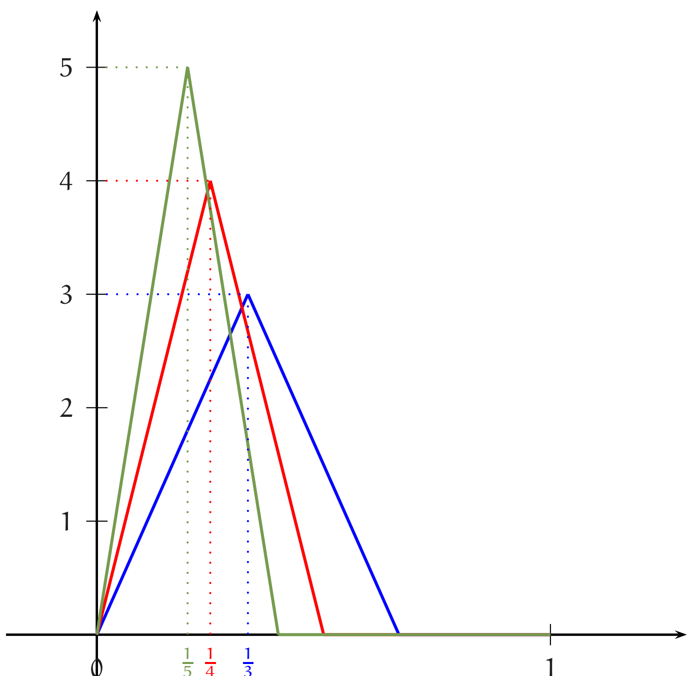
Chapitre 10. Suites ou séries d'intégrales

Plan du chapitre

Nous allons fournir dans ce chapitre un certain nombre de théorèmes dont la conclusion est à chaque fois

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,dx\right) = \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\,dx.$$

Commençons par rappeler que cette égalité n'a rien d'automatique et peut être fausse. Le contre-exemple usuel de cours est le suivant : pour $n \geqslant 2$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \text{ si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ -n^2\left(x - \dfrac{2}{n}\right) \text{ si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right] \\ 0 \text{ si } x \in \left[\dfrac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$.



Pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ est l'aire d'un triangle de base $\dfrac{2}{n}$ et de hauteur n. Donc, pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ et la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Mais, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ car pour tout $n \geqslant 1$, $f_n(0) = 0$ puis $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et si $x_0 \in]0,1]$, pour $n \geqslant \dfrac{2}{x_0}$, $f_n(x_0) = 0$ et de nouveau $f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc, $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\,dx = 0$.

Ainsi, ici, nous sommes dans la situation où

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,dx\right) \neq \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\,dx.$$

1 Suites d'intégrales

Commençons par rappeler un théorème énoncé et démontré dans le chapitre « Suites et séries de fonctions ».

Théorème 1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur un **segment** $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f.

Alors,
- la fonction f est continue sur $[a,b]$;
- la suite numérique $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\ dx\right)=\int_a^b f(x)\ dx$ ou encore, plus explicitement

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\ dx\right)=\int_a^b\left(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\right)dx.$$

Ce théorème s'avère être de portée assez réduite car des exemples simples comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\ dx=0$ ou $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx=0$ échappent à ce théorème :

• Pour $x\in[0,1]$, posons $f_n(x)=x^n$. Pour $x\in[0,1]$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\rightarrow}\left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } x=1\\ 0 \text{ si } x\in[0,1[\end{array}\right.=f(x)$ et puisque la fonction f n'est pas continue sur $[0,1]$ alors que chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}$, l'est, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f mais ne converge pas uniformément vers la fonction f sur ce segment. On ne peut donc pas appliquer le théorème 1. Par contre, la limite de la suite d'intégrales se calcule directement.

$$\int_0^1 x^n\ dx=\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\rightarrow}0.$$

• Pour $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(x)=\sin^n x$. Pour $x\in[0,1]$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\rightarrow}\left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } x=\pi/2\\ 0 \text{ si } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\end{array}\right.=f(x)$. De nouveau, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction f mais ne converge pas uniformément vers la fonction f sur ce segment. On ne peut toujours pas appliquer le théorème 1. Montrer directement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx=0$ est un peu plus délicat :

