $x$ réel de l'intervalle $]0,1[$, $f(x)-g(x)>0$ ou encore $f(x)>g(x)$ et pour $x$ réel de l'intervalle $]1,+\infty[$, $f(x)-g(x)<0$ ou encore $f(x)<g(x)$. Le graphe de la fonction $x\mapsto x$ est strictement au-dessus du graphe de la fonction $x\mapsto x^2$ sur $]0,1[$ et strictement au dessous sur $]1,+\infty[$. Enfin, $f(0)=g(0)=0$ et $f(1)=g(1)=1$ et donc, les courbes d'équation $y=x$ et $y=x^2$ se coupent aux points de coordonnées $(0,0)$ et $(1,1)$.

• De même, pour tout réel positif $x$,

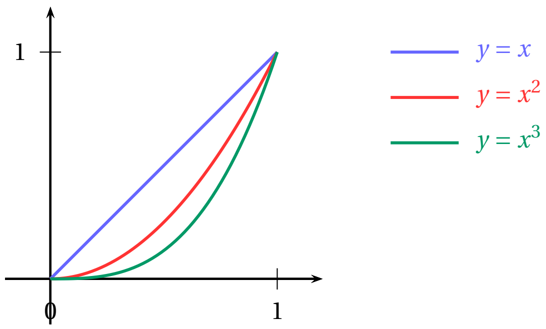
$$g(x)-h(x)=x^2-x^3=x^2(1-x).$$

On a donc le tableau de signes :

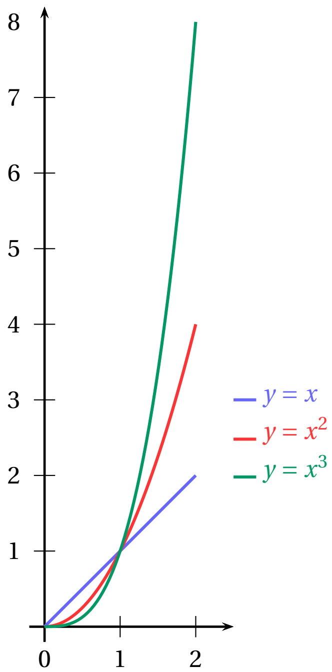
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $1-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)-h(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On a obtenu le résultat suivant : le graphe de la fonction $x\mapsto x^2$ est strictement au-dessus du graphe de la fonction $x\mapsto x^3$ sur $]0,1[$ et strictement au dessous sur $]1,+\infty[$. Enfin, les deux courbes se coupent aux points de coordonnées $(0,0)$ et $(1,1)$.

Ainsi, sur $[0,1]$, on a le graphique suivant




et plus généralement, sur $[0,+\infty[$, on a le graphique suivant



On peut résumer les résultats obtenus dans le théorème suivant :

**Theoreme 9**

Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0,1]$, on a $x \geqslant x^2 \geqslant x^3$ et pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1,+\infty[$, $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$.

Sur l'intervalle $[0,1]$, le graphe de la fonction $x \mapsto x$ est au-dessus du graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ et le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ est au-dessus du graphe de la fonction $x \mapsto x^3$.

Sur l'intervalle $[1,+\infty[$, le graphe de la fonction $x \mapsto x$ est au-dessous du graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ et le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ est au-dessous du graphe de la fonction $x \mapsto x^3$.

# IV La fonction racine carrée

## A Définition

On rappelle la définition suivante :

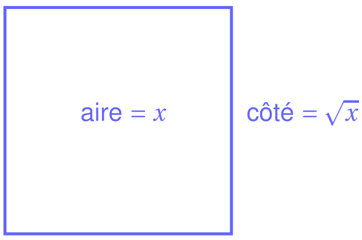
**Définition 4**

Soit $x$ un réel positif ou nul. La racine carrée de $x$ est le réel positif dont le carré est égal à $x$. On le note $\sqrt{x}$.

Par définition, pour tout réel positif $x$, on a $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

On doit avoir conscience que dans l'écriture $\sqrt{x}$, on a à la fois $x \geqslant 0$ et aussi $\sqrt{x} \geqslant 0$.

L'expression « racine carrée » est due au fait que $\sqrt{x}$ est la longueur du côté d'un carré dont l'aire est égale à $x$ (une aire égale à $4$ prend sa racine dans (ou encore provient d') un carré de côté $2$).




Si $x$ est un réel strictement négatif, il n'existe pas de carré dont l'aire est égale à $x$ car une aire est toujours un réel positif ou nul. Dans ce cas, le nombre $\sqrt{x}$ n'existe pas dans l'ensemble des nombres réels. On peut énoncer le théorème

**Theoreme 10**

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ (appelée fonction racine carrée) est définie sur $[0,+\infty[$.

