Chapitre 11. Equations différentielles linéaires

Plan du chapitre

1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Présentation du problème

On se donne deux fonctions a et b définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on s'intéresse à l'**équation différentielle linéaire du premier ordre**

$$y' + ay = b \qquad (E).$$

Résoudre l'équation différentielle (E), c'est trouver **toutes** les fonctions f dérivables sur I vérifiant

$$\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \quad (*).$$

Une solution de (E) sur I est une fonction dérivable sur I vérifiant $(*)$. Les courbes représentatives des solutions de (E) sur I s'appellent les **courbes intégrales** de l'équation différentielle (E).
b est le **second membre** de l'équation différentielle (E). L'équation différentielle homogène (ou « sans second membre ») associée à l'équation (E) est

$$y' + ay = 0 \qquad (E_h).$$

On notera $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_h$) l'ensemble des solutions de (E) (resp. (E_h)) sur I.

1.2 Résolution de l'équation $y' + ay = b$ par la méthode de Lagrange

On se donne $a\ :\ x \mapsto a(x)$ et $b\ :\ x \mapsto b(x)$ deux fonctions **continues** sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par commodité, dans ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On veut résoudre sur I l'équation différentielle

$$y' + ay = b \qquad (E).$$

Puisque la fonction a est continue sur I, la fonction a admet des primitives sur I. On note A une primitive de la fonction a sur I. Enfin, on fixe un réel x_0 de I.

Soit f une fonction dérivable sur I. Puisque la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x)\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{A(x)}f'(x) + a(x)e^{A(x)}f(x) = b(x)e^{A(x)} \text{ (car } \forall x \in I,\ e^{A(x)} \neq 0)\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \left(e^{A}f\right)'(x) = b(x)e^{A(x)}\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}/\ \forall x \in I,\ f(x)e^{A(x)} = C + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}/\ \forall x \in I,\ f(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt.
\end{aligned}$$

Maintenant, la résolution ci-dessus a été effectuée sous l'hypothèse « soit f une fonction dérivable sur I ». Il reste donc à se préoccuper de la dérivabilité des solutions obtenues puis d'éliminer parmi les solutions obtenues celles qui ne sont pas dérivables sur I.
Puisque la fonction a est continue sur I, la fonction A est définie et dérivable sur I et il en est de même des fonctions $x \mapsto Ce^{-A(x)}$. D'autre part, puisque la fonction b est continue sur I et que la fonction A est continue sur I (car dérivable sur I), la fonction $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ est continue sur I. Mais alors, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt$ est dérivable sur I et il en est de même de la fonction $x \mapsto e^{-A(x)}\displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt$. Finalement, pour tout $C \in \mathbb{K}$, la fonction $x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt$ est dérivable sur I et par suite solution de (E) sur I.

⇨ **Commentaire** . *Le moment clé de la résolution est le moment où on multiplie les deux membres de l'égalité par* $e^{A(x)}$*. On fait ainsi apparaître la dérivée du produit* $e^A f$ *(*$\left(e^A f\right)' = e^A f' + A'e^A f = e^A f' + ae^A f$*). On passe ainsi d'une équation où l'inconnue* f *apparaît deux fois (*$f' + af = b$*) à une équation où l'inconnue* f *apparaît une seule fois (*$\left(e^A f\right)' = be^A$*). Il n'y a plus alors qu'à parcourir le chemin en sens inverse pour remonter à* f *(c'est-à-dire intégrer puis multiplier les deux membres par* e^{-A}*).*

On peut énoncer :

Théorème 1. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit $x_0 \in I$.

Les solutions sur I de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt,\ C \in \mathbb{R} \text{ (resp. } C \in \mathbb{C}),$$

où A est une primitive fixée de la fonction a sur I.

En particulier, l'équation $y' + ay = b$ admet au moins une solution sur I.

Exemple 1. Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^x f'(x) + e^x f(x) = e^x \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (\exp \times f)'(x) = e^x \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x f(x) = e^x + C \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + Ce^{-x}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{S} = \{x \mapsto 1 + Ce^{-x},\ C \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 2. Soit (E) l'équation différentielle $2xy' - y = 3x^2$ sur $I =]0, +\infty[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ 2xf'(x) - f(x) = 3x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) - \frac{1}{2x}f(x) = \frac{3}{2}x \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ e^{-\frac{1}{2}\ln(x)}f'(x) - \frac{1}{2x}e^{-\frac{1}{2}\ln(x)}f(x) = \frac{3}{2}xe^{-\frac{1}{2}\ln(x)} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(e^{-\frac{1}{2}\ln(x)}f\right)'(x) = \frac{3}{2}x \times \frac{1}{\sqrt{x}} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(\frac{1}{\sqrt{x}}f\right)'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{1}{\sqrt{x}}f(x) = x^{\frac{3}{2}} + C \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x^2 + C\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto x^2 + C\sqrt{x},\ C \in \mathbb{R}\right\}$.

Exemple 3. Soit (E) l'équation différentielle $(\operatorname{ch} x)y' + (\operatorname{sh} x)y = \operatorname{th} x$ sur $I = \mathbb{R}$.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (\operatorname{ch} x)f'(x) + (\operatorname{sh} x)f(x) = \operatorname{th} x \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (\operatorname{ch} \times f)'(x) = \operatorname{th} x \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch} x\ f(x) = \ln(\operatorname{ch} x) + C \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\ln(\operatorname{ch} x) + C}{\operatorname{ch} x}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \dfrac{\ln(\operatorname{ch} x) + C}{\operatorname{ch} x},\ C \in \mathbb{R}\right\}$.

1.3 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 2. Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les solutions de (E_h) : $y' + ay = 0$, sur I, sont les fonctions de la forme Cf_0 où f_0 est une solution non nulle quelconque de (E_h) sur I et $C \in \mathbb{K}$.

Démonstration .

Les solutions de $(E) : y' + ay = b$ sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt$. Quand b est la fonction nulle, on obtient en particulier le fait que les solutions de $(E_h) : y' + ay = 0$ sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)}$. On note que la fonction $x \mapsto e^{-A(x)}$ n'est pas nulle. Donc, si on pose $f_1 = e^{-A}$, f_1 est une solution non nulle de (E_h) sur I et $\mathcal{S}_h = \{Cf_1,\ C \in \mathbb{K}\}$.

Si maintenant, f_0 est une solution non nulle quelconque de (E_h), alors il existe $C_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $f_0 = C_0 f_1$. Mais alors,

$$\{Cf_1,\ C \in \mathbb{K}\} = \left\{\frac{C}{C_0}C_0 f_1,\ C \in \mathbb{K}\right\} = \left\{\frac{C}{C_0}f_0,\ C \in \mathbb{K}\right\} \subset \left\{C'f_0,\ C' \in \mathbb{K}\right\}$$

et $\{Cf_0,\ C \in \mathbb{K}\} = \{CC_0 f_1,\ C \in \mathbb{K}\} \subset \{C'f_1,\ C' \in \mathbb{K}\}$. Finalement $\mathcal{S} = \{Cf_0,\ C \in \mathbb{K}\}$.

