10

Généralités sur les fonctions

Au programme

- $\surd$ Consolider la notion de fonctions, comme exprimant la dépendance d'une variable par rapport à une autre.
- $\surd$ Courbe représentative d'une fonction.
- $\surd$ Savoir exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe.
- $\surd$ Savoir étudier et utiliser le sens de variation d'une fonction.
- $\surd$ Recherche d'extremums.

Table des matières

I Vocabulaire et notations

On connaît le volume V d'une sphère de rayon R : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Si on pense que le rayon R est **variable**, alors la quantité V **varie en fonction des variations** de la variable R ce que l'on peut visualiser avec un tableau de (quelques) valeurs. Dans le tableau ci-dessous, on donne des valeurs arrondies à 10^{-2} du volume V :

R	0	$0,5$	1	3	6
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$	0	$0,52$	$4,19$	$113,10$	$904,78$

Ainsi, V **est une fonction de** R. La fonction dont on parle dans la phrase précédente est un objet abstrait, souvent noté f au lycée (mais pas toujours), qui associe à chaque réel positif R, le réel $\frac{4}{3}\pi R^3$. Ce réel variable $\frac{4}{3}\pi R^3$ est alors noté $f(R)$ (ce qui ce lit « f de R ») et on a donc pour tout réel positif R, $f(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$. Nous allons généraliser cette situation.

Dans ce qui suit, D désigne une partie de $\mathbb{R}$ « pas trop compliquée » c'est-à-dire un intervalle comme $[0,+\infty[$ ou $]-1,1[$ ou même $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$ ou plus généralement une réunion finie d'intervalles comme $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ par exemple.

Définition 1

On définit sur D une **fonction**, notée f, en associant à chaque réel x de l'ensemble D un réel et un seul, noté $f(x)$ (ce qui se lit « f de x »).

L'ensemble D s'appelle l'**ensemble de définition** de la fonction f.

Si x est un élément de D, $f(x)$ est **l'image** de x par la fonction f.
Si x est un élément de D et y est un réel tel que $y = f(x)$, le réel x est **un antécédent** du réel y par la fonction f.

Une fonction f se note aussi $f : x \mapsto f(x)$ ou même de manière plus détaillée $f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ (ce qui se lit « f est la fonction de D dans $\mathbb{R}$ qui à chaque réel x de D associe le réel $f(x)$ »).

Par exemple, si f est la fonction $\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, alors $f(2) = 4$ ou encore 4 est l'image de 2 par la fonction f, $f(-2) = 4$ ou encore 4 est aussi l'image de -2 par la fonction f. Si on renverse ces phrases, on dit que 2 est un antécédent de 4 par la fonction f et -2 est aussi un antécédent de 4 par la fonction f.

On dit l'image et un antécédent car il n'y a qu'une image alors qu'il peut y avoir plusieurs antécédents.

Un type particulier de fonctions est les **fonctions constantes**. A chaque réel x, on associe toujours le même réel. Par exemple, si pour tout réel x, on pose $f(x) = 3$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

On peut « élargir » un peu la définition 1. Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$. L'**ensemble de départ** de la fonction f est $\mathbb{R}$ mais la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ou encore l'ensemble de définition de la fonction f n'est pas $\mathbb{R}$. En effet, le nombre 0 n'a pas d'image par f car **on ne divise pas par** 0.

De même, la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ou encore l'ensemble de définition de la fonction g n'est pas $\mathbb{R}$ car **la racine carrée d'un réel strictement négatif** n'existe pas dans $\mathbb{R}$. L'ensemble de définition de la fonction g est $[0,+\infty[$.

II Représentation graphique d'une fonction

Une fonction étant un objet assez mystérieux, on cherche à la « visualiser » avec un graphique :

Définition 2

La plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ une fonction. La **représentation graphique** $\mathscr{C}_f$ de f (ou plus simplement le **graphe** de f ou la **courbe représentative** de f) est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ dans le repère $\mathscr{R}$, où x est un réel de D.