## B Sens de variation de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

**Theoreme 11**

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Dans la démonstration qui suit, on va utiliser la notion de « quantité conjuguée ». La quantité conjuguée de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ : $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = a-b$. Multiplier la différence $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ par $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ permet de faire disparaître le symbole $\sqrt{\ }$. Dans la démonstration ci-dessous, on commence par s'assurer que le nombre $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ n'est pas nul pour pouvoir le faire apparaître en dénominateur.

**Démonstration :** (au programme.) Pour tout réel positif ou nul $x$, posons $f(x) = \sqrt{x}$.

Soient $a$ et $b$ deux réels positifs ou nuls tels que $a < b$. Donc, $\sqrt{a} \geqslant 0$. D'autre part, $b$ n'est pas nul car $b$ est strictement supérieur à $a$ qui est un réel supérieur ou égal à $0$. Donc, $\sqrt{b}$ est un réel positif qui n'est pas nul ou encore $\sqrt{b} > 0$. On en déduit que $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 0$. En particulier, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ n'est pas égal à $0$. On peut alors écrire :

$$f(b)-f(a) = \sqrt{b}-\sqrt{a} = \frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

On a vu plus haut que $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$. D'autre part, puisque $a<b$, on a $b-a>0$. Mais alors, $f(b)-f(a)$ est le quotient de deux réels strictement positifs. On en déduit que $f(b)-f(a)>0$ ou encore que $f(a)<f(b)$.

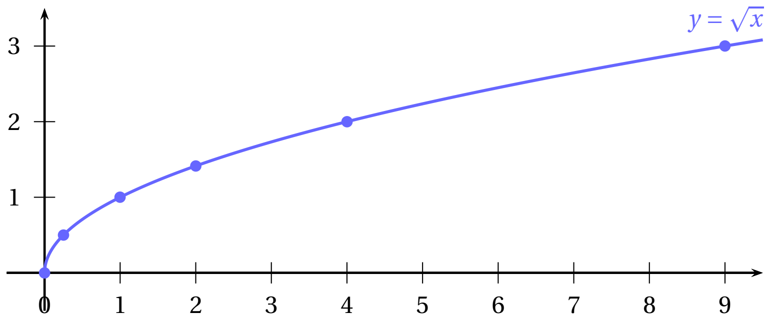
On a montré que pour tous réels positifs $a$ et $b$, si $a<b$, alors $f(a)<f(b)$. Donc, la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

■

## C Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

On a le tableau de valeurs suivant :

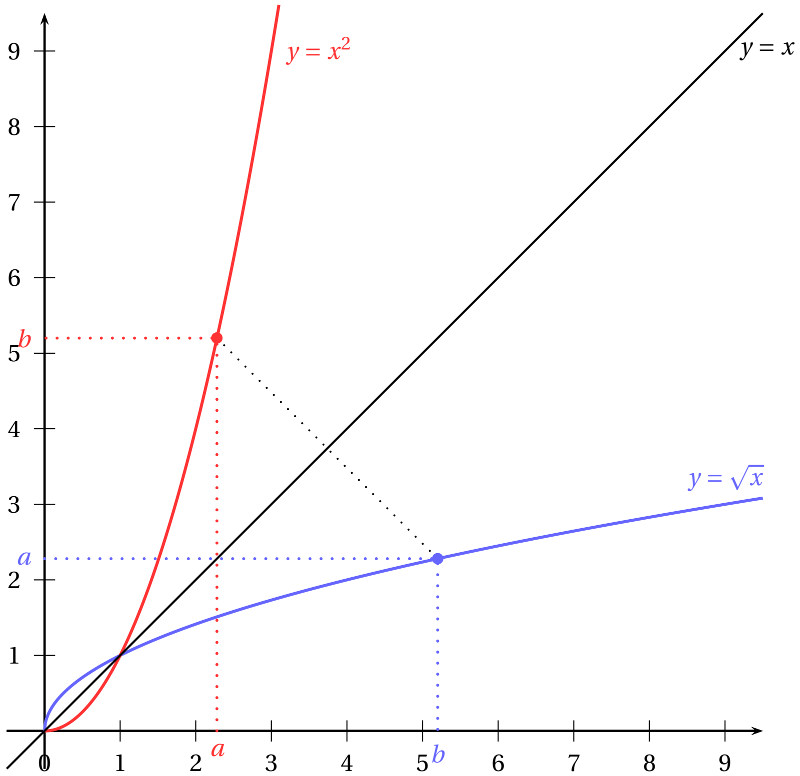
| $x$ | 0 | 0,25 | 1 | 2 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,414... | 2 | 3 |




## D Lien entre les graphes des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

Puisque $2^2=4$, le point A de coordonnées $(2,4)$ est un point du graphe de la fonction $x \mapsto x^2$. L'égalité $2^2=4$ fournit encore l'égalité $\sqrt{4}=2$ et donc le point B de coordonnées de $(4,2)$ est un point du graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Les coordonnées du point B sont obtenues en inversant l'ordre des coordonnées du point A.