❑

Théorème 3. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les solutions de $(E) : y' + ay = b$ sur I sont les fonctions de la forme $Cf_0 + f_1$ où f_0 est une solution non nulle quelconque de (E_h) sur I (où (E_h) est l'équation homogène associée $y' + ay = 0$), f_1 est une solution particulière de (E) sur I et $C \in \mathbb{K}$.

Démonstration . D'après le théorème 1, l'équation (E) admet au moins une solution sur I. Soit f_1 une solution particulière de (E) sur I. Par construction, la fonction f_1 vérifie $f_1' + af_1 = b$ sur I. On note aussi f_0 une solution non nulle de (E_h) sur I.

Soit alors f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow f' + af = b \Leftrightarrow f' + af = f_1' + af_1 \\
&\Leftrightarrow (f - f_1)' + a(f - f_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow f - f_1 \text{ solution de } (E_h) \text{ sur I} \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}/\ f - f_1 = Cf_0 \text{ (d'après le théorème 2)} \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}/\ f = Cf_0 + f_1.
\end{aligned}$$

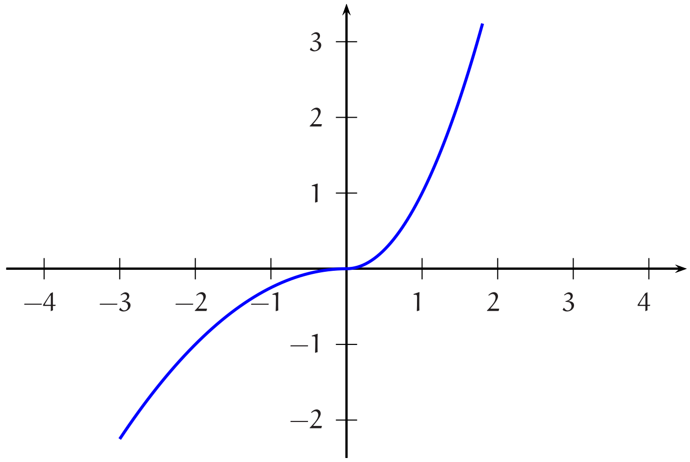
❑

On a l'habitude de dire que la *solution générale* de l'équation différentielle (E) est la somme d'une *solution particulière* de l'équation (E) et de la *solution générale* de l'équation homogène associée (E_h) :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{sol gén de } (E) \\ = \\ \text{sol part de } (E) \\ + \\ \text{sol gen de } (E_h). \end{array}}$$

Exemple 1. Soit (E) l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ sur $I =]0, +\infty[$. Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$. Puisque la fonction $a\ :\ x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, les solutions de l'équation (E) sur I sont de la forme Cf_0, $C \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution non nulle de (E) sur I. La fonction $f_0\ :\ x \mapsto x^2$ est bien sûr solution de (E) sur I et donc les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$. ❑

Exemple 2. Soit (E) l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ sur $I = \mathbb{R}$. Sur I, l'équation (E) n'est pas du type $y' + ay = 0$ où a est une fonction continue sur I. Le théorème 2 ne s'applique donc plus.
La fonction $f_0\ :\ x \mapsto x^2$ est encore solution de (E) sur I et de manière plus générale, les fonctions de la forme $x \mapsto Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$, sont **des** solutions de (E) sur I. Mais rien ne permet d'affirmer que l'on a trouvé **toutes** les solutions de (E) sur I.
De fait, la fonction $f\ :\ x \mapsto \left\{\begin{array}{l} x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -\dfrac{x^2}{4} \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$ n'est pas du type $x \mapsto Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$, mais on vérifie facilement que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et en particulier en 0) et vérifie pour tout réel x, $xf'(x) - 2f(x) = 0$ ou encore f est solution de (E) sur $I = \mathbb{R}$. Voici le graphe de la fonction f.



Exemple 3. Soit (E) l'équation différentielle $xy' - 2y = 1$ sur $I =]0, +\infty[$. Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{x}$. Puisque les fonctions $a\ :\ x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ et $b\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont continues sur $]0, +\infty[$, les solutions de l'équation (E) sur I sont de la forme $Cf_0 + f_1$, $C \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution non nulle de (E_h) sur I et f_1 est une solution particulière de (E). La fonction $f_0\ :\ x \mapsto x^2$ est bien sûr solution de (E_h) sur I et la fonction $f_1\ :\ x \mapsto -\dfrac{1}{2}$ est bien sûr solution de (E) sur I. Donc, les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\dfrac{1}{2} + Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$. ❏

1.4 Le théorème de Cauchy

Théorème 4 (théorème de Cauchy). Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une solution f de $(E) : y' + ay = b$ sur I et une seule vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Démonstration. Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $f\ :\ x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\ dt$ où A est une primitive donnée de a sur I et $C \in \mathbb{K}$. On choisit pour A la primitive de a sur I qui s'annule en x_0. Donc, pour tout x de I, $A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)\ dt$.

$$f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow Ce^{-A(x_0)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x_0} b(t)e^{-A(t)}\ dt = y_0 \Leftrightarrow C = y_0.$$

Ceci montre l'existence et l'unicité d'une solution prenant la valeur y_0 en x_0.

❏

Expression de la solution de $y' + ay = b$ prenant la valeur y_0 en x_0 :

$$x \mapsto y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt$$

où A est la primitive de a sur I s'annulant en x_0.

⇨ **Commentaire**. *Il ne faut surtout pas croire que l'existence et/ou l'unicité d'une solution vérifiant une « condition initiale » est automatiquement acquise, même pour des équations différentielles très simples.*

◇ *L'équation différentielle* $(x-1)y' + (x-1)y = 1$ *n'admet pas de solution sur* $\mathbb{R}$ *car si* f *est une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$, $(1-1)f'(1) + (1-1)f(1) = 0 \neq 1$ *(cette équation ne peut s'écrire sur* $\mathbb{R}$ *sous la forme* $y' + ay = b$ *avec* a *et* b *continues sur* $\mathbb{R}$*).*

◇ *L'équation différentielle* $xy' - 2y = 0$ *admet (au moins) deux solutions distinctes s'annulant en* 0 *à savoir* $x \mapsto x^2$ *et* $x \mapsto -x^2$ *(cette équation ne peut s'écrire sur* $\mathbb{R}$ *sous la forme* $y' + ay = b$ *avec* a *et* b *continues sur* $\mathbb{R}$*).*

◇ *L'équation différentielle* $y'^2 - y = 0$ *admet (au moins) deux solutions distinctes s'annulant en* 0 *à savoir* $x \mapsto 0$ *et* $x \mapsto \dfrac{x^2}{4}$ *(cette équation n'est pas linéaire).*

Les hypothèses du théorème de Cauchy sont précises : . . . ***continues*** *. . .* ***intervalle*** *. . . et le théorème de Cauchy ne peut être utilisé que quand ces hypothèses sont vérifiées.*

Un corollaire important au théorème 4 est :

Théorème 5. Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ s'annulant sur I est nécessairement la fonction nulle.
Toute solution sur I de l'équation différentielle $y' + ay = 0$, non nulle sur I, ne s'annule pas sur I.

