# Chapitre 10. Calculs de primitives et d'intégrales

Dans ce chapitre, on aborde exclusivement les **calculs** de primitives ou d'intégrales comme le prévoit le programme officiel. La **théorie** de l'intégration est repoussée au deuxième semestre.

## Plan du chapitre

# 1 Primitives et intégrales : rappels et compléments

## 1.1 Primitives

Définition 1. Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une primitive de $f$ sur I est une fonction $F$ dérivable sur I telle que $F' = f$.

Par exemple, les fonctions $F_1 : x \mapsto x^2$ et $F_2 : x \mapsto x^2 + 1$ sont deux primitives de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

On admet pour l'instant le théorème suivant :

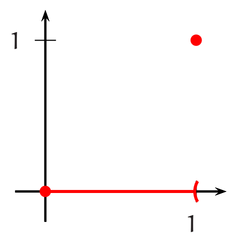
**Théorème 1.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

**1)** Si $f$ est **continue** sur l'**intervalle** I, alors $f$ admet au moins une primitive sur I.

**2)** Si $F$ est **une** primitive de $f$ sur I, **les** primitives de $f$ sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

**3)** Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ (resp. $I \times \mathbb{C}$), il existe une primitive $F$ de $f$ sur I et une seule telle que $F(x_0) = y_0$.

⇨ **Commentaire** . *Il ne faut pas considérer le 1) comme une anecdote. Il existe des fonctions très simples qui n'admettent pas de primitive. Considérons par exemple, la fonction* $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & E(x) \end{array}$ *où* $E(x)$ *désigne la partie entière du réel* $x$.




*Pour tout* $x$ *de* $[0,1]$*, on a* $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$ *. Supposons par l'absurde que la fonction* $f$ *admette une primitive* $F$ *sur* $[0,1]$*.* $F$ *est une fonction dérivable sur* $[0,1]$*, de dérivée nulle sur* $[0,1[$*. Donc,* $F$ *est constante sur* $[0,1[$*. Mais* $F$ *étant dérivable sur* $[0,1]$*,* $F$ *est en particulier continue sur* $[0,1]$*. Puisque* $F$ *est constante sur* $[0,1[$ *et continue sur* $[0,1]$*,* $F$ *est constante sur* $[0,1]$*. Mais alors, puisque* $F$ *est constante sur* $[0,1]$*, sa dérivée* $F'$ *est nulle sur* $[0,1]$ *ou encore* $f$ *est nulle sur* $[0,1]$ *ce qui n'est pas. La fonction* $f$ *n'admet donc pas de primitive sur* $[0,1]$*.*

## 1.2 Formulaires de primitives usuelles

On récupère les formules de dérivées des chapitres antérieurs et on les inverse. On obtient les formulaires de primitives ci-dessous. Le premier concerne les « fonctions puissances ».

| **Fonction** | **Une primitive** | **Intervalle** | **Commentaire** |
|---|---|---|---|
| $x^n$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathbb{R}$ | $n \in \mathbb{N}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln(x)$ | $]0, +\infty[$ | |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln(\lvert x\rvert)$ | $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ | |
| $\dfrac{1}{x^n}$ | $-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ | $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ | $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ | $]0, +\infty[$ | |
| $x^\alpha$ | $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $]0, +\infty[$ | $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |

Le deuxième formulaire concerne les « fonctions exponentielles » et apparentées.

| Fonction | Une primitive | Intervalle | Commentaire |
|---|---|---|---|
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ | |
| $e^{zx}$ | $\dfrac{1}{z}e^{zx}$ | $\mathbb{R}$ | $z \in \mathbb{C}^*$ |
| $a^x$ | $\dfrac{a^x}{\ln a}$ | $\mathbb{R}$ | $a > 0$ et $a \neq 1$ |
| $\text{sh}\, x$ | $\text{ch}\, x$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\text{ch}\, x$ | $\text{sh}\, x$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\dfrac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$ | $\text{th}\, x$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\text{th}\, x$ | $\ln(\text{ch}\, x)$ | $\mathbb{R}$ | |

Le troisième concerne la « trigonométrie circulaire ».

| Fonction | Une primitive | Intervalle | Commentaire |
|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\sin x$ | $-\cos x$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $\tan x$ | $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ | $k \in \mathbb{Z}$ |
| $-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \text{cotan}^2 x$ | $\text{cotan}\, x$ | $]k\pi, (k+1)\pi[$ | $k \in \mathbb{Z}$ |
| $\tan x$ | $-\ln\|\cos x\|$ | $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ | $k \in \mathbb{Z}$ |
| $\dfrac{1}{\sin x}$ | $\ln\left\|\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\|$ | $]k\pi, (k+1)\pi[$ | $k \in \mathbb{Z}$ |
| $\dfrac{1}{\cos x}$ | $\ln\left\|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\|$ | $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ | $k \in \mathbb{Z}$ |

Les deux dernières formules méritent un commentaire. Nous décrirons plus loin différentes manières de les établir. Pour l'instant, le plus simple est de les vérifier :

$$\left(\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)' = \frac{1}{2} \times \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right) / \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = \frac{1}{\sin x}.$$

Cette formule est valable sur tout intervalle sur lequel la fonction sinus ne s'annule pas. Ensuite,

$$\left(\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right)' = \left(\ln\left|\tan\left(\frac{x + (\pi/2)}{2}\right)\right|\right)' = \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Le quatrième formulaire concerne les fonctions trigonométriques réciproques.

| Fonction | Une primitive | Intervalle | Commentaire |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ | $\text{Arcsin}\, x$ | $]-1, 1[$ | |
| $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ | $\text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ | $]-a, a[$ | $a > 0$ |
| $\dfrac{1}{1 + x^2}$ | $\text{Arctan}\, x$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$ | $\dfrac{1}{a}\text{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ | $\mathbb{R}$ | $a \neq 0$ |
| $\dfrac{1}{(x + \alpha)^2 + \beta^2}$ | $\dfrac{1}{\beta}\text{Arctan}\left(\dfrac{x + \alpha}{\beta}\right)$ | $\mathbb{R}$ | $\beta \neq 0$ |

Vérifions les deuxième et quatrième formules. Si $a > 0$,

$$\left(\text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

De même, si $a \neq 0$,

$$\left(\frac{1}{a}\,\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a}\frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{\dfrac{1}{a^2}\left(a^2 + x^2\right)} = \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

La dernière formule s'en déduit par translation. Cette formule sera utilisée dans les calculs de primitives de certaines fractions rationnelles.