Plus généralement, soient $a$ et $b$ deux réels positifs. Le point M de coordonnées $(a,b)$ est un point du graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ si et seulement si $b=a^2$. Supposons donc que les deux réels $a$ et $b$ soient liés par la relation $b=a^2$. Cette égalité fournit une autre égalité : $a=\sqrt{b}$. Le point N de coordonnées $(b,a)$ est un point du graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Inversement, si le point de coordonnées $(b,a)$ est un point du du graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, alors le point de coordonnées $(a,b)$ est un point du du graphe de la fonction $x \mapsto x^2$.



Le point de coordonnées $(a, b)$ est le symétrique du point de coordonnées $(b, a)$ par rapport à la droite $(\mathrm{D})$ d'équation $y = x$. Donc, le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est le symétrique du graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$ (qui est une moitié de parabole).

# V La fonction inverse

## A Définition

Pour tout réel $x$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ($f$ est la fonction inverse). On peut presque toujours calculer l'inverse d'un nombre réel. Un nombre réel fait exception, le nombre $0$, car le nombre $0$ n'a pas d'inverse ou encore $\dfrac{1}{0}$ n'existe pas. La fonction inverse est donc définie sur l'ensemble des réels non nuls à savoir $\mathbb{R}^*$ ou encore $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

**Theoreme 12**

L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (fonction inverse) est $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ou encore $\mathbb{R}^*$.

## B Symétrie du graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

**Theoreme 12**

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est impaire. Le graphe de la fonction inverse est symétrique par rapport l'origine $\mathrm{O}$ du repère.

**Démonstration :** Pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à $0$ car si $x$ est un réel non nul, $-x$ est aussi un réel non nul et inversement. Soit alors $x$ un réel non nul.

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

Ceci montre que la fonction inverse est impaire. Son graphe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

■

## C Sens de variation de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

**Theoreme 12**

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

**Démonstration :** (au programme). Pour tout réel non nul $x$, posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Soient $a$ et $b$ deux réels non nuls.

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{a-b}{ab} = -\frac{b-a}{ab}.$$

• Supposons de plus que $a$ et $b$ sont deux réels tels que $0 < a < b$. Alors, $ab > 0$ et $b - a > 0$ puis $-\dfrac{b-a}{ab} < 0$ et donc $f(a) > f(b)$. On a montré que pour tous réels $a$ et $b$ de l'intervalle $]0, +\infty[$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. Par suite, la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

• Supposons maintenant que $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b < 0$. Alors, $ab > 0$ et $b - a > 0$ puis $-\dfrac{b-a}{ab} < 0$ et donc encore une fois $f(a) > f(b)$. Ceci montre que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.

■

Ainsi,

la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$,

mais **attention**

la fonction inverse n'est pas strictement décroissante sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ou encore $\mathbb{R}^*$.

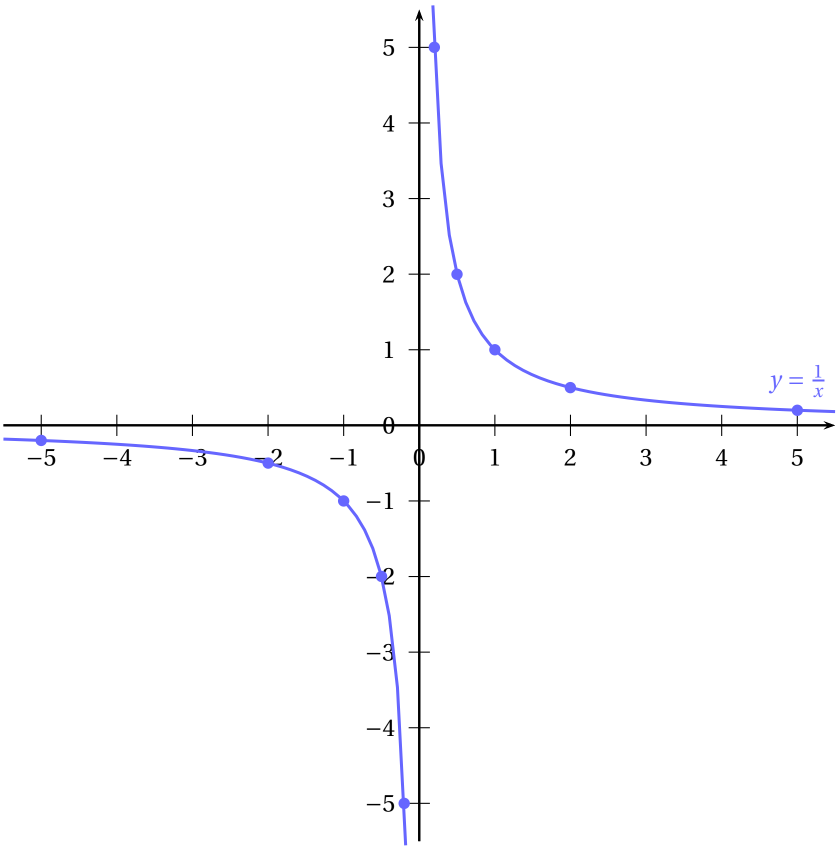
En effet, on a par exemple $-1<1$ et aussi $\frac{1}{-1}<\frac{1}{1}$. Les réels $a=-1$ et $b=1$ fournissent un exemple de deux réels non nuls tels que $a<b$ et aussi $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