Démonstration . Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur I, s'annulant en un certain réel x_0 de I (c'est-à-dire prenant la valeur 0 en x_0). La fonction nulle est aussi une solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur I, s'annulant en x_0. Par unicité d'une telle solution, on en déduit que $f = 0$.

Par contraposition, si f est une solution non nulle de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur I, f ne s'annule pas sur I.

❑

⇨ **Commentaire** . *On peut obtenir ce résultat directement à partir de l'expression des solutions. Les solutions de l'équation différentielle* $y' + ay = 0$ *sur* I *sont les fonctions de la forme* $x \mapsto Ce^{-A(x)}$*, où* A *est une primitive de* a *sur* I *et* $C \in \mathbb{K}$*. Pour une telle solution, ou bien* $C = 0$ *et dans ce cas, cette solution est la fonction nulle, ou bien* $C \neq 0$*, et dans ce cas, cette solution ne s'annule pas sur* I *(car la fonction exponentielle ne s'annule pas sur* $\mathbb{C}$*).*

Le théorème de Cauchy a une traduction géométrique dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: puisque pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une solution et une seule f de (E) sur I telle que $f(x_0) = y_0$, tout point (x_0, y_0) de la bande $I \times \mathbb{R}$ appartient à une et une seule des courbes intégrales de l'équation (E) ou encore les courbes intégrales de l'équation (E) constituent une partition de la bande $I \times \mathbb{R}$.

1.5 Méthode de variation de la constante

Dans ce paragraphe, on suppose connue une solution f_0 sur I de l'équation homogène (E_h), non nulle sur I. Pour résoudre l'équation différentielle (E) sur I, il ne manque plus qu'une solution particulière de (E) sur I. Le théorème suivant fournit un moyen d'en obtenir une.

Théorème 6. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit (E) l'équation différentielle $y' + ay = b$. Soit f_0 une solution sur I, non nulle, de l'équation homogène associée (E_h).

Il existe une solution particulière de (E) sur I de la forme $f_1 : x \mapsto C(x)f_0(x)$ où C est une fonction dérivable sur I. De plus, la fonction C vérifie $C' = \dfrac{b}{f_0}$.

Démonstration . Soit C une fonction dérivable sur I puis $f_1 = Cf_0$.

$$\begin{aligned} f_1' + af_1 = b &\Leftrightarrow C'f_0 + Cf_0' + aCf_0 = b \Leftrightarrow C'f_0 + C \times \left(f_0' + af_0\right) = b \\ &\Leftrightarrow C'f_0 = b \text{ (car } f_0 \text{ est solution de } y' + ay = 0 \text{ sur I)} \\ &\Leftrightarrow C' = \frac{b}{f_0} \text{ (car } f_0 \text{ ne s'annule pas sur I)}. \end{aligned}$$

Maintenant, les fonctions b et f_0 sont continues sur I (f_0 est continue sur I car dérivable sur I) et la fonction f_0 ne s'annule pas sur I. Donc, la fonction $\dfrac{b}{f_0}$ est continue sur I. Par suite, la fonction $\dfrac{b}{f_0}$ admet au moins une primitive sur I. On en déduit l'existence de la fonction C.

❑

Exemple. Considérons l'équation différentielle $(E) : y' - y = \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 0$ sont les fonctions de la forme Cf_0 où f_0 est la fonction $x \mapsto e^x$ et $C \in \mathbb{R}$.

Déterminons une solution particulière de (E) sur I par la méthode de variation de la constante. Soient C une fonction dérivable sur I puis $f_1 = Cf_0$.

$$f_1 \text{ solution de } (E) \text{ sur I} \Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = \cos x \Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x) = \cos x e^{-x}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int \cos x e^{-x}\, dx &= \mathrm{Re}\left(\int e^{-x}e^{ix}\, dx\right) = \mathrm{Re}\left(\int e^{(-1+i)x}\, dx\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}\right) + \lambda = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-x}(\cos x + i\sin x)(-1-i)}{2}\right) + \lambda \\ &= \frac{e^{-x}(-\cos x + \sin x)}{2} + \lambda. \end{aligned}$$

La fonction $C\ :\ x \mapsto \dfrac{e^{-x}(-\cos x+\sin x)}{2}$ convient et fournit la solution particulière $f_1\ :\ x \mapsto \dfrac{-\cos x+\sin x}{2}$.

Les solutions de l'équation différentielle (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^x + \dfrac{-\cos x+\sin x}{2}$, $C \in \mathbb{R}$. ❑

1.6 Principe de superposition des solutions

Théorème 7 (principe de superposition des solutions). Soient a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient λ_1 et λ_2 deux nombres réels ou complexes.

On suppose que f_1 est une solution particulière sur I de l'équation $y'+ay=b_1$ et que f_2 est une solution particulière sur I de l'équation $y'+ay=b_2$. Alors, la fonction $f=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y'+ay=b$ où $b=\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2$.

Démonstration . f est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} f'+af &= (\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)'+a\times(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\lambda_1\left(f_1'+af_1\right)+\lambda_2\left(f_2'+af_2\right)\\ &= \lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2=b. \end{aligned}$$

❑

Considérons par exemple l'équation différentielle $y'-y=\cos x+x$. La fonction $x\mapsto \dfrac{-\cos x+\sin x}{2}$ est solution de $y'-y=\cos x$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x\mapsto -x-1$ est solution de $y'-y=x$ sur $\mathbb{R}$. Donc, une solution particulière de l'équation différentielle $y'-y=\cos x+x$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x\mapsto \dfrac{-\cos x+\sin x}{2}-x-1$.

1.7 Prolongement de solutions

Exemple 1. Considérons l'équation différentielle (E) : $xy'-2y=0$ sur $\mathbb{R}$. Sur $I=]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$, (E) est équivalente à $y'-\dfrac{2}{x}y=0$. Puisque la fonction $a\ :\ x\mapsto -\dfrac{2}{x}$ est continue sur I, les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme Cf_0 où f_0 est une solution non nulle de (E) sur I et $C\in\mathbb{R}$. Plus précisément, les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto Cx^2$, $C\in\mathbb{R}$.

Passons à l'intervalle $I=\mathbb{R}$. La fonction nulle est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, les fonctions de la forme $x\mapsto Cx^2$, $C\in\mathbb{R}$, sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Déterminons maintenant **toutes** les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $0\times f'(0)-2f(0)=0$ et donc, nécessairement $f(0)=0$.
D'autre part, la restriction de f à $]-\infty,0[$ (resp. $]0,+\infty[$) est solution de (E) sur $]-\infty,0[$ (resp. $]0,+\infty[$). Donc, il existe **deux** constantes C_1 et C_2 telles que pour $x<0$, $f(x)=C_1x^2$ et pour $x>0$, $f(x)=C_2x^2$. En résumé, si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, nécessairement il existe $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} C_1x^2 \text{ si } x<0\\ 0 \text{ si } x=0\\ C_2x^2 \text{ si } x>0\end{cases}=\begin{cases} C_1x^2 \text{ si } x<0\\ C_2x^2 \text{ si } x\geqslant 0\end{cases}$.

Réciproquement, une telle fonction est dérivable sur $]-\infty,0[$ et solution de (E) sur $]-\infty,0[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et solution de (E) sur $]0,+\infty[$ et enfin, si cette fonction est dérivable en 0, cette fonction vérifie encore l'équation (E) pour $x=0$. En résumé, une telle fonction est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si cette fonction est dérivable en 0.
Pour $x<0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{C_1x^2-0}{x-0}=C_1x$ et pour $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{C_2x^2-0}{x-0}=C_2x$. Quand x tend vers 0, à droite ou à gauche, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers 0 ou encore $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. La fonction f est donc dérivable en 0 pour tout choix de C_1 et C_2 puis, la fonction f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ pour tout choix de C_1 et C_2.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f de la forme $x\mapsto\begin{cases} C_1x^2 \text{ si } x<0\\ C_2x^2 \text{ si } x\geqslant 0\end{cases}$, $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$. On peut noter que si on pose : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_1(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x<0\\ 0 \text{ si } x\geqslant 0\end{cases}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_2(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0\\ x^2 \text{ si } x\geqslant 0\end{cases}$, alors pour tout réel x, $f(x)=C_1f_1(x)+C_2f_2(x)$ ou encore $f=C_1f_1+C_2f_2$. Donc, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est $\left\{C_1f_1+C_2f_2,(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$. ❑

Exemple 2. Considérons l'équation différentielle (E) : $xy'+y=0$ sur $\mathbb{R}$. Sur $I=]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x\mapsto\dfrac{C}{x}$, $C\in\mathbb{R}$.

Une solution de (E) sur $I = \mathbb{R}$ est nécessairement de la forme $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{C_1}{x} \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{C_2}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

Réciproquement, une telle fonction est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si cette fonction est dérivable en 0.
Si $C_1 \neq 0$ ou $C_2 \neq 0$, la fonction f n'a pas une limite réelle en 0 et en particulier, n'est pas dérivable en 0. Si $C_1 = C_2 = 0$, la fonction f est la fonction nulle.

L'équation différentielle (E) admet sur $\mathbb{R}$ une solution et une seule à savoir la fonction nulle. ❏

⇨ **Commentaire** . *A ce jour, nous ne pouvons étudier que des exemples très simples car nous manquons d'outils pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point. Ces outils seront exposés dans le chapitre « Comparaison des fonctions en un point ».*

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $|x|y' - (x-1)y = x^3$

1) sur $]0, +\infty[$,
2) sur $]-\infty, 0[$,
3) sur $\mathbb{R}$ (cette question ne peut pas être résolue si on ne connaît pas le chapitre « Comparaison des fonctions en un point »).

Solution 1. On note (E_h) l'équation différentielle homogène associée : $|x|y' + (x-1)y = 0$.

1) Résolution de (E) sur $]0, +\infty[$. Sur $]0, +\infty[$, l'équation (E) s'écrit $y' + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) y = x^2$. Puisque les deux fonctions $a : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ et $b : x \mapsto x^2$ sont continues sur $]0, +\infty[$, les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda f_0 + f_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution non nulle de (E_h) sur $]0, +\infty[$ et f_1 une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) f(x) = x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ e^{x-\ln(x)} f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{x-\ln(x)} f(x) = x^2 e^{x-\ln(x)} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(\frac{e^x}{x} f\right)'(x) = x e^x \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \ \forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{e^x}{x} f(x) = (x-1)e^x + C \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x^2 - x + Cxe^{-x}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 - x + Cxe^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

2) Résolution de (E) sur $I =]-\infty, 0[$. Sur $]-\infty, 0[$, l'équation (E) s'écrit $y' + \left(-1 + \dfrac{1}{x}\right) y = -x^2$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto -1 + \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto -x^2$ sont continues sur $]-\infty, 0[$, les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda f_0 + f_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution non nulle de (E_h) sur $]-\infty, 0[$ et f_1 une solution de (E) sur $]-\infty, 0[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]-\infty, 0[$

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \left(-1 + \frac{1}{x}\right) f(x) = -x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{-x+\ln(-x)} f'(x) + \left(-1 + \frac{1}{x}\right) e^{-x+\ln(-x)} f(x) = -x^2 e^{-x+\ln(-x)} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \left(-xe^{-x} f\right)'(x) = x^3 e^{-x} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ \left(xe^{-x} f\right)'(x) = -x^3 e^{-x}.
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int -x^3 e^{-x}\, dx = x^3 e^{-x} - 3\int x^2 e^{-x}\, dx = (x^3 + 3x^2)e^{-x} - 6\int xe^{-x}\, dx = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x} + C$, $C \in \mathbb{R}$ et donc

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \ \forall x \in]-\infty,0[,\ xe^{-x} f(x) = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x} + C \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \ \forall x \in]-\infty,0[,\ f(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{6 + Ce^x}{x}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6 + Ce^x}{x}$, $C \in \mathbb{R}$.

3) Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$. Soit f est une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} x^2 - x + C_1 x e^{-x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6 + C_2 e^x}{x} \text{ si } x < 0 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} x^2 - x + C_1 x e^{-x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6 + C_2 e^x}{x} \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$. Réciproquement, une telle fonction est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(x) = -x + o(x) + C_1 x(1 + o(1)) = (C_1 - 1)x + o(x)$. Par suite, f est dérivable à droite en 0 pour tout choix de C_1 et $f'_d(0) = C_1 - 1$.

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures,

$$f(x) = 6 + 3x + o(x) + \frac{6 + C_2\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x} = \frac{6 + C_2}{x} + 6 + C_2 + \left(3 + \frac{C_2}{2}\right)x + o(x)$$

Si $C_2 \neq -6$, f n'a pas de limite réelle quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et si $C_2 = -6$, $f(x) = o(x)$. Par suite, f est dérivable à gauche en 0 si et seulement si $C_2 = -6$. Dans ce cas, quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $f(x) = o(x)$ et $f'_g(0) = 0$. Maintenant, f est dérivable en 0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = f'_g(0)$. Ceci équivaut à $C_2 = -6$ et $C_1 = 1$.