Soit $a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx&=\int_0^{\pi/2-a}\sin^n x\ dx+\int_{\pi/2-a}^{\pi/2}\sin^n x\ dx\\&\leqslant\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+a\times1\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+a.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$. On choisit $a=\text{Min}\left\{\dfrac{\varepsilon}{2},\dfrac{\pi}{4}\right\}$ de sorte que $\dfrac{\pi}{2}-a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $a\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. On obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $0<\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)<1$. Par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=0$ et donc, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $\dfrac{\pi}{2}\sin^n\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\geqslant n_0$, on a alors $\displaystyle 0\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Ainsi, $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}/\ \forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\left(n\geqslant n_0\Rightarrow 0\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx\leqslant\varepsilon\right)$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx=0$. ❏

Le théorème 1 utilise la convergence **uniforme** sur un **segment**. Si on n'est plus sur un segment (par exemple, pour $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^n}}\,dt$ où l'intervalle d'intégration est $[0,1[$ ou bien, pour $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$ où l'intervalle d'intégration est $[0,+\infty[)$ ou si on n'a plus la convergence uniforme, le théorème 1 ne sert plus à rien. On dispose alors du théorème suivant, appelé « théorème de convergence dominée », et qui est admis dans le cadre du programme officiel de maths spé.

Théorème 2. (théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction f ;
- la fonction f est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\leqslant\varphi$ (hypothèse de domination) ;

Alors,
- chaque fonction f_n est intégrable sur I ;
- la suite numérique $\left(\displaystyle\int_I f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
- la fonction f est intégrable sur I ;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,dx\right)=\int_I f(x)\,dx$ ou encore, plus explicitement

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,dx\right)=\int_I\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx.$$

⇛ **Commentaire**.

◇ *Le théorème précédent est valable sur un intervalle quelconque, intervalle qui a donc le droit d'être un segment ou pas. Dans ce théorème, on doit d'abord noter que l'hypothèse de convergence uniforme a disparu. Une conséquence est que, bien que les fonctions* f_n *soient supposées continues sur l'intervalle* I*, la fonction limite* f *n'a plus aucune raison d'être continue par morceaux sur* I*. On doit donc vérifier que* f *est continue par morceaux sur* I *ce qui suppose la plupart du temps que l'on connaît explicitement la fonction* f.

◇ *L'hypothèse de convergence uniforme est remplacée par une autre hypothèse, l'« hypothèse de domination ». Il s'agit de fournir une fonction* φ *(continue par morceaux et intégrable sur* I*) majorant toutes les fonctions* $|f_n|$*. Ceci signifie que l'on doit majorer chaque* $|f_n(x)|$ *par une expression* ***dépendante de*** x ***et indépendante de*** n *et qui soit une fonction de* x *intégrable sur* I.

Exemple 1. Revenons aux intégrales de WALLIS : $\forall n\in\mathbb{N}$, $W_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n\,dx$. Pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(x)=\sin^n x$.
Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}$, est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction $f\ :\ x\mapsto\begin{cases}0 \text{ si } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ 1 \text{ si } x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ où de plus, la fonction f est continue par morceaux sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Enfin, pour tout entier naturel n et tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(x)|\leqslant 1=\varphi(x)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}W_n=\int_0^{\pi/2}f(x)\,dx=0.$$

Exemple 2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,+\infty[$, posons $f_n(t)=\dfrac{1}{(t^2+1)^n}$ de sorte que $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(t)\,dt$.
Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est continue sur $[0,+\infty[$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $f\ :\ t\mapsto\begin{cases}0 \text{ si } t\in]0,+\infty[\\ 1 \text{ si } t=0\end{cases}$ où de plus, la fonction f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

Enfin, pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$ et tout réel t de $[0,+\infty[$, $|f_n(t)|\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}=\varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ car positive et équivalente à $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0$. ❑

Exercice 1. (un calcul de l'intégrale de Gauss : $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$)

Dans cet exercice, on suppose acquis un résultat classique sur les intégrales de Wallis : si $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, alors

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

1) Justifier l'existence de I.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0,n[\\ 0 \text{ si } x \in [n,+\infty[\end{cases}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$, $f_n(x) \leqslant e^{-x}$.

3) En déduire que $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right) dx$.

4) A l'aide du résultat sur les intégrales de Wallis, en déduire la valeur de I.

Solution 1.

1) La fonction $g : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{x^2}$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$ puis que I existe.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $x \in [0,+\infty[$.