Nous allons ajouter encore deux formules de primitives à toutes celles qui viennent d'être données.

- Une primitive sur $I = ]-\infty, -1[$ ou $I = ]-1, 1[$ ou $I = ]1, +\infty[$ de la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1 - x^2}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1 - x}{1 + x}\right|$ (alors qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \text{Arctan}\, x$).
En effet, pour tout $x$ de I,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - x^2} &= \frac{1}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1}{2}\frac{1 - x + 1 + x}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - x}{(1 - x)(1 + x)} + \frac{1 + x}{(1 - x)(1 + x)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + x} - \frac{-1}{1 - x}\right)\end{aligned}$$

et donc une primitive de $f$ sur I est la fonction $F\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln|1 + x| - \ln|1 - x|) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1 - x}{1 + x}\right|$ (on rappelle que $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$).

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ est la fonction $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ (alors qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ sur $]-1, 1[$ est la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}\, x$). En effet, pour tout $x$ de I,

$$\begin{aligned}F'(x) &= \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.\end{aligned}$$

Sinon, il y a des formules plus générales : si $F$ et $G$ sont des primitives de $f$ et $g$ sur I (intervalle donné de $\mathbb{R}$), alors une primitive de $f + g$ sur I est $F + G$ et une primitive de $\lambda f$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) sur I est $\lambda F$. D'autre part, si $f$ est dérivable sur I et $g$ est dérivable sur $f(I)$, une primitive de $f' \times (g' \circ f)$ sur I est $g \circ f$. Cette dernière formule fournit le formulaire non exhaustif suivant :

| **Fonction** | **Primitive** | **Commentaire** |
|---|---|---|
| $f'f^\alpha$ | $\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$ | $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |
| $\dfrac{f'}{f}$ | $\ln|f|$ | |
| $\dfrac{f'}{f^n}$ | $-\dfrac{1}{(n - 1)f^{n-1}}$ | $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ |
| $\dfrac{f'}{\sqrt{f}}$ | $2\sqrt{f}$ | |
| $f'e^f$ | $e^f$ | |
| $f' \sin f$ | $-\cos f$ | |
| $f' \cos f$ | $\sin f$ | |
| $f' \text{sh}\, f$ | $\text{ch}\, f$ | |
| $f' \text{ch}\, f$ | $\text{sh}\, f$ | |

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{f'}{\cos^2 f} = f'\left(1+\tan^2 f\right)$ | $\tan f$ | |
| $\dfrac{f'}{\text{ch}^2 f} = f'\left(1-\text{th}^2 f\right)$ | $\text{th}\, f$ | |
| $\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$ | $\text{Arcsin}\, f$ | |
| $\dfrac{f'}{1+f^2}$ | $\text{Arctan}\, f$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

La deuxième formule (une primitive de $\dfrac{f'}{f}$ sur I est $\ln|f|$) mérite un commentaire. Si I est un intervalle sur lequel f est strictement positive,

$$(\ln\circ|f|)' = (\ln\circ f)' = \frac{f'}{f},$$

et si I est un intervalle sur lequel f est strictement négative, alors

$$(\ln\circ|f|)' = (\ln\circ(-f))' = \frac{-f'}{-f} = \frac{f'}{f}.$$

Donc, si I est un intervalle sur lequel f est de signe contant et ne s'annule pas, une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ est la fonction $x \mapsto \ln(|f(x)|)$.

**Exercice 1.** Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré (on admettra que les fonctions considérées sont définies et continues sur I).

**1)** $f_1\ :\ x \mapsto \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^3}$, $I = \mathbb{R}$.

**2)** $f_2\ :\ x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.

**3)** $f_3\ :\ x \mapsto \dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x-\sin x}$, $I = ]0,+\infty[$.

**4)** $f_4\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+2}$, $I = \mathbb{R}$.

**5)** $f_5\ :\ x \mapsto (x+1)\sqrt{x^2+2x+5}$, $I = \mathbb{R}$.

**6)** $f_6\ :\ x \mapsto (1+\ln x)x^x$, $I = ]0,+\infty[$.

**7)** $f_7\ :\ x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$, $I = \mathbb{R}$.

**8)** $f_8\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$, $I = ]0,2[$.

**9)** $f_9\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $I = ]-\infty,0[$.

**Solution 1.**

**1)** Pour tout réel $x$, $f_1(x) = \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^3} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^3}$ (avec $\left(x^2+1\right)' = 2x$). Donc, une primitive de la fonction $f_1$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F_1\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\times -\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)^2} = -\dfrac{1}{4\left(x^2+1\right)^2}$.

**2)** Pour tout réel $x$, $f_2(x) = \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+1}$ (avec $\left(x^2+1\right)' = 2x$). Donc, une primitive de la fonction $f_2$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F_2\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$.

**3)** Pour tout réel $x>0$, $f_3(x) = \dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x-\sin x} = \dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}$ (avec $(x-\sin x)' = 1-\cos x$). Donc, une primitive de la fonction $f_3$ sur $]0,+\infty[$ est la fonction $F_3\ :\ x \mapsto \ln(x-\sin x)$ (car pour tout $x>0$, $x-\sin x>0$).

**4)** Pour tout réel $x$, $f_4(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2} = \dfrac{1}{(x+1)^2+1}$ (avec $(x+1)' = 1$). Donc, une primitive de la fonction $f_4$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F_4\ :\ x \mapsto \text{Arctan}(x+1)$.

**5)** Pour tout réel $x$, $f_5(x) = (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} = \dfrac{1}{2}(2x+2)\left(x^2+2x+5\right)^{\frac{1}{2}}$ (avec $\left(x^2+2x+5\right)' = 2x+2$). Donc, une primitive de la fonction $f_5$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F_5\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(x^2+2x+5\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}\left(x^2+2x+5\right)\sqrt{x^2+2x+5}$.