L'équation (E) admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}$ à savoir la fonction $x \mapsto \left\{\begin{array}{l} x^2 - x + xe^{-x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6(1 - e^x)}{x} \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$.

---

2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse maintenant aux équations différentielles du type (E) : $ay'' + by' + cy = g(x)$ où a, b et c sont trois constantes complexes ($a \neq 0$) et g est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Cette équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (les coefficients du premier membre ne varient pas quand x varie).

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions f, deux fois dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, vérifiant :

$$\forall x \in I,\ af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x).$$

L'équation homogène (ou « sans second membre ») associée à l'équation (E) est l'équation (E_h) : $ay'' + by' + cy = 0$.

2.1 Le théorème de Cauchy

On admet le théorème suivant (dont la démonstration est hors programme et dépasse de toute façon le niveau de maths sup) :

Théorème 8. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et g une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, il existe une solution f de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = g$ sur I et une seule vérifiant $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

Intéressons nous maintenant à l'équation homogène.

2.2 Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

2.2.1 Le cas général où a, b et c sont complexes

On se donne trois nombres complexes a, b et c, a étant non nul. On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ (E_h), c'est-à-dire on veut trouver toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, vérifiant pour tout réel x, $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$.

Découvrons le résultat. Par analogie avec le premier ordre, cherchons des solutions f de la forme $x \mapsto e^{zx}$, $z \in \mathbb{C}$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$af''(x)+bf'(x)+cf(x)=az^2e^{zx}+bze^{zx}+ce^{zx}=\left(az^2+bz+c\right)e^{zx}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \left(az^2+bz+c\right)e^{zx}\\ &\Leftrightarrow az^2+bz+c=0 \text{ (car } \forall x\in\mathbb{R},\ e^{zx}\neq 0).\end{aligned}$$

L'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$, d'inconnue une fonction f, s'est « transformée » en une équation algébrique d'inconnue un nombre complexe z.

Définition 1. Soient a, b et c trois nombres complexes, a étant non nul. Soit (E_h) l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$.

L'**équation caractéristique** de l'équation (E_h) est l'équation (E_c) :

$$az^2+bz+c=0,$$

d'inconnue un nombre complexe z.

On sait que deux cas de figure se présentent :

1er cas. Si $b^2-4ac\neq 0$, l'équation (E_c) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes r_1 et r_2. D'après le travail fait plus haut, les deux fonctions $f_1 : x\mapsto e^{r_1x}$ et $f_2 : x\mapsto e^{r_2x}$ sont solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$. On obtient alors beaucoup d'autres solutions : les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda_1f_1+\lambda_2f_2$, $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2$, sont des solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$\begin{aligned}a\left(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2\right)''+b\left(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2\right)'+c\left(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2\right)&=\lambda_1\left(af_1''+bf_1'+cf_1\right)+\lambda_2\left(af_2''+bf_2'+cf_2\right)\\&=\lambda_1\times 0+\lambda_2\times 0\\&=0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\left\{\lambda_1f_1+\lambda_2f_2,\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2\right\}\subset\mathcal{S}_h$. On va maintenant démontrer que l'on a obtenu toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ ou encore on va démontrer que $\left\{\lambda_1f_1+\lambda_2f_2,\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2\right\}=\mathcal{S}_h$.

Soit f une solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$. Posons $y_0=f(0)$ et $z_0=f'(0)$. Pour $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2$ et $x\in\mathbb{R}$, posons encore $g(x)=\lambda_1e^{r_1x}+\lambda_2e^{r_2x}$.

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}g(0)=y_0\\ g'(0)=z_0\end{array}\right.&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2=y_0\\ \lambda_1r_1+\lambda_2r_2=z_0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda_2=y_0-\lambda_1\\ \lambda_1r_1+\left(y_0-\lambda_1\right)r_2=z_0\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(r_1-r_2\right)\lambda_1=z_0-y_0r_2\\ \lambda_2=y_0-\lambda_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda_1=\dfrac{z_0-y_0r_2}{r_1-r_2}\\ \lambda_2=y_0-\dfrac{z_0-y_0r_2}{r_1-r_2}\end{array}\right.\quad(\text{car } r_1\neq r_2)\\&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda_1=\dfrac{z_0-y_0r_2}{r_1-r_2}\\ \lambda_2=\dfrac{y_0r_1-z_0}{r_1-r_2}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Soit alors g la fonction $x\mapsto\dfrac{z_0-y_0r_2}{r_1-r_2}e^{r_1x}+\dfrac{y_0r_1-z_0}{r_1-r_2}e^{r_2x}$. La fonction g est solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$ et de plus, $g(0)=f(0)$ et $g'(0)=f'(0)$. Par unicité d'une telle solution (théorème de Cauchy), on a $g=f$ et donc f est de la forme $\lambda_1f_1+\lambda_2f_2$, $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2$. On a ainsi montré que $\mathcal{S}_h=\left\{\lambda_1f_1+\lambda_2f_2,\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2\right\}$ où f_1 est la fonction $x\mapsto e^{r_1x}$ et f_2 est la fonction $x\mapsto e^{r_2x}$.

2ème cas. Si $b^2-4ac=0$, l'équation (E_c) admet dans $\mathbb{C}$ une solution double $r=-\dfrac{b}{2a}$. La fonction $f_1 : x\mapsto e^{rx}$ est solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$. Vérifions que la fonction $f_2 : x\mapsto xe^{rx}$ est aussi solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$. Pour $x\in\mathbb{R}$, $f_2'(x)=e^{rx}+rxe^{rx}$ puis $f_2''(x)=re^{rx}+re^{rx}+r^2xe^{rx}=2re^{rx}+r^2xe^{rx}$ puis

$$\begin{aligned}af_2''(x)+bf_2'(x)+cf_2(x)&=a\left(2re^{rx}+r^2xe^{rx}\right)+b\left(e^{rx}+rxe^{rx}\right)+cxe^{rx}\\&=\left(ar^2+br+c\right)xe^{rx}+(2ar+b)e^{rx}\\&=0\times xe^{rx}+0\times e^{rx}\ \left(\text{car } r=-\frac{b}{2a}\right)\\&=0.\end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions f_1 et f_2 sont solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$ et plus généralement, comme dans le premier cas, les fonctions de la forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, sont solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, soient f une solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$ puis $y_0 = f(0)$ et $z_0 = f'(0)$.
Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ puis $g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Pour tout réel x, $g(x) = \lambda_1 e^{rx} + \lambda_2 x e^{rx} = (\lambda_1 + x\lambda_2) e^{rx}$.