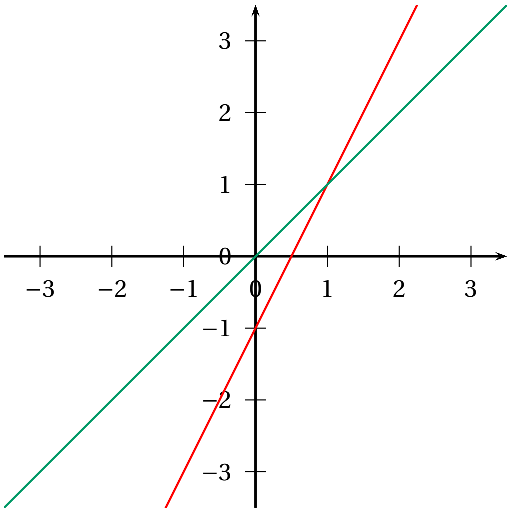
Une **équation** de la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f dans le repère $\mathscr{R}$ est $y = f(x)$.

Cela signifie qu'un point quelconque du plan M de coordonnées (x, y) appartient à la représentation graphique de f si et seulement si son ordonnée y est égale à l'image de son abscisse x ($y = f(x)$) et donc aussi $\mathrm{M}(x, y)$ n'appartient pas à $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $y \neq f(x)$.

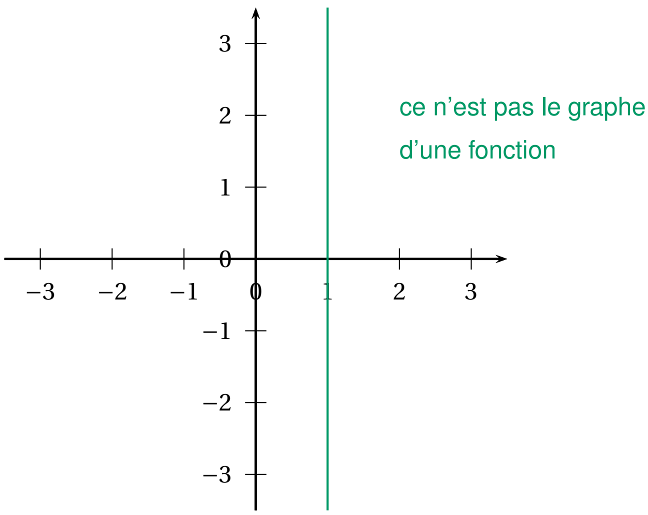
C'est un moment très important. Il faudra avec le temps (en seconde, en première, en terminale, ...) apprendre à maîtriser la notion de représentation graphique. On devra petit à petit savoir construire par soi-même de belles courbes représentatives et inversement, si on dispose de la courbe représentative d'une fonction f, on devra petit à petit apprendre à lire sur le graphique différentes propriétés de la fonction f.

On connaît déjà les courbes représentatives des **fonctions affines** du type $x \mapsto ax + b$ (ce sont des droites non parallèles à l'axe des ordonnées) et le cas particulier des courbes représentatives des **fonctions linéaires** du type $x \mapsto ax$ (ce sont des droites non parallèles à l'axe des ordonnées passant par l'origine $\mathrm{O}(0,0)$).

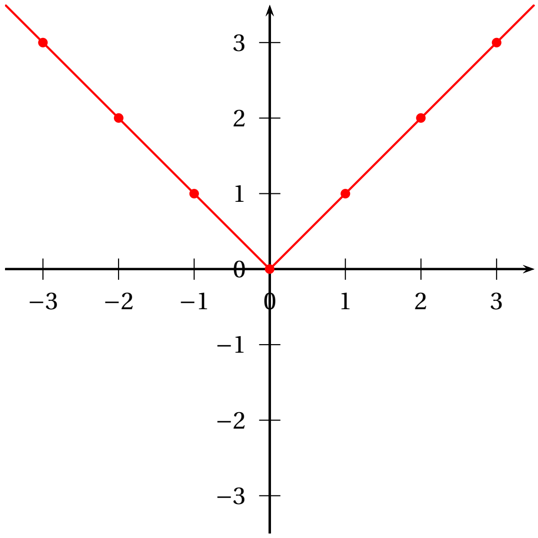
Voici par exemple les graphes de la fonction $f_1 : x \mapsto 2x - 1$ et $f_2 : x \mapsto x$. Ce sont les **droites** (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = 2x - 1$ et $y = x$.



On note qu'une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'est pas le graphe d'une fonction car un réel x n'a qu'une image par une fonction f et donc la courbe représentative de la fonction f ne peut pