FICHE n° 11. RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS.

I Généralités

Une **équation** est une égalité dans laquelle apparaît une **inconnue**. Cette inconnue est notée avec une lettre, assez souvent la lettre x au lycée, mais pas toujours. **Résoudre** une équation, c'est trouver toutes les valeurs que peut prendre l'inconnue telles que l'égalité est vraie. L'ensemble de ces valeurs est l'**ensemble des solutions de l'équation**.

Définition 1

Deux équations sont **équivalentes** si et seulement si ces deux équations ont le même ensemble de solutions.

Quand deux équations (E) et (E') sont équivalentes, on écrit « (E) équivaut à (E') » ou aussi, « $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow (\mathrm{E}')$ ».

Certaines manipulations transforment une équation en une équation équivalente :

- Ajouter à chaque membre de l'égalité un même réel.
- Faire passer de l'autre côté du signe = un réel pour l'addition.
- Simplifier chaque membre de l'égalité par un même réel pour l'addition.

- Multiplier chaque membre de l'égalité par un même réel **non nul**.
- Faire passer de l'autre côté du signe = un réel **non nul** pour la multiplication.
- Simplifier dans chaque membre de l'égalité un même réel **non nul** pour la multiplication.

C'est la multiplication qui est la plus dangereuse. **On ne simplifie pas par 0 pour la multiplication.**

Par exemple l'équation (E_1) : $x^2 = x$ n'est pas équivalente à l'équation (E_2) : $x = 1$, car l'équation (E_1) admet le nombre 0 pour solution alors que l'équation (E_2) n'admet pas le nombre 0 pour solution. L'erreur vient de la simplification par x quand $x = 0$.

II Equations diverses

1 Equations du premier degré

Théoreme 1

Soient a et b deux réels puis (E) l'équation : $ax + b = 0$.

Si $a \neq 0$, (E) admet une solution et une seule, à savoir $-\dfrac{b}{a}$. L'ensemble des solutions de (E) est $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.
Si $a = 0$ et $b \neq 0$, (E) n'admet pas de solution. L'ensemble des solutions de (E) est $\mathscr{S} = \varnothing$.
Si $a = 0$ et $b = 0$, tous les réels sont solutions de (E). L'ensemble des solutions de (E) est $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.

La technique de résolution d'une équation du premier degré consiste **à isoler l'inconnue x dans le premier membre** de l'équation. Par exemple, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{3} = \frac{5x-3}{2} &\Leftrightarrow 2(2x+1) = 3(5x-3) \text{ (on supprime tout de suite les fractions)}\\ &\Leftrightarrow 4x+2 = 15x-9 \Leftrightarrow 4x - 15x = -2-9 \text{ (on isole } x \text{ dans le premier membre)}\\ &\Leftrightarrow -11x = -11 \Leftrightarrow x = \frac{-11}{-11} \Leftrightarrow x = 1.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de l'équation proposée est : $\mathscr{S} = \{1\}$.

2 Equations produits

On dispose du résultat essentiel suivant :

Théoreme 2

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ou encore $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = 0$ si et seulement si $\mathrm{A} = 0$ ou $\mathrm{B} = 0$.

Quand une équation n'est plus du premier degré, la technique de résolution change : **on passe tout dans le premier membre et on factorise**.

Par exemple, on veut résoudre l'équation $(x+2)^2 = 2x^2 - 8$. Pour tout réel x,

$$
\begin{aligned}
(x+2)^2 = 2x^2 - 8 &\Leftrightarrow (x+2)^2 - \left(2x^2 - 8\right) = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 2\left(x^2 - 4\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+2)^2 - 2(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)((x+2) - 2(x-2)) \\
&\Leftrightarrow (x+2)(x+2-2x+4) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(-x+6) = 0 \\
&\Leftrightarrow x+2 = 0 \text{ ou } -x+6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 6.
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de l'équation proposée est : $\mathscr{S} = \{-2, 6\}$.

3 Equations du type $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = 0$

Théoreme 3

$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = 0$ équivaut à $\mathrm{A} = 0$ et $\mathrm{B} \neq 0$.

Technique. Pour résoudre une équation de la forme $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = 0$, on cherche les valeurs qui annulent le numérateur (c'est-à-dire pour lesquelles $\mathrm{A} = 0$) puis on élimine les valeurs qui annulent le dénominateur pour ne garder que celles qui n'annulent pas le dénominateur.

Par exemple, soit (E) l'équation $\dfrac{(x-1)(x+2)}{(2x-2)(3x+1)} = 0$. Les valeurs qui annulent le numérateur sont 1 et -2. Le dénominateur est nul quand $x = 1$ et non nul quand $x = -2$. L'ensemble des solutions de l'équation proposée est donc $\mathscr{S} = \{-2\}$.

On note qu'on ne cherche pas les valeurs qui annulent le dénominateur (considérez par exemple l'équation $\dfrac{x}{x^7 - 143x^4 + 2x - 12} = 0$).