## D Représentation graphique de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$

On a le tableau de valeurs suivants (et on n'oublie pas que le graphe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère) :

| $x$ | $0,2$ | $0,5$ | $1$ | $2$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1/x$ | $5$ | $2$ | $1$ | $0,5$ | $0,2$ |

Ce tableau fournit le graphe de la fonction inverse :




La courbe obtenue s'appelle une hyperbole. Elle est constituée de deux branches d'hyperbole.

☞ *Dans ce chapitre, vous avez découvert deux courbes, l'une appelée parabole et l'autre appelée hyperbole. Ces courbes font partie d'une catégorie de courbes appelées* ***coniques****. Ce sont les courbes obtenues en coupant un cône de révolution (ou encore un chapeau pointu) par un plan. Suivant l'inclinaison du plan, on obtient entre autres une hyperbole ou une parabole ou une ellipse. On peut montrer que les planètes, comètes, ... se déplacent nécessairement sur une telle courbe. Notre terre se déplace sur une ellipse. Certaines comètes se déplacent quant à elles sur une parabole ou sur une branche d'hyperbole, ce qui fait que si on les voit partir, elles ne reviendront pas et on ne les verra plus.*

*Vous pouvez visualiser une hyperbole dans la vie courante si vous possédez une lampe de chevet munie d'un abat-jour. L'ampoule est placée à l'intérieur de l'abat-jour et crée ainsi un cône de lumière par le trou supérieur de l'abat-jour. Si vous placez cette lampe contre un mur blanc, le cône de lumière est coupé par le plan du mur (qui est parallèle à l'axe du cône). La courbe que vous voyez se dessiner sur le mur est une branche d'hyperbole.*

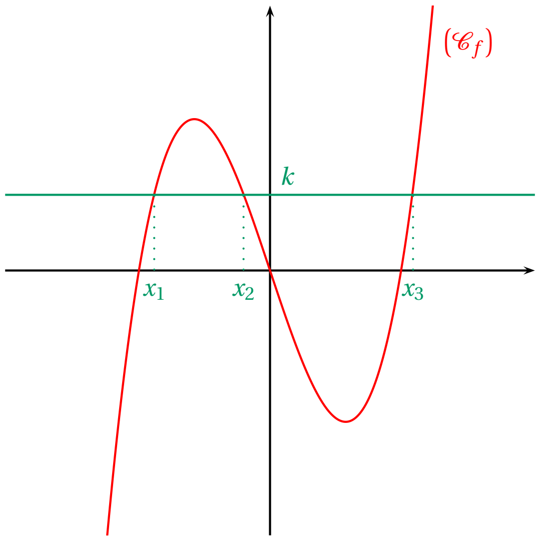
 

# VI Exemples de résolution d'équations du type $f(x)=k$ ou d'inéquations du type $f(x)\leqslant k$

## A Equations du type $f(x)=k$

Quelle que soit l'équation que l'on ait à résoudre, on a à disposition deux méthodes de résolution qui se complètent : une méthode de résolution algébrique et une méthode de résolution graphique.