- si $x \in [n,+\infty[$, $f_n(x) = 0 \leqslant e^{-x}$.
- si $x \in [0,n[$, alors $\dfrac{x}{n} \in [0,1[$. On sait que pour $t \in [0,1[$, $\ln(1-t) \leqslant -t$ (inégalité de convexité) et donc $\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right) \leqslant -\dfrac{x}{n}$ puis $n\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right) \leqslant -x$ et enfin, $f_n(x) = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \leqslant e^{-x}$ par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_n(x) \leqslant e^{-x}$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$, posons $g_n(x) = f_n\left(x^2\right) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } x \in \left[0,\sqrt{n}\right[\\ 0 \text{ si } x \in \left[\sqrt{n},+\infty\right[\end{cases}$.

- chaque fonction g_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- soit $x \in [0,+\infty[$. Pour $n > x^2$, $g_n(x) = e^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)}$ et donc

$$g_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(-\frac{x^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-x^2+o(1)}.$$

Donc, la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $g : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $[0,+\infty[$ et de plus, la fonction g est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$, $g_n(x) = f_n\left(x^2\right) \leqslant e^{-x^2} = \varphi(x)$ (d'après la question précédente) où $\varphi = g$ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (d'après 1)).

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$I = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = \sqrt{n}\cos t$, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{\pi/2}^0 \left(1-\cos^2 t\right)^n \left(-\sqrt{n}\sin t\right)\,dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\,dt = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$

Par suite,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \, dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On a montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

De même que l'on a admis le théorème 2, on admet la généralisation suivante de ce théorème :

Théorème 3. (théorème de convergence dominée)

Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$, J intervalle de $\mathbb{R}$ donné, une famille de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit λ_0, réel ou infini, adhérent à J. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que
- pour chaque x de I, $\displaystyle\lim_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(x) = f(x)$;
- la fonction f est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall \lambda \in J$, $|f_\lambda| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination) ;

Alors,
- chaque fonction f_λ est intégrable sur I ;
- la fonction $\lambda \mapsto \displaystyle\int_I f_\lambda(x) \, dx$ converge quand λ tend vers λ_0 ;
- la fonction f est intégrable sur I ;
- $\displaystyle\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\int_I f_\lambda(x) \, dx\right) = \int_I f(x) \, dx$ ou encore, plus explicitement

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\int_I f_\lambda(x) \, dx\right) = \int_I \left(\lim_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(x)\right) dx.$$

2 Séries d'intégrales

On rappelle aussi le théorème d'intégration terme à terme sur un segment qui n'est qu'une traduction du théorème 1 sur les suites de fonctions en terme de séries.

Théorème 4. (théorème d'intégration terme à terme sur un segment)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un **segment** $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f.

Alors,
- la fonction f est continue sur $[a,b]$;
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_a^b f_n(x) \, dx$ converge ;
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x) \, dx\right) = \int_a^b f(x) \, dx$ ou encore, plus explicitement

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x) \, dx\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Exercice 2.

1) Soit $x \in]-1,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos t}\,dt$ en posant $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$ pour $x \in]-1,1[$.

Solution 2.

1) Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|x\cos t| \leqslant |x| < 1$ et en particulier, $1 - x\cos t \neq 0$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1 - x\cos t}$ est donc continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ de sorte que $\cos t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $dt = \dfrac{2du}{1+u^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos t}\,dt &= \int_0^1 \frac{1}{1 - x\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{2}{(1+x)u^2 + (1-x)}\,du \\
&= \frac{2}{1+x}\int_0^1 \frac{1}{u^2 + \left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)^2}\,du = \frac{2}{1+x}\left[\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).
\end{aligned}$$

2) Soit $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(t) = (x\cos t)^n$. Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $|x\cos t| \leqslant |x| < 1$ et donc la série numérique de terme général $f_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(x\cos t)^n = \frac{1}{1 - x\cos t} = f(t)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(t)| = |x|^n|\sin t|^n \leqslant |x|^n$ puis $\|f_n\|_\infty \leqslant |x|^n$ où $|x|^n$ est le terme général d'une série numérique convergente. Donc, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction f.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

- la fonction f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt = W_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge,
- et on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt = \int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos t}\,dt = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).
\end{aligned}$$

Comme pour les suites de fonctions, si on n'est plus sur un segment, la convergence uniforme ne sert plus à rien. On dispose alors des deux théorèmes suivants, très utilisés dans la pratique. Ces théorèmes sont admis dans le cadre du programme officiel de maths spé. Le premier des deux théorèmes se place dans le cadre restrictif des fonctions à valeurs réelles positives.