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l} g(0) = y_0 \\ g'(0) = z_0 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = y_0 \\ r\lambda_1 + \lambda_2 = z_0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = y_0 \\ \lambda_2 = z_0 - ry_0 \end{array}\right. .\end{aligned}$$

Soit alors g la fonction $x \mapsto y_0 e^{rx} + (z_0 - ry_0) x e^{rx}$. La fonction g est solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$ et de plus, $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$. Par unicité d'une telle solution, on a $g = f$ et donc f est de la forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. On a ainsi montré que $\mathcal{S}_h = \left\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}$ où f_1 est la fonction $x \mapsto e^{rx}$ et f_2 est la fonction $x \mapsto x e^{rx}$.

On peut énoncer :

Théorème 9. Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$ puis (E_h) l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

On note (E_c) : $az^2 + bz + c = 0$, l'équation caractéristique associée.

• Si (E_c) a deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

• Si (E_c) a une solution double r dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{rx}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

2.2.2 Le cas particulier où a, b et c sont réels

On se place maintenant dans le cas particulier où a, b et c sont réels. Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation caractéristique est donc un réel. Trois cas de figure se présentent.

1er cas. On suppose que $b^2 - 4ac > 0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique (E_c) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Les solutions complexes de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. On va déterminer parmi ces solutions celles qui sont réelles.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ puis $f\ :\ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$.

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \overline{f(x)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} = \overline{\lambda} e^{r_1 x} + \overline{\mu} e^{r_2 x} \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \lambda + \mu = \overline{\lambda} + \overline{\mu} & \text{(I)} \\ \lambda e^{r_1} + \mu e^{r_2} = \overline{\lambda} e^{r_1} + \overline{\mu} e^{r_2} & \text{(II)} \end{array}\right. \quad \text{(obtenu pour } x = 0 \text{ et } x = 1) \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(e^{r_2} - e^{r_1}\right) \lambda = \left(e^{r_2} - e^{r_1}\right) \overline{\lambda} \\ \left(e^{r_1} - e^{r_2}\right) \mu = \left(e^{r_1} - e^{r_2}\right) \overline{\mu} \end{array}\right. \quad \left(e^{r_2}(\text{I}) - (\text{II}) \text{ et } e^{r_1}(\text{I}) - (\text{II})\right) \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \overline{\lambda} \\ \mu = \overline{\mu} \end{array}\right. \quad (\text{car } e^{r_1} \neq r_2 \text{ puisque } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont réels et distincts}) \\ &\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Réciproquement, si λ et μ sont réels, alors f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ceci montre que les solutions réelles de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2ème cas. On suppose que $b^2 - 4ac = 0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique (E_c) admet une solution réelle double r. Les solutions complexes de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ puis $f\ :\ x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}$.

$$\begin{aligned}
f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda + \mu x)\, e^{rx} = \left(\overline{\lambda} + \overline{\mu} x\right) e^{rx} \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \overline{\lambda} \\ (\lambda + \mu)\, e^{r} = \left(\overline{\lambda} + \overline{\mu}\right) e^{r} \end{array} \right. \text{(obtenu pour } x = 0 \text{ et } x = 1) \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \overline{\lambda} \\ \mu = \overline{\mu} \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Réciproquement, si λ et μ sont réels, alors f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ceci montre que les solutions réelles de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

3ème cas. On suppose que $b^2 - 4ac < 0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique (E_c) admet deux solutions non réelles conjuguées $r_1 = u + iv$ et $r_2 = u - iv$, $(u, v) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Les solutions complexes de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{(u+iv)x} + \mu e^{(u-iv)x} = e^{ux}\left(\lambda e^{ivx} + \mu e^{-ivx}\right)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ puis $f\ :\ x \mapsto e^{ux}\left(\lambda e^{ivx} + \mu e^{-ivx}\right)$.

$$\begin{aligned}
f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{ux}\left(\lambda e^{ivx} + \mu e^{-ivx}\right) = e^{ux}\left(\overline{\lambda} e^{-ivx} + \overline{\mu} e^{ivx}\right) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda e^{ivx} + \mu e^{-ivx} = \overline{\lambda} e^{-ivx} + \overline{\mu} e^{ivx} \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = \overline{\lambda} + \overline{\mu} \\ i\lambda - i\mu = -i\overline{\lambda} + i\overline{\mu} \end{array} \right. \text{(obtenu pour } x = 0 \text{ et } x = \frac{\pi}{2v}) \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = \overline{\lambda} + \overline{\mu} \\ \lambda - \mu = -\overline{\lambda} + \overline{\mu} \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \mu = \overline{\lambda}((\mathrm{I}) - (\mathrm{II}))/2).
\end{aligned}$$

Réciproquement, si $\mu = \overline{\lambda}$, alors pour tout réel x, $f(x) = e^{ux}\left(\lambda e^{ivx} + \overline{\lambda} e^{-ivx}\right) = e^{ux}\mathrm{Re}\left(\lambda e^{ivx}\right)$. f est donc à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ceci montre que les solutions réelles de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ux}\mathrm{Re}\left(\lambda e^{ivx}\right)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

En posant $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on obtient le fait que les solutions réelles de (E_h) sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ux}(\alpha\cos(vx) - \beta\sin(vx))$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Enfin, β décrit $\mathbb{R}$ si et seulement si $-\beta$ décrit $\mathbb{R}$ et donc les solutions réelles de (E_h) sur $\mathbb{R}$, sont aussi les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ux}(\alpha\cos(vx) + \beta\sin(vx))$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On peut énoncer

Théorème 10. Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$ puis (E_h) l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

On note (E_c) : $az^2 + bz + c = 0$, l'équation caractéristique associée et Δ le discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$.

• Si $\Delta > 0$, (E_c) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Les solutions réelles de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

• Si $\Delta = 0$, (E_c) a une solution double réelle r. Les solutions réelles de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda + \mu x)\, e^{rx}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

• Si $\Delta < 0$, (E_c) a deux solutions non réelles conjuguées $r_1 = u + iv$ et $r_2 = u - iv$ où $(u, v) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Les solutions réelles de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ux}(\lambda\cos(vx) + \mu\sin(vx))$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exemples.

• Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{3x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (l'équation caractéristique associée est $z^2 - 4z + 3 = 0$).

• Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4y'' + 4y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-\frac{x}{2}}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (l'équation caractéristique associée est $4z^2 + 4z + 1 = 0$).

• Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{x}(\lambda\cos x + \mu\sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (l'équation caractéristique associée est $z^2 - 2z + 2 = 0$ et a pour solutions $1 + i$ et $1 - i$).

• Soit ω un réel strictement positif. Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (l'équation caractéristique associée est $z^2 + \omega^2 = 0$ et a pour solutions $i\omega$ et $-i\omega$). ❏

2.3 Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = g(x)$

2.3.1 Le cas général où g est une fonction continue

Théorème 11. Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$ et g une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ puis (E) l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = g \quad (E).$$

La solution générale de l'équation (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) sur I et de la solution générale sur I de l'équation différentielle homogène associée $ay'' + by' + cy = 0 \quad (E_h)$.