Dans ce paragraphe, on veut s'intéresser à des équations du type $f(x)=k$ où $f$ est une fonction et $k$ est un nombre réel (et $x$ est un nombre réel inconnu). On a disposition la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ d'une certaine fonction $f$ :

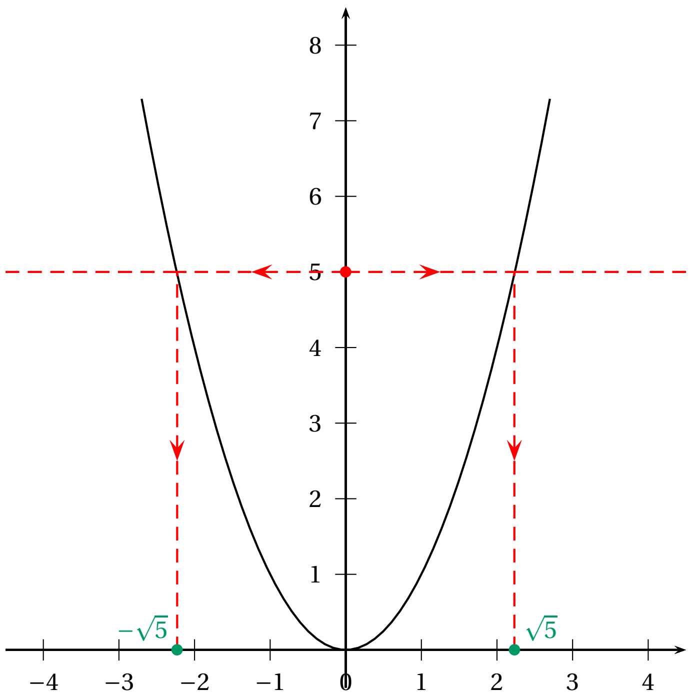



On place le réel $k$ sur l'axe des ordonnées. Les réels $x$ solution de l'équation $f(x)=k$ sont alors les abscisses des points de $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de $f$ dont l'ordonnée est égale à $k$ ou encore **les solutions de l'équation $f(x)=k$ sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de la droite d'équation $y=k$.** Le graphique permet de lire le nombre de ces solutions, éventuellement « une bonne valeur approchée des solutions » et plus rarement la valeur exacte des solutions.

**Exemple.** On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2=5$.

**Résolution algébrique.** Pour tout réel $x$, $x^2=5$ équivaut à $x^2-5=0$ ou encore $x^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=0$ ou encore à $\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)=0$ ou enfin à $x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$. L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$.

**Résolution graphique.** Le représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f\ :\ x\mapsto x^2$ est :



Résoudre graphiquement l'équation $x^2 = 5$ consiste à lire les abscisses $x$ des points de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dont l'ordonnée $y$ (avec $y = x^2$) est égale à $5$. On voit graphiquement que l'équation $x^2 = 5$ a deux solutions, (les nombres $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$ obtenus algébriquement).

On peut énoncer un résultat général (résolution de l'équation $x^2 = a$) :

**Theoreme 13**

Soit $a$ un réel donné.

Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions distinctes et opposées dans $\mathbb{R}$, les nombres $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
Si $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a une solution et une seule dans $\mathbb{R}$, le nombre $0$.
Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

**Démonstration :** Soit $a$ un réel. Soit $(\mathrm{E})$ l'équation $x^2 = a$ à résoudre dans $\mathbb{R}$.

**1er cas.** Supposons $a > 0$. Pour tout réel $x$

$$x^2 - a = x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right)$$

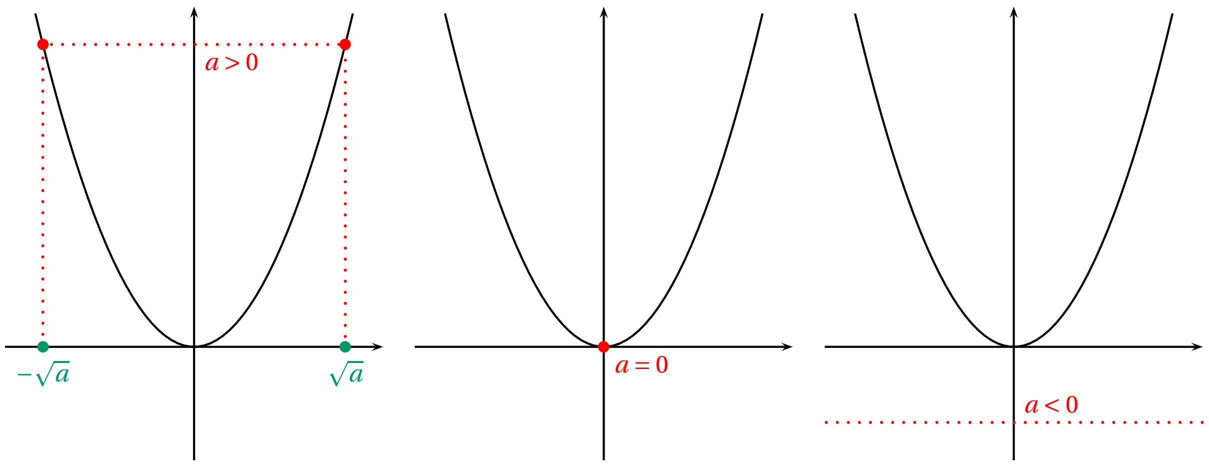
et donc $x^2 = a$ équivaut à $x^2 - a = 0$ puis $\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) = 0$ puis à $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$ et finalement à $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$. Ainsi, l'équation admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes et opposées, les deux nombres $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