Théorème 5. (un théorème d'intégration terme à terme)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles **positives**. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que
- chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est intégrable sur I ;
- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers la fonction f ;
- la fonction f est continue par morceaux sur I ;

Alors, dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,dx\right) = \int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)dx.$$

En particulier, l'intégrabilité de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à la convergence de la série numérique de terme général $\int_I f_n(t)\,dt$, $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire à $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,dt < +\infty$.

Exercice 3.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\,dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

(Dans cet exercice, on supposera connu le résultat classique : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = n!$).

Solution 3.

- Pour $x > 0$, posons $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x-1}$. f est continue sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in]0, +\infty[$. Alors $0 < e^{-x} < 1$ et donc

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x(1-e^{-x})} = x^2e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^2e^{-(n+1)x}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, posons $f_n(x) = x^2e^{-(n+1)x}$. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ (car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$) et la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $]0, +\infty[$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $t = (n+1)x$, on obtient

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-(n+1)x}\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{n+1}\right)^2 e^{-t}\,\frac{dt}{n+1}\\ &= \frac{1}{(n+1)^3}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt = \frac{2!}{(n+1)^3} = \frac{2}{(n+1)^3}.\end{aligned}$$

Puisque $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^3} > 0$, la série de terme général I_n converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque pour les fonctions positives, la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\,dx &= \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)dx\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^3}\\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.\end{aligned}$$

Le théorème 5 est une conséquence du théorème 6 plus général, qui est admis :

Théorème 6. (un théorème d'intégration terme à terme)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que
- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers la fonction f ;
- la fonction f est continue par morceaux sur I ;
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I |f_n(x)|\,dx < +\infty$;

Alors,
- la fonction f est intégrable sur I ;
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_I f_n(x)\,dx$ converge ;
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,dx\right)=\int_I f(x)\,dx$ ou encore, plus explicitement

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,dx\right)=\int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)dx.$$

Après le théorème 5, nous avons donné un exemple où l'on pouvait intégrer terme à terme. Nous donnons maintenant un exemple montrant que l'on ne peut pas toujours intégrer terme à terme.

Exercice 4. (CCP 2015 MP Maths1 Exercice 2)

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in I=]0,+\infty[$, on pose $f_n(x)=e^{-nx}-2e^{-2nx}$.

1) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur I et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

b) Que vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)$?

2) a) Montrer que la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, converge simplement sur I vers une fonction f que l'on déterminera.

b) Montrer que f est intégrable sur I.

c) Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)dx$?

3) Donner, sans aucun calcul, la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Solution 4.

1) a) Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées (car $n\geqslant 1$). Donc, chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Ensuite, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx=\left[-\frac{e^{-nx}}{n}+\frac{e^{-2nx}}{n}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{n}\left(\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-nx}+e^{-2nx}\right)-(1-1)\right)=0.$$

b) Donc, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)=0$.

2) a) Soit $x\in]0,+\infty[$. Alors $0<e^{-x}<1$ et $0<e^{-2x}<1$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2nx} \text{ (car les deux séries convergent)}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-2x}\right)^n = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - 2\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}\\
&= \frac{e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)}{\left(1-e^{-x}\right)\left(1+e^{-x}\right)} - 2\frac{e^{-2x}}{\left(1-e^{-x}\right)\left(1+e^{-x}\right)} = \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{\left(1-e^{-x}\right)\left(1+e^{-x}\right)}\\
&= \frac{e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)}{\left(1-e^{-x}\right)\left(1+e^{-x}\right)} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.
\end{aligned}$$

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) f est continue sur $]0, +\infty[$. f est prolongeable par continuité en 0 (en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$) et donc f est intégrable sur un voisinage de 0. Ensuite, d'après un théorème de croissances comparées, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Donc, f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

On a montré que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx = \left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^{+\infty} = -0 + \ln(2) = \ln(2).$

3) Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx\right) < +\infty$, alors d'après le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque, on doit avoir $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx\right) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) dx$ ce qui est faux. Donc,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx\right) = +\infty.$$

Sinon, on dispose aussi du théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions. Dans la pratique, il est peu utilisé (contrairement au cas des suites de fonctions) et c'est les théorèmes 5 et 6 qui sont les outils principaux dans la plupart des cas.

Théorème 7. (théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que
- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers la fonction f ;
- la fonction f est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k\right| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination) ;

Alors,
- chaque fonction f_n est intégrable sur I ;
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_I f_n(x)\, dx$, $n \in \mathbb{N}$, converge ;
- la fonction f est intégrable sur I ;
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\, dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx.$