Démonstration. Le théorème 8 appliqué avec x_0 réel fixé de I et $y_0 = z_0 = 0$ montre que l'équation (E) admet au moins une solution f_0 sur I. Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow af'' + bf' + cf = g \Leftrightarrow af'' + bf' + cf = af_0'' + bf_0' + cf_0 \\
&\Leftrightarrow a(f - f_0)'' + b(f - f_0)' + c(f - f_0) = 0 \\
&\Leftrightarrow f - f_0 \text{ solution de } (E_h) \text{ sur I} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe } f_1 \text{ solution de } (E_h) \text{ sur I telle que } f - f_0 = f_1 \\
&\Leftrightarrow \text{il existe } f_1 \text{ solution de } (E_h) \text{ sur I telle que } f = f_0 + f_1.
\end{aligned}$$

Une solution quelconque de (E) sur I est donc la somme d'une solution particulière de (E) sur I et d'une solution quelconque de (E_h) sur I. ❏

2.3.2 Quelques exemples avec un second membre particulier

On doit savoir déterminer sans aide une solution particulière de (E) sur I dans quelques cas particuliers concernant le second membre.

2.3.2.1 Second membre du type $Ae^{\lambda x}$, $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$

L'équation différentielle (E) s'écrit donc $ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda x}$. Cherchons une solution particulière de la forme $f : x \mapsto Be^{\lambda x}$, $B \in \mathbb{C}$. Pour tout réel x, on a

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = B\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)e^{\lambda x},$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R},\ af''(x) + bf'(x) + cf(x) = Ae^{\lambda x} \Leftrightarrow B\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) = A.$$

Si $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$ ou encore si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique (E_c), la fonction $x \mapsto \dfrac{A}{a\lambda^2 + b\lambda + c}e^{\lambda x}$ est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

• Si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ ou encore si λ est racine de l'équation caractéristique (E_c), cherchons une solution particulière de (E) de la forme $f : x \mapsto Bxe^{\lambda x}$, $B \in \mathbb{C}$. Pour tout réel x, on a $f'(x) = B(1 + \lambda x)e^{\lambda x}$ puis $f''(x) = B(\lambda + \lambda(1 + \lambda x))e^{\lambda x} = B\left(\lambda^2 x + 2\lambda\right)e^{\lambda x}$ puis

$$\begin{aligned}
af''(x) + bf'(x) + cf(x) &= B\left(a\left(\lambda^2 x + 2\lambda\right) + b(1 + \lambda x) + cx\right)e^{\lambda x} \\
&= B\left(\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)x + (2a\lambda + b)\right)e^{\lambda x} \\
&= B(2a\lambda + b)e^{\lambda x},
\end{aligned}$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R},\ af''(x) + bf'(x) + cf(x) = Ae^{\lambda x} \Leftrightarrow B(2a\lambda + b) = A.$$

Si $2a\lambda + b \neq 0$ ou encore si $\lambda \neq -\dfrac{b}{2a}$ ou encore si λ est racine de (E_c) sans être racine double de (E_c), alors la fonction $x \mapsto \dfrac{A}{2a\lambda + b}xe^{\lambda x}$ est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

• Si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et $2a\lambda + b = 0$ ou encore si λ est racine double de l'équation caractéristique (E_c), cherchons une solution particulière de (E) de la forme $f : x \mapsto Bx^2e^{\lambda x}$, $B \in \mathbb{C}$. Pour tout réel x, on a $f'(x) = B\left(2x + \lambda x^2\right)e^{\lambda x}$ puis $f''(x) = B\left(2 + 2\lambda x + \lambda\left(\lambda x^2 + 2x\right)\right)e^{\lambda x} = B\left(\lambda^2 x^2 + 4\lambda x + 2\right)e^{\lambda x}$ puis

$$\begin{aligned} af''(x)+bf'(x)+cf(x) &= B\left(a\left(\lambda^2x^2+4\lambda x+2\right)+b\left(\lambda x^2+2x\right)+cx^2\right)e^{\lambda x}\\ &= B\left(\left(a\lambda^2+b\lambda+c\right)x^2+2\left(2a\lambda+b\right)x+2a\right)e^{\lambda x}\\ &= 2Bae^{\lambda x}, \end{aligned}$$

puis

$$\forall x\in\mathbb{R},\ af''(x)+bf'(x)+cf(x)=Ae^{\lambda x}\Leftrightarrow 2Ba=A.$$

Dans ce cas, la fonction $x\mapsto \dfrac{A}{2a}x^2e^{\lambda x}$ est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$. On a montré que :

Théorème 12. Soit (E) l'équation différentielle $ay''+by'+cy=Ae^{\lambda x}$ où a, b, c, A et λ sont des nombres complexes, a étant non nul.

- Si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique $az^2+bz+c=0$, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x\mapsto Be^{\lambda x}$ où B est un nombre complexe.
- Si λ est racine de l'équation caractéristique $az^2+bz+c=0$ mais pas racine double, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x\mapsto Bxe^{\lambda x}$ où B est un nombre complexe.
- Si λ est racine double de l'équation caractéristique $az^2+bz+c=0$, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x\mapsto Bx^2e^{\lambda x}$ où B est un nombre complexe.

2.3.2.2 Second membre du type $B\cos(\omega x)$ *ou* $B\sin(\omega x)$, $(B,\omega)\in\mathbb{R}^2$

L'équation différentielle (E) s'écrit donc $ay''+by'+cy=B\cos(\omega x)$ avec $B\in\mathbb{R}$ et $\omega\in\mathbb{R}$.

Si a, b et c sont réels (et $a\neq 0$) et si f est une solution de l'équation $ay''+by'+cy=Be^{i\omega x}$ alors, pour tout réel x,

$$B\cos(\omega x)=\mathrm{Re}\left(Be^{i\omega x}\right)=\mathrm{Re}\left(af''(x)+bf'(x)+cf(x)\right)=a(\mathrm{Re}(f))''(x)+b(\mathrm{Re}(f))'(x)+c(\mathrm{Re}(f))(x),$$

et donc $\mathrm{Re}(f)$ est une solution de l'équation (E). De même, $\mathrm{Im}(f)$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $ay''+by'+cy=B\sin(\omega x)$.