**2 ème cas.** Supposons $a = 0$. L'équation $(\mathrm{E})$ s'écrit $x^2 = 0$ ou encore $x \times x = 0$ ce qui équivaut à $x = 0$ ou $x = 0$ et finalement à $x = 0$. L'équation $x^2 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement une solution, le nombre $0$.

**3 ème cas.** Supposons $a < 0$. On sait que pour tout réel $x$, $x^2 \geqslant 0$. Donc, il n'existe pas de réel $x$ tel que $x^2 = a$. L'ensemble des solutions de l'équation $(\mathrm{E})$ est vide.

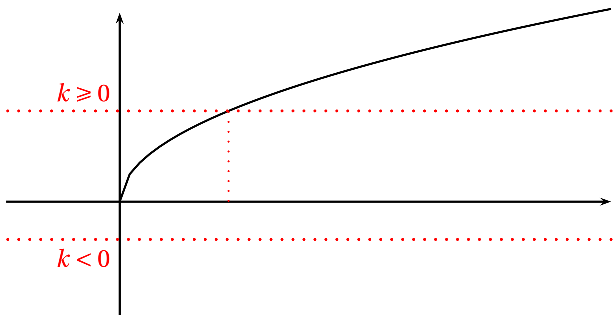
■

On peut visualiser graphiquement les trois cas. On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$. Si $a > 0$, il existe deux points distincts de $(\mathscr{C}_f)$ d'ordonnée $a$, si $a = 0$, il existe un point de $(\mathscr{C}_f)$ et un seul d'ordonnée $a$ et si $a < 0$, il n'existe pas de point de $(\mathscr{C}_f)$ d'ordonnée $a$ :



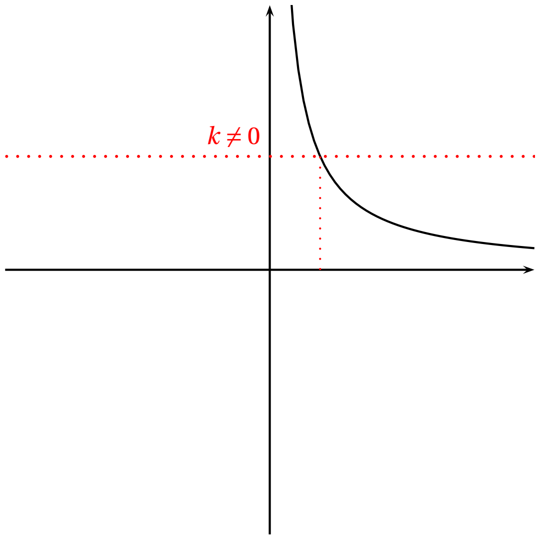

De la même façon,

- l'équation $\sqrt{x} = k$ a une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ (à savoir $k^2$ obtenu algébriquement) quand $k \geqslant 0$ et pas de solution quand $k < 0$,

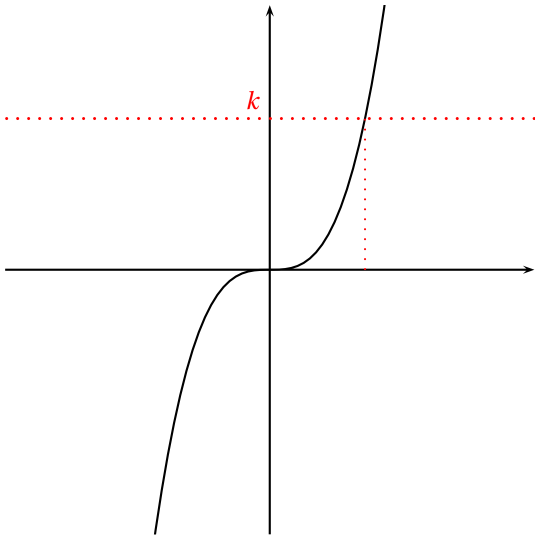


- l'équation $\frac{1}{x} = k$ a une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ quand $k \neq 0$ (à savoir $\frac{1}{k}$ obtenu algébriquement) et pas de solution quand $k = 0$,




- l'équation $x^3 = k$ a une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ pour tout réel $k$.




L'unique solution réelle de l'équation $x^3 = k$ est le nombre $\sqrt[3]{k}$ (« racine cubique de $k$ ») qui n'est pas au programme de la classe de seconde.