**6)** Pour tout réel $x > 0$, $f_6(x) = (1+\ln x)x^x = (1+\ln x)e^{x\ln x}$ (avec $(x\ln x)' = 1+\ln x$). Donc, une primitive de la fonction $f_6$ sur $]0,+\infty[$ est la fonction $F_6\ :\ x \mapsto e^{x\ln x} = x^x$.

**7)** Pour tout réel $x$, $f_7(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}} = \dfrac{e^x}{1+(e^x)^2}$ avec $(e^x)' = e^x$. Donc, une primitive de la fonction $f_7$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F_7\ :\ x \mapsto \text{Arctan}\,(e^x)$.

**8)** Pour tout réel $x \in ]0,2[$, $f_8(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$ (avec $(x-1)' = 1$). Donc, une primitive de la fonction $f_8$ sur $]0,2[$ est la fonction $F_8\ :\ x \mapsto \text{Arcsin}(x-1)$.

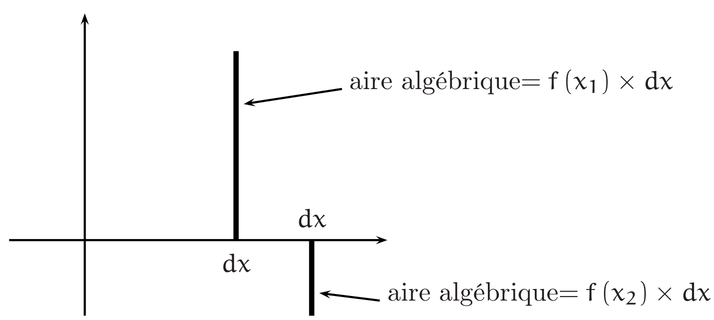
**8)** Une primitive de la fonction $f_9\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty,0[$ est la fonction $F_9\ :\ x \mapsto \ln|x| = \ln(-x)$.

---

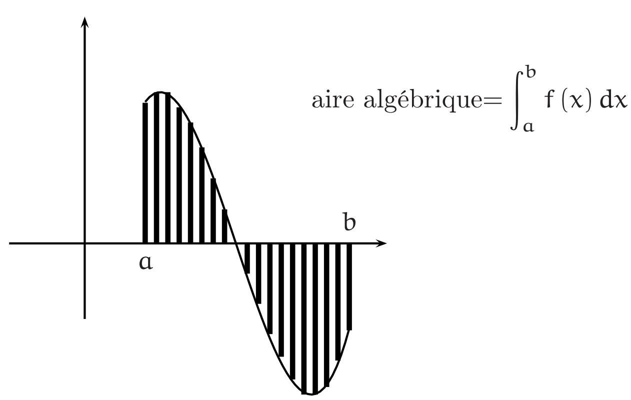
## 1.3 Intégrales

Nous redisons que l'étude de la théorie de l'intégration est repoussée au deuxième semestre. En particulier, la définition correcte de l'intégrale attendra. Aujourd'hui, nous nous contenterons d'une définition « intuitive ».

On se donne $f$ une fonction définie sur un **segment** $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $f$ est continue sur $[a,b]$. Pour $x \in [a,b]$, « l'aire algébrique infinitésimale du trait » de mesure algébrique $f(x)$ (c'est-à-dire de longueur $|f(x)|$ et affecté du signe de $f(x)$) et d'épaisseur infinitésimale $dx$ (pour « différence infinitésimale de valeurs $x$ ») est $f(x) \times dx$.




L'**intégrale** de $a$ à $b$ de $f$, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ($\int$ est la lettre S, initiale du mot somme), est la somme de ces aires algébriques quand $x$ varie de $a$ à $b$.




Ensuite, si $f$ est une fonction continue sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on adopte la définition suivante :

DÉFINITION 2. Soit $f$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,dx.$$

Une première conséquence de la « définition » de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \int_a^b \lambda\,dx = \lambda(b-a).}$$

On démontrera au deuxième semestre :

**Théorème 2.** Soit $f$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

où $F$ est une primitive quelconque de $f$ sur $[a, b]$.

⇨ **Commentaire**.

◇ *Le résultat ne dépend pas du choix d'une primitive puisque si $G$ est une autre primitive de $f$ sur $[a, b]$, il existe une constante $C$ telle que pour tout $x$ de $[a, b]$, $G(x) = F(x) + C$. On a alors*

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

◇ *La plupart des calculs d'intégrale se font en deux étapes : calculer une primitive $F$ puis calculer $F(b) - F(a)$. Pour cette raison, on introduit la notation*

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Les propriétés usuelles de l'intégrale qui seront établies au second semestre sont les suivantes :

- **Linéarité.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\lambda$ et $\mu$ deux nombres réels ou même complexes. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx + \mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

On note à ce sujet que l'on a donc aussi la « linéarité du crochet » : $[\lambda F(x) + \mu G(x)]_a^b = \lambda\,[F(x)]_a^b + \mu\,[G(x)]_a^b$.

- **Positivité, croissance.** Si $f$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et positive sur $[a, b]$ (ou encore à valeurs dans $\mathbb{R}^+$), alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x$ de $[a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ (ou encore telles que $f \leqslant g$), alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

- **Relation de Chasles.** Pour tout réel $c$ de $]a, b[$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

- Pour toute fonction $f$ continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

## 1.4 Intégrale fonction de la borne supérieure

On se donne $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On généralise conventionnellement la relation de Chasles : pour $a \in I$, $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et pour $(a, b) \in I^2$ tel que $b < a$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. On obtient alors une relation de Chasles plus générale :

$$\forall (a, b, c) \in I^3,\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Si maintenant $a$ est un réel fixé de $I$ et $x$ un réel variable de $I$, on a $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$ ou encore

$$\forall x \in I,\ F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt.$$

On obtient alors :

**Théorème 3.** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

• Pour tout $a$ de I, la fonction $F\ :\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de la fonction $f$ sur I.