Exemple. Soit (E) l'équation différentielle $y''-3y'+2y=\cos x$. Déterminons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E') : $y''-3y'+2y=e^{ix}$. Le nombre i n'est pas racine de l'équation caractéristique $z^2-3z+2=0$. Donc, il existe une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $f\ :\ x\mapsto Ae^{ix}$, $A\in\mathbb{C}$. Pour tout réel x,

$$f''(x)-3f'(x)+2f(x)=A\left(-1-3i+2\right)e^{ix}=A(1-3i)e^{ix}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)-3f'(x)+2f(x)=e^{ix}&\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ A(1-3i)e^{ix}=e^{ix}\\ &\Leftrightarrow A(1-3i)=1\Leftrightarrow A=\frac{1+3i}{10}.\end{aligned}$$

La fonction $f\ :\ x\mapsto\dfrac{1+3i}{10}e^{ix}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''-3y'+2y=e^{ix}$. La partie réelle de f est alors solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''-3y'+2y=\cos x$. Pour tout réel x,

$$f(x)=\frac{1}{10}(1+3i)(\cos x+i\sin x)=\frac{1}{10}((\cos x-3\sin x)+i(3\cos x+\sin x)),$$

et donc une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{10}(\cos x-3\sin x)$. On en déduit encore que les solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda e^x+\mu e^{2x}+\dfrac{1}{10}(\cos x-3\sin x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. ❑

On peut aussi chercher à priori les solutions de l'équation $ay''+by'+cy=B\cos(\omega x)$ sous la forme $x\mapsto\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ (mais ça ne marche pas si $i\omega$ est racine de l'équation caractéristique).

Exemple. Soit (E) l'équation différentielle $y''+2y'+2y=10\cos(2x)$. Cherchons une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $f\ :\ x\mapsto\alpha\cos(2x)+\beta\sin(2x)$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}f''(x)+2f'(x)+2f(x)&=(-4\alpha\cos(2x)-4\beta\sin(2x))+2(-2\alpha\sin(2x)+2\beta\cos(2x))+2(\alpha\cos(2x)+\beta\sin(2x))\\ &=(-2\alpha+4\beta)\cos(2x)+(-4\alpha-2\beta)\sin(2x).\end{aligned}$$

On choisit alors α et β tels que $\begin{cases} -2\alpha+4\beta=10 \\ -4\alpha-2\beta=0 \end{cases}$ ou encore on prend $\alpha=-1$ et $\beta=2$. La fonction $x \mapsto -\cos x + 2\sin x$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$. ❏

2.3.2.3 Principe de superposition des solutions

Théorème 13. Soient a, b, c trois nombres complexes, a étant non nul. Soient g_1 et g_2 deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f_1 est une solution particulière sur I de l'équation $ay''+by'+cy=g_1$ et f_2 est une solution particulière sur I de l'équation $ay''+by'+cy=g_2$, alors pour tous nombres λ_1 et λ_2, la fonction $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ est une solution particulière de l'équation $ay''+by'+cy=\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2$.

Démonstration . La fonction $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ est deux fois dérivable sur I et

$$\begin{aligned} a\left(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\right)''+b\left(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\right)'+c\left(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\right) &= \lambda_1\left(af_1''+bf_1'+cf_1\right)+\lambda_2\left(af_2''+bf_2'+cf_2\right) \\ &= \lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2. \end{aligned}$$

❏

Exercice 2.

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+2y'+2y=\cos x \operatorname{ch} x \quad (E)$.
2) Trouver la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=f'(0)=0$.

Solution 2.

1) L'équation homogène associée à (E) est (E_h) : $y''+2y'+2y=0$. L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation (E_h) est $z^2+2z+2=0$. (E_c) admet deux racines non réelles conjuguées $z_1=-1+i$ et $z_2=\overline{z_1}=-1-i$. On sait que les solutions réelles de (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))e^{-x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Pour tout réel x, $\cos(x)\operatorname{ch}(x)=\operatorname{Re}\left(e^{ix}\operatorname{ch}(x)\right)=\dfrac{1}{2}\operatorname{Re}\left(e^{(1+i)x}+e^{(-1+i)x}\right)$. Notons (E_1) l'équation $y''+2y'+2y=e^{(1+i)x}$ et (E_2) l'équation $y''+2y'+2y=e^{(-1+i)x}$. Si f_1 est une solution de (E_1) et f_2 est une solution de (E_2) alors $f_0=\dfrac{1}{2}\operatorname{Re}(f_1+f_2)$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ d'après le principe de superposition des solutions.

• (E_1) admet une solution particulière de la forme $f_1 : x\mapsto ae^{(1+i)x}$, $a\in\mathbb{C}$. Pour tout réel x,

$$f_1''(x)+2f_1'(x)+2f_1(x)=a((1+i)^2+2(1+i)+2)e^{(1+i)x}=a(4+4i)e^{(1+i)x}$$

et f_1 est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a=\dfrac{1}{4+4i}=\dfrac{1-i}{8}$. On obtient $f_1(x)=\dfrac{1-i}{8}e^{(1+i)x}$.

• (E_2) admet une solution particulière de la forme $f_2 : x\mapsto axe^{(-1+i)x}$, $a\in\mathbb{C}$. Pour tout réel x, $f_2'(x)=a(1+(-1+i)x)e^{(-1+i)x}$ puis $f_2''(x)=a(-1+i+(-1+i)(1+(-1+i)x))e^{(-1+i)x}=(-2+2i-2ix)$ et donc

$$f_2''(x)+2f_2'(x)+2f_2(x)=a(-2+2i-2ix+2(1+(-1+i)x)+2x)e^{(-1+i)x}=2iae^{(-1+i)x}$$

et f_2 est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a=\dfrac{1}{2i}$ ou encore $a=-\dfrac{i}{2}$. On obtient $f_2(x)=-\dfrac{i}{2}xe^{(-1+i)x}$.

• Une solution particulière f_0 de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc définie pour tout réel x par

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{1-i}{8}e^{(1+i)x}-\frac{i}{2}xe^{(-1+i)x}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{8}(1-i)(\cos(x)+i\sin(x))e^{x}-\frac{i}{2}x(\cos(x)+i\sin(x))e^{-x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}(\cos(x)+\sin(x))e^{x}+\frac{1}{2}x\sin(x)e^{-x}\right) \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\dfrac{1}{16}(\cos(x)+\sin(x))e^{x}+\dfrac{1}{4}x\sin(x)e^{-x}+(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))e^{-x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

2) Soit f une telle fonction. $f(0)=\dfrac{1}{16}+\lambda$ et donc $f(0)=0\Leftrightarrow\lambda=-\dfrac{1}{16}$. λ est ainsi dorénavant fixé.

Pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{1}{16}(-\sin x+\cos x)e^{x}+\dfrac{1}{16}(\cos x+\sin x)e^{x}+\dfrac{1}{4}(\sin x+x\cos x)e^{-x}-\dfrac{1}{4}x\sin xe^{-x}+(-\lambda\sin x+\mu\cos x)e^{-x}-(\lambda\cos x+\mu\sin x)e^{-x}$ puis $f'(0)=\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}+\mu-\lambda=\mu+\dfrac{3}{16}$ et donc $f'(0)=0\Leftrightarrow\mu=-\dfrac{3}{16}$.

La solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{16}(\cos(x) + \sin(x))e^{x} + \dfrac{1}{4}x\sin(x)e^{-x} - \dfrac{1}{16}(\cos(x) + 3\sin(x))e^{-x}$.