## B Inéquations du type $f(x) \leqslant k$ ou $f(x) < k$ ou $f(x) \geqslant k$ ou $f(x) > k$

On dispose cette fois-ci de trois méthodes, une méthode de résolution algébrique, une méthode utilisant le sens de variation des fonctions de référence et une méthode de résolution graphique.

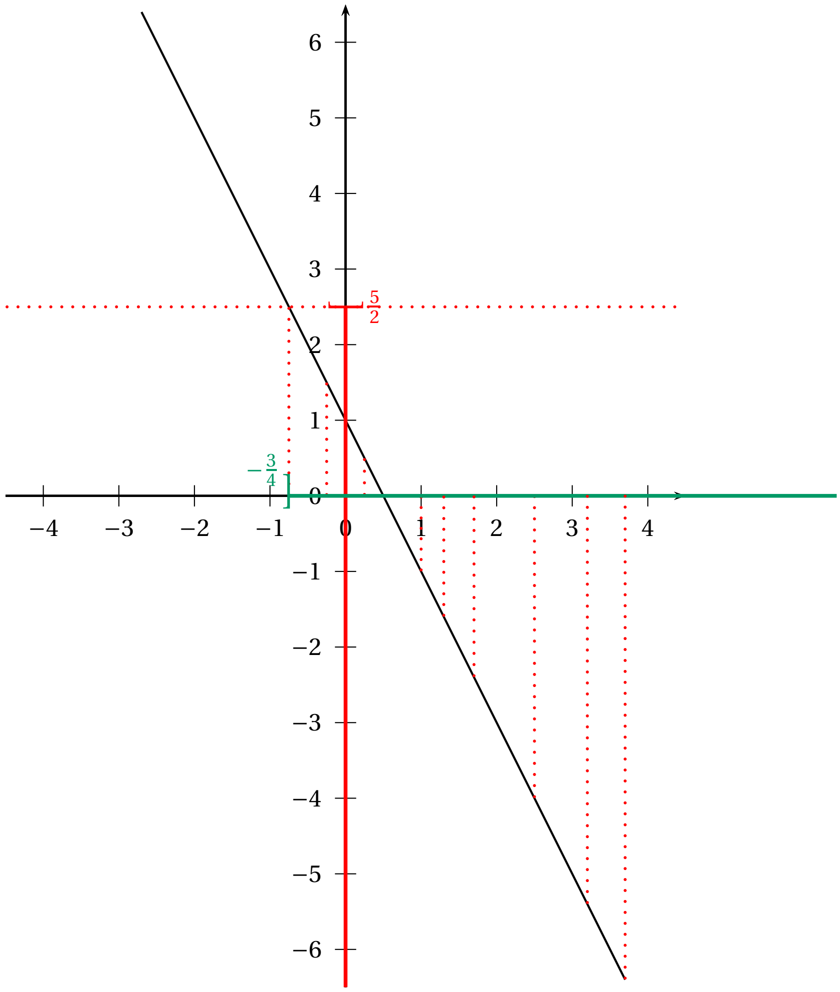
**Exemple 1.** On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2x + 1 < \frac{5}{2}$.

**Résolution algébrique.** Pour tout réel $x$, $-2x+1 < \frac{5}{2}$ équivaut à $-2x < -1+\frac{5}{2}$ ou encore $-2x < \frac{3}{2}$ ou encore $2x > -\frac{3}{2}$ ou encore $x > -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$ ou enfin $x > -\frac{3}{4}$. L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est $\left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

**Utilisation du sens de variation d'une fonction affine.** Pour tout réel $x$, $-2x + 1 = \frac{5}{2}$ équivaut à $-2x = -1 + \frac{5}{2}$ ou encore $-2x = \frac{3}{2}$ ou encore $x = -\frac{3}{4}$. D'autre part, puis $-2 < 0$, la fonction affine $f : x \mapsto -2x + 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, $-2x + 1 < \frac{5}{2}$ équivaut à $f(x) < f\left(-\frac{3}{4}\right)$ ou encore à $x > -\frac{3}{4}$. L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est $\left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

∗ **Résolution graphique.** Le représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f\ :\ x \mapsto -2x+1$ est :




Graphiquement, on lit les abscisses $x$ des points de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dont les ordonnées $y$ (avec $y=-2x+1$) sont strictement inférieures à $\frac{5}{2}$. Ce sont les réels de $\left]-\frac{3}{4},+\infty\right[$. Ces réels se lisent en projetant orthogonalement sur l'axe $(\mathrm{O}x)$, les points de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ situés strictement en dessous de la droite d'équation $y=-\frac{5}{2}$.