• pour tout $x_0$ de I et tout $y_0$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe une primitive $F$ et une seule de $f$ sur I telle que $F(x_0) = y_0$ à savoir :

$$\forall x \in I,\ F(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

(expression de la primitive de $f$ sur I qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$). En particulier, pour tout $x_0$ de I, **la** primitive de la fonction $f$ sur I qui s'annule en $x_0$ est la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\,dt$.

Par exemple, pour tout réel $x$, $\text{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

⇨ **Commentaire** .

◇ *La notation* $\int_a^x f(x)\,dx$ *ne veut rien dire : comment* $x$ *pourrait-il varier de* $a$ *à* $x$ *(comment* $2$ *pourrait-il varier de* $1$ *à* $2$*) ? On a besoin de deux lettres différentes. Un réel* $x$ *de* I *est donné dans* I *puis un réel* $t$ *varie de* $a$ *à* $x$ *(ou de* $x$ *à* $a$*).*

◇ *Dans la notation* $\int_a^x f(t)\,dt$*, la variable* $t$ *est muette.* $\int_a^x f(t)\,dt$ *est une fonction de* $x$ *mais pas de* $t$*. Pour cette raison, une phrase du genre* $\forall t \ldots \int_a^x f(t)\,dt = \ldots$ *ne veut rien dire.*

◇ *Les primitives de* $f$ *sur* I *sont les fonctions de la forme* $x \mapsto \lambda + \int_a^x f(t)\,dt$ *où* $\lambda$ *et* $a$ *sont quelconques. On décide alors de noter* $\int f(t)\,dt$ *l'**ensemble des primitives** de* $f$ *sur* I*. Cette notation permet d'écrire de manière abrégée par exemple* $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$*,* $C \in \mathbb{R}$*.*

**Exercice 2.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $F$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

**1)** Vérifier que $F$ est définie sur $\mathbb{R}$.

**2)** Vérifier que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée. En déduire les variations de $F$ sur $\mathbb{R}$.

**3)** Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse $0$.

**4)** En considérant la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto F(x) + F(-x)$, montrer que la fonction $F$ est impaire.

**5) a)** Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $F(x) < 2$.
**b)** En déduire que $F$ a une limite réelle en $+\infty$.

**6)** Donner l'allure du graphe de la fonction $F$.

**Solution 2.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ de sorte que pour tout réel $x$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

**1)** Pour tout réel $x$, $x^4 + 1 > 0$. Donc, la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $F$ est définie sur $\mathbb{R}$.

**2)** Puisque $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

la fonction $F'$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**3)** Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse $0$ est $y = F(0)+F'(0)(x-0)$ avec $F(0) = 0$ et $F'(0) = \frac{1}{\sqrt{1+0^4}} = 1$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse $0$ est $y = x$.

**4)** La fonction $f$ est paire. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\varphi(x) = F(x) + F(-x)$. La fonction $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$,

$$\varphi'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = 0.$$

La fonction $\varphi$ est donc constante sur $\mathbb{R}$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) = F(0) + F(0) = 0$. On en déduit que pour tout réel $x$, $F(-x) = -F(x)$ et donc que la fonction $F$ est impaire.

**5) a)** Soit $x \geqslant 1$. Pour tout $t \in [1, x]$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{0+t^4}} = \dfrac{1}{t^2}$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que

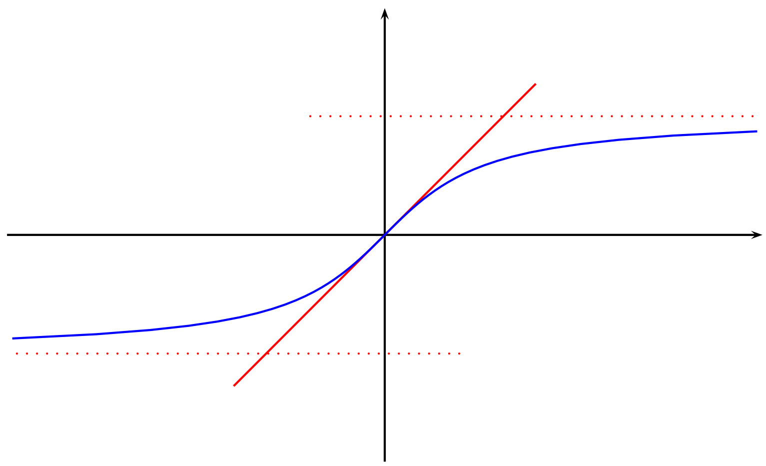
$$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt \leqslant \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} < 1.$$

D'autre part, pour tout tout $t \in [0, 1]$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$. En intégrant, on obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt \leqslant \int_0^1 1\,dt = 1$.

Finalement, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt < 1 + 1 = 2$. On a montré que pour tout $x > 0$, $F(x) < 2$.

**b)** La fonction $F$ est croissante sur $[1, +\infty[$ et est majorée par 2 sur $[1, +\infty[$. On en déduit que la fonction $F$ a une limite réelle en $+\infty$.

**6) Allure du graphe de la fonction $F$.**



---

⇨ **Commentaire** . *La fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et à ce tire, admet des primitives sur* $\mathbb{R}$. *La primitive de* $f$ *sur* $\mathbb{R}$ *qui s'annule en* $0$ *est la fonction* $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$. *On n'a pas d'écriture plus simple de* $F$ *car* $F$ ***ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles***. *Ne cherchez pas de fonction obtenue en combinant des polynômes, des racines carrées, des exponentielles, des cosinus, des arcsinus . . . , vous n'en trouverez pas.*

*C'est aussi le cas de la fonction* $f : x \mapsto e^{(x^2)}$. *La primitive de* $f$ *sur* $\mathbb{R}$ *qui s'annule en* $0$ *est la fonction* $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{(t^2)}\,dt$. *Les primitives de* $f$ *sur* $\mathbb{R}$ *ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles à la différence des primitives de la fonction* $x \mapsto 2xe^{(x^2)}$ *qui sont les fonctions de la forme* $x \mapsto e^{(x^2)} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

## 2 La formule d'intégration par parties

Nous allons maintenant donner une formule qui permet de transformer le problème du calcul d'une intégrale en le problème du calcul d'une autre intégrale, plus simple.

Dans ce paragraphe, nous aurons souvent besoin de fonctions dérivables dont la dérivée est continue. La définition suivante permet d'alléger le vocabulaire.

Définition 3. Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que $f$ est **de classe $C^1$ sur** $I$ si et seulement si $f$ est dérivable sur $I$ et sa dérivée $f'$ est continue sur $I$.

⇨ **Commentaire** . *Nous définirons plus tard la notion de fonctions de classe* $C^k$, $k \in \mathbb{N}$. *Les fonctions de classe* $C^0$ *seront les fonctions continues, les fonctions de classe* $C^1$ *sont les fonctions dérivables dont la dérivée est continue, les fonctions de classe* $C^2$ *seront les fonctions deux fois dérivables dont la dérivée seconde est continue . . .*

On donne maintenant la formule d'intégration par parties :

**Théorème 4.** Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$. Soient $u$ et $v$ deux fonctions définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de classe $C^1$ sur $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.$$

**Démonstration .** Par hypothèse, les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $[a, b]$. Il en est de même de la fonction $uv$ :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Par hypothèse, les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[a, b]$. Donc, les fonctions $u'v$ et $uv'$ sont continues sur le segment $[a, b]$. On intègre les deux membres sur le segment $[a, b]$ et on obtient par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx + \int_a^b u(x)v'(x)\ dx = \int_a^b (uv)'(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b,$$

d'où le résultat.

❏

**Exemple 1.** Calculons $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x\ dx$. Pour cela, pour $x \in [0, 1]$, posons

$$u(x) = e^x \qquad v(x) = x$$

$$u'(x) = e^x \qquad v'(x) = 1$$

Les deux fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\ dx &= \int_0^1 u'(x)v(x)\ dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\ dx \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x\ dx = e - \int_0^1 e^x\ dx \\ &= e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\int_0^1 xe^x\ dx = 1$. Pendant le calcul, on a remplacé le problème du calcul de l'intégrale sur $[0, 1]$ de la fonction $x \mapsto xe^x$ (dont on ne devinait pas une primitive) par le problème du calcul de l'intégrale sur $[0, 1]$ de la fonction $x \mapsto e^x$ qui s'achève aisément. L'intégration par parties a eu pour effet de faire disparaître le facteur $x$ en le dérivant.

❏

**Exemple 2.** En probabilités, l'espérance de la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ($\lambda > 0$) est $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_0^X x \times \lambda e^{-\lambda x}\ dx$.

Soit $X > 0$. Calculons $I = \displaystyle\int_0^X x \times \lambda e^{-\lambda x}\ dx$. Pour cela, pour $x \in [0, X]$, posons

$$u(x) = -e^{-\lambda x} \qquad v(x) = x$$

$$u'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad v'(x) = 1$$

Les deux fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0, X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_0^X x \times \lambda e^{-\lambda x}\ dx &= \left[x\left(-e^{-\lambda x}\right)\right]_0^X - \int_0^X 1 \times \left(-e^{-\lambda x}\right)\ dx = -Xe^{-\lambda X} + \int_0^1 e^{-\lambda x}\ dx \\ &= -Xe^{-\lambda X} + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^X = -Xe^{-\lambda X} - \frac{e^{-\lambda X}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} - Xe^{-\lambda X} - \frac{e^{-\lambda X}}{\lambda}.\end{aligned}$$

Ensuite, $\lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{e^{-\lambda X}}{\lambda} = 0$ (car $\lambda > 0$) et d'autre part, $\lim\limits_{X\to+\infty} -Xe^{-\lambda X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda}(-\lambda X)e^{-\lambda X} = \lim\limits_{Y\to-\infty} \dfrac{1}{\lambda}Ye^{Y} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

Par suite, l'espérance de la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ est $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\lambda} - Xe^{-\lambda X} - \dfrac{e^{-\lambda X}}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{\lambda}$.

❑

La formule d'integration par parties donnée dans le théorème 4 est bien sûr valable dans le cas où $a > b$ (avec $u$ et $v$ de classe $C^1$ sur $[b, a]$) car on peut toujours intégrer de $a$ à $b$ l'égalité $(uv)' = u'v + uv'$. Cette formule est donc aussi valable pour $\displaystyle\int_a^x u'(t)v(t)\ dt$ où $a$ est un réel fixé d'un intervalle I, $x$ un réel variable de I et $u$ et $v$ deux fonctions de classe $C^1$ sur I. On a obtenu

**Théorème 4 bis.** Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $C^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\int u'v = uv - \int uv'.$$

**Exemple.** Calculons les primitives de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$. Les deux fonctions $u\ :\ x \mapsto x$ et $v\ :\ x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int \ln x\ dx &= x\ln x - \int x \times \frac{1}{x}\ dx = x\ln x - \int 1\ dx\\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$ est la fonction $x \mapsto x\ln x - x$. On doit mémoriser cette formule.

# 3 Changements de variable

## 3.1 La formule de changement de variable

On va apprendre à changer de variable dans une intégrale. La mentalité générale est la même que pour une intégration par parties : transformer le problème du calcul d'une intégrale en le problème du calcul d'une autre intégrale plus simple.

**Théorème 5.** Soit $\varphi$ une application de classe $C^1$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ($\varphi$ « est » le changement de variables). Soit $f$ une fonction continue sur $\varphi(I)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt.$$

⇨ **Commentaire**. *On a posé* $x = \varphi(t)$. *L'élément différentiel* $dx$ *a été transformé en :*

$$dx = \varphi'(t)\ dt.$$

**Démonstration.** Soit $(a, b) \in I^2$. Pour $X \in I$, posons $F(X) = \displaystyle\int_a^X f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$ et $G(X) = \displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(X)} f(x)\ dx$.

• La fonction $\varphi$ est continue sur I et la fonction $f$ est continue sur $\varphi(I)$. Donc, la fonction $f \circ \varphi$ est continue sur I. D'autre part, la fonction $\varphi$ est de classe $C^1$ sur I et en particulier, la fonction $\varphi'$ est définie et continue sur I. Finalement, la fonction $f \circ \varphi \times \varphi'$ est continue sur I.
On en déduit que la fonction $F$ est dérivable sur I et que, pour tout X de I, $F'(X) = f(\varphi(X)) \times \varphi'(X)$.