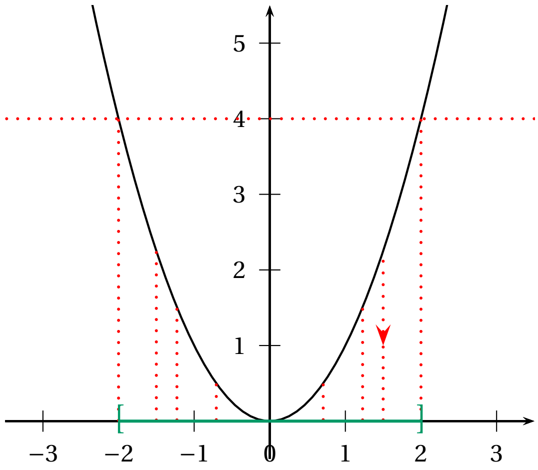
**Exemple 2.** On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $x^2 \leqslant 4$, $x^2 < 4$, $x^2 \geqslant 4$ et $x^2 > 4$.

**Résolution algébrique.** Pour tout réel $x$, $x^2 \leqslant 4$ équivaut à $x^2-4 \leqslant 0$. On étudie donc le signe de $x^2-4$ dans un tableau de signes. Pour tout réel $x$, $x^2-4=(x-2)(x+2)$ et donc $x^2-4=0$ équivaut à $x=-2$ ou $x=2$. On a alors le tableau de signes suivant :

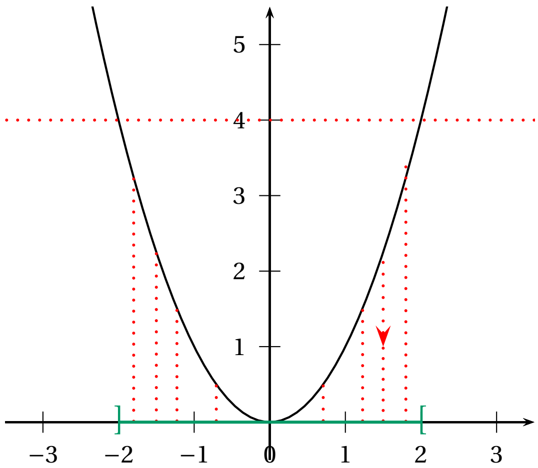
| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant 4$ est $[-2,2]$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2<4$ est $]-2,2[$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 4$ est $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2>4$ est $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.

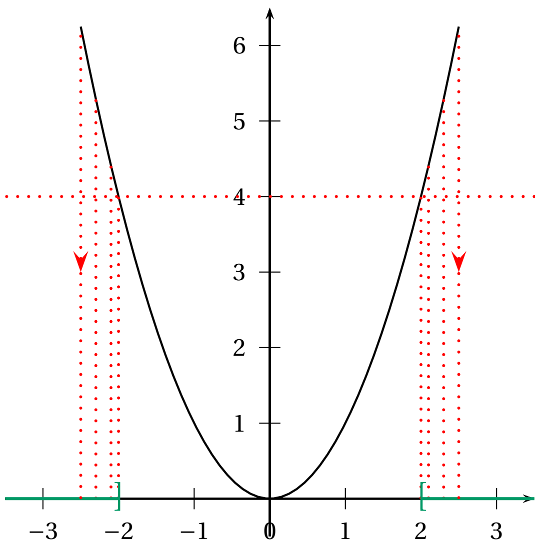
**Résolution graphique.** Graphiquement, on lit : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant 4$ est $[-2,2]$



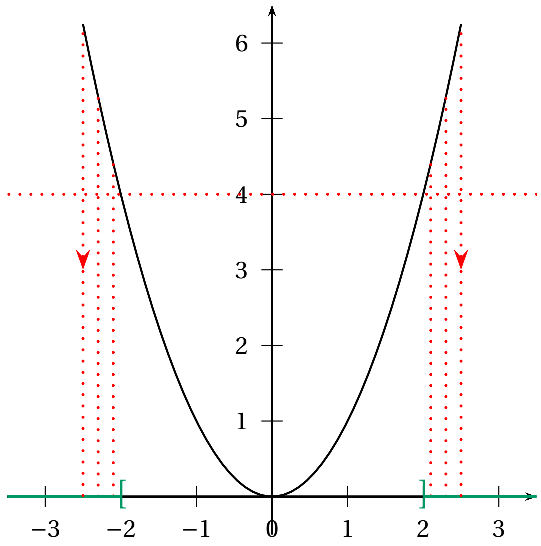

et l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 < 4$ est $]-2,2[$.




L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 4$ est $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$,




et l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 > 4$ est $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$,


6
5
4
3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3