• La fonction $\varphi$ est dérivable sur I à valeurs dans $\varphi(I)$ et la fonction $H\ :\ Y \mapsto \displaystyle\int_{\varphi(a)}^{Y} f(x)\ dx$ est dérivable sur $\varphi(I)$, puisque la fonction $f$ est continue sur $\varphi(I)$. On en déduit que la fonction $G = H \circ \varphi$ est dérivable sur I et que, pour tout X de I,

$$G'(X) = \varphi'(X) \times H'(\varphi(X)) = f(\varphi(X)) \times \varphi'(X).$$

Ainsi, pour tout X de I, $F'(X) = G'(X)$. Donc, la fonction $F - G$ a une dérivée nulle sur l'intervalle I puis la fonction $F - G$ est constante sur I. Par suite, pour tout X de I,

$$F(X) - G(X) = F(a) - G(a) = 0 - 0 = 0,$$

puis, pour tout X de I, $F(X) = G(X)$. En particulier, $F(b) = G(b)$ ce qui fournit

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt.$$

❏

Voici comment se passe un changement de variables dans la pratique :

**Exemple 1.** On sait que pour tout réel X, $\text{Arctan}(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{1}{x^2+1}\ dx$.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour tout réel X, calculons $\displaystyle\int_0^X \frac{1}{x^2+a^2}\ dx = \frac{1}{a^2}\int_0^X \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\ dx$ .

Soit $X \in \mathbb{R}$. Posons $t = \dfrac{x}{a}$ de sorte que $x = at$ et donc $dx = a\ dt$. Quand $x$ varie de $0$ à X, $t$ varie de $0$ à $\dfrac{X}{a}$. La formule de changement de variables fournit

$$\int_0^X \frac{1}{x^2+a^2}\ dx = \frac{1}{a^2}\int_0^X \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\ dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{X/a} \frac{1}{t^2+1}\ a dt = \frac{1}{a}\text{Arctan}\left(\frac{X}{a}\right).$$

On a ainsi établi l'une des formules donnée dans le paragraphe 1.2 grâce à un changement de variables. ❏

On peut aussi utiliser un changement de variables pour calculer des primitives :

**Exemple 2.** Déterminons les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\operatorname{ch} x}$.

On pose $t = e^x$ de sorte que $x = \ln t$ puis $dx = \dfrac{dt}{t}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\operatorname{ch} x}\ dx &= \int \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)}\ dx \\
&= \int \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\ \frac{dt}{t} = \int \frac{2}{t^2+2t+1}\ dt = \int \frac{2}{(t+1)^2}\ dt \\
&= -\frac{2}{1+t}+C \\
&= -\frac{2}{1+e^x}+C.
\end{aligned}$$

Les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\operatorname{ch} x}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\dfrac{2}{1+e^x}+C$, $C \in \mathbb{R}$. ❏

⇨ **Commentaire**. *Dans les deux exemples précédents, nous avons effectué un changement de variables qui nous a permis de conclure mais qui était donné. La section 4 de ce chapitre décrira un certain nombre de situations usuelles à connaître avec un changement de variables adapté à chaque situation.*

## 3.2 Quelques applications

**Théorème 6.** Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à $0$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f est paire, alors $\forall a \in I$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$.

Si f est impaire, alors $\forall a \in I$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$.

**Démonstration.** Soit $a \in I$. En posant $x = -t$, on obtient

$$\int_{-a}^{0} f(x)\ dx = \int_a^0 f(-t)\times(-dt) = \int_0^a f(-t)\ dt,$$

et, puisque la variable d'intégration est muette, une fois le changement de variable effectué, on peut écrire $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\ dx = \int_0^a f(-x)\ dx$.

• Si f est paire, on a

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(-x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx.$$

• Si f est impaire, on a

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(-x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = -\int_{0}^{a} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = 0.$$

❑

Par exemple, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx = 0$ et pour tout réel X, $\displaystyle\int_{-X}^{X} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = 2\int_{0}^{X} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$.

**Théorème 7.** Soit f une fonction continue $\mathbb{R}$, périodique de période $T \neq 0$.

Pour tout réel $a$, $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\ dx = \int_{0}^{T} f(x)\ dx$.

**Démonstration .**

**1ère démonstration.** Soit F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (F existe puisque f est continue sur $\mathbb{R}$). Pour $a \in \mathbb{R}$, posons $G(a) = \displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\ dx = F(a+T) - F(a)$. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $a$,

$$G'(a) = F'(a+T) - F'(a) = f(a+T) - f(a) = 0.$$

Donc, la fonction G est constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel $a$, $G(a) = G(0)$ ou encore

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\ dx = \int_{0}^{T} f(x)\ dx.$$

**2ème démonstration.** Pour tout réel $a$,

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\ dx = \int_{a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{T} f(x)\ dx + \int_{T}^{a+T} f(x)\ dx.$$

Dans la dernière intégrale, on pose $x = t + T$ de sorte que $t = x - T$ puis $dx = dt$. Puisque f est T-périodique, on obtient

$$\int_{T}^{a+T} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(t+T)\ dt = \int_{0}^{a} f(t)\ dt$$

et finalement, puisque la variable d'intégration est muette,

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\ dx = -\int_{0}^{a} f(x)\ dx + \int_{0}^{T} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{T} f(x)\ dx.$$

❑

Le théorème signifie que quand on intègre une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur une période, on peut choisir cet intervalle. Par exemple,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin x\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\ dx = 0.$$

# 4 Quelques situations usuelles

## 4.1 Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$

On se donne trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $a \neq 0$. On cherche les primitives de la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$. Le trinôme $x \mapsto ax^2+bx+c$ s'annule en au plus deux réels distincts. Si I est un intervalle sur lequel ce trinôme ne s'annule pas, la fonction f est continue sur I et admet donc des primitives sur I.

**1er cas.** On suppose que le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement négatif. Pour tout réel $x$, on a

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]} = \frac{1}{a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]}.$$

La fonction f est donc du type $x \mapsto \dfrac{\lambda}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$ avec $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Les primitives de f sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{\beta} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+\alpha}{\beta}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

**2ème cas.** On suppose que le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul. Dans ce cas, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$,

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2}.$$

Sur $I = \left]-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right[$ ou $I = \left]-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right[$, les primitives de f sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\dfrac{1}{a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

**3ème cas.** On suppose que le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif. Le trinôme $x \mapsto ax^2+bx+c$ admet deux racines réelles distinctes $x_1$ et $x_2$. Pour tout réel $x$ distinct de $x_1$ et $x_2$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{ax^2+bx+c} &= \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1-x_2} \times \frac{(x-x_2)-(x-x_1)}{a(x-x_1)(x-x_2)} \\ &= \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right).\end{aligned}$$

Sur tout intervalle ne contenant pas $x_1$ et $x_2$, les primitives de f sont les fonctions de la forme
$x \mapsto \dfrac{1}{a(x_1-x_2)}(\ln|x-x_1| - \ln|x-x_2|) + C = \dfrac{1}{a(x_1-x_2)} \ln\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

**Exercice 3.** Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré :

**1)** $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$, $I = \mathbb{R}$.

**2)** $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{4x^2+4x+1}$, $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

**3)** $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-7x+10}$, $]2, 5[$.

**Solution 3.**

**1)** Pour tout réel $x$, $x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0$. Donc $f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de plus,

$$\int f_1(x)\, dx = \int \frac{dx}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

**2)** Pour tout réel $x$ de $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, $f_2(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{(2x+1)^2}$. Donc,

$$\int f_2(x)\, dx = -\frac{1}{2(2x+1)} + C.$$

**2)** Pour tout réel $x$ de $]2, 5[$,

$$f_3(x) = \frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{1}{3} \times \frac{(x-2)-(x-5)}{(x-2)(x-5)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2}\right)$$

et donc,

$$\int f_3(x)\, dx = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right| + C.$$

On peut généraliser le travail précédent à des fonctions du type $x \mapsto \dfrac{\lambda x+\mu}{ax^2+bx+x}$, $a \neq 0$. Au début du calcul, on commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur et on utilise $\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + C$ puis on termine de la même façon.

Par exemple, on veut les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$. Pour tout réel $x$, on écrit :

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

## 4.2 Primitives de fonctions transcendantes dont la dérivée est algébrique (ln, Arcsin, Arctan, ...)

Une intégration par parties où on dérive la fonction transcendante est souvent la solution au problème.

**Exemple 1.** $\displaystyle\int \ln x \, dx = \int 1 \times \ln x \, dx = x\ln x - \int x \times \frac{1}{x}\, dx = x\ln x - \int 1 \, dx = x\ln x - x + C.$

**Exemple 2.** $\displaystyle\int \operatorname{Arctan} x \, dx = x \operatorname{Arctan} x - \int x \times \frac{1}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$

**Exemple 3.** $\displaystyle\int \operatorname{Arcsin} x \, dx = x \operatorname{Arcsin} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C.$

**Exemple 4.**

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{Arctan} x \, dx &= \frac{x^2}{2}\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{Arctan} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C = \frac{1}{2}\left(\left(x^2+1\right)\operatorname{Arctan} x - x\right) + C.\end{aligned}$$

## 4.3 Produit d'une exponentielle et d'un polynôme

On veut intégrer une fonction du type $x \mapsto e^{\alpha x}P(x)$ où $\alpha$ est un nombre complexe non nul et $P$ est un polynôme non nul de degré $n$. On effectue $n$ intégrations par parties où à chaque fois, on dérive le polynôme. Au bout de ces $n$ intégrations par parties, le polynôme « a disparu » et seule persiste l'exponentielle.

**Exemple 1.** On veut calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx$. Les deux fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^x$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_0^1 xe^x \, dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

**Exemple 2.** On veut calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x/2} \, dx$. Une double intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^{-x/2}\, dx &= \left[x^2\left(-2e^{-x/2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 2x\left(-2e^{-x/2}\right)\, dx = -2e^{-1/2} + 4\int_0^1 xe^{-x/2}\, dx \\ &= -2e^{-1/2} + 4\left(\left[x\left(-2e^{-x/2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-2e^{-x/2}\right)\, dx\right) = -2e^{-1/2} - 8e^{-1/2} + 8\int_0^1 e^{-x/2}\, dx \\ &= -10e^{-1/2} + 8\left[-2e^{-x/2}\right]_0^1 = -10e^{-1/2} - 16\left(e^{-1/2} - 1\right) \\ &= 16 - 26e^{-1/2}.\end{aligned}$$

### 4.4 Produit d'une exponentielle et d'un cosinus ou un sinus

Deux méthodes sont à disposition : une double intégration par parties ou l'utilisation de $\cos x = \text{Re}\left(e^{ix}\right)$ et $\sin x = \text{Im}\left(e^{ix}\right)$. On illustre ces deux méthodes sur un exemple.

On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$.

**1ère méthode.** D'après la définition 2, page 7, $\text{Re}\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt\right) = \displaystyle\int_a^b \text{Re}(f(t))\, dt$. Donc,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \text{Re}\left(e^{ix}\right) \, dx = \text{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x e^{ix}\right) \, dx = \text{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(1+i)x}\right) \, dx \\
&= \text{Re}\left(\left[\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \text{Re}\left(\frac{e^{(1+i)\frac{\pi}{2}} - 1}{1+i}\right) = \text{Re}\left(\frac{\left(-1 + ie^{\frac{\pi}{2}}\right)(1-i)}{2}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}.
\end{aligned}
$$

**2ème méthode.** Une double intégration par parties fournit

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx = \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\sin x) \, dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx \\
&= -1 + \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - I
\end{aligned}
$$

et donc $2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$ puis $I = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

### 4.5 Polynômes trigonométriques

La méthode de base pour intégrer des monômes trigonométriques du type $\cos^p x \sin^q x$ est la linéarisation. Par exemple, pour tout réel $x$,

$$
\begin{aligned}
\cos^2 x \sin^4 x &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right)^2 \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)^4 \\
&= \frac{1}{64}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{64}\left(e^{6ix} - 2e^{4ix} - e^{2ix} + 4 - e^{-2ix} - 2e^{-4ix} + e^{-6ix}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(\cos(6x) - 2\cos(4x) + \cos(2x) + 2\right)
\end{aligned}
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
\int \cos^2 x \sin^4 x \, dx &= \frac{1}{32}\left(\frac{\sin(6x)}{6} - \frac{\sin(4x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{2} + 2x\right) + C \\
&= \frac{1}{192}\left(\sin(6x) - 3\sin(4x) + 3\sin(2x)\right) + \frac{x}{16} + C.
\end{aligned}
$$

Néanmoins, si l'un des exposants est **impair**, on peut se passer de linéariser. Par exemple,

$$
\begin{aligned}
\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx &= \int \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^4 x \cos x \, dx = \int \sin^4 x \cos x \, dx - \int \sin^6 x \cos x \, dx \\
&= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.
\end{aligned}
$$

## 4.6 Fractions rationnelles en $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$

On veut calculer des primitives ou des intégrales de fonctions du type $x \mapsto R(\cos x, \sin x, \tan x)$ où $R$ est une fraction rationnelle. On dispose du changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On obtient $dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$ ou encore $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. D'autre part, on rappelle que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$. L'effet du changement de variables est donc de ramener le calcul des primitives de la fonction $x \mapsto R(\cos x, \sin x, \tan x)$ à celui de la fraction rationnelle $t \mapsto R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}$. On sait déjà calculer des primitives de certains types de fractions rationnelles comme par exemple les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$. Dans le chapitre « Fractions rationnelles », on complètera les connaissances sur le sujet.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour calculer } \displaystyle\int R(\cos x, \sin x, \tan x)dx, \text{ on peut poser}\\ t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right),\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2},\\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}\end{array}}$$

**Exemple.** En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t}\\ &= \ln|t| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi une formule de primitive exposée dans le paragraphe 1.2. ❑

Le changement de variables qui « marche toujours » en théorie est $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Dans certains cas, on dispose de changements de variable qui peuvent s'avérer plus efficace.

- Si $R(\cos x, \sin x, \tan x)dx$ est invariant par la transformation $x \mapsto -x$, essayer de poser $t = \cos x$.
- Si $R(\cos x, \sin x, \tan x)dx$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi - x$, essayer de poser $t = \sin x$.
- Si $R(\cos x, \sin x, \tan x)dx$ est invariant par la transformation $x \mapsto x + \pi$, essayer de poser $t = \tan x$.

Ces « règles » sont connues sous le nom de règles de Bioche.

Par exemple, $\frac{d(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-dx}{-\sin x} = \frac{dx}{\sin x}$ et pour calculer $\int \frac{dx}{\sin x}$, on peut essayer de poser $t = \cos x$ et donc $dt = -\sin x\ dx$ :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx\\ &= \int \frac{-dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C.\end{aligned}$$

A partir de l'expression ci-dessus, on peut retrouver l'expression obtenue plus haut :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|.\end{aligned}$$

Sur ce premier exemple, le changement de variable général $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ a mieux fonctionné que le changement de variable $t = \cos x$ suggéré par les règles de Bioche. La plupart du temps, c'est l'inverse qui se produit. Etudions un deuxième exemple.

On veut calculer les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x}$. Préparons le terrain.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} &= \frac{1}{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{1 - \dfrac{\sin^2(2x)}{2}}\\ &= \frac{2}{2 - \sin^2(2x)} = \frac{2}{1 + \cos^2(2x)},\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} &= \int \frac{2dx}{1+\cos^2(2x)} = \int \frac{du}{1+\cos^2 u} \text{ (en posant } u = 2x\text{)}\\ &= \int \frac{du}{1+\cos^2 u} = \int \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 u} + 1} \frac{du}{\cos^2 u} \text{ (suggéré par les règles de Bioche)}\\ &= \int \frac{1}{2+\tan^2 u}\, d(\tan u) = \int \frac{1}{2+t^2}\, dt \text{ (en posant } t = \tan u = \tan(2x)\text{)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}}\right) + C\end{aligned}$$

### 4.7 Fractions rationnelles en $e^x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$

Un changement de variables qui devrait marcher est $t = e^x$ et donc $x = \ln t$ puis $dx = \dfrac{dt}{t}$.

A titre d'exemple, déterminons les primitives de la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ sur $\mathbb{R}$. En posant $t = e^x$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\, dx &= \int \frac{2}{e^x + \dfrac{1}{e^x}}\, dx\\ &= \int \frac{2}{t + \dfrac{1}{t}} \frac{dt}{t} = \int \frac{2}{1+t^2}\, dt\\ &= 2\operatorname{Arctan}(t) + C\\ &= 2\operatorname{Arctan}\left(e^x\right) + C.\end{aligned}$$

D'autres idées peuvent venir :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\, dx &= \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x}\, dx\\ &= \int \frac{1}{1+t^2}\, dt \text{ (en posant } t = \operatorname{sh} x\text{)}\\ &= \operatorname{Arctan}(t) + C\\ &= \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) + C.\end{aligned}$$

Ainsi, les deux fonctions $F_1\ :\ x \mapsto 2\operatorname{Arctan}\left(e^x\right)$ et $F_2\ :\ x \mapsto \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)$ sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$. Les fonctions $F_1$ et $F_2$ n'ont aucune raison d'être égales. De fait, $F_1(0) = 2\operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et $F_2(0) = \operatorname{Arctan}(0) = 0$. Donc $F_1 \neq F_2$.
Par contre, en tant que primitives d'une même fonction sur l'intervalle $\mathbb{R}$, les deux fonctions $F_1$ et $F_2$ diffèrent d'une constante. On en déduit que pour tout réel $x$,

$$F_1(x) - F_2(x) = F_1(0) - F_2(0) = \frac{\pi}{2}$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2\operatorname{Arctan}\left(e^x\right) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) + \frac{\pi}{2}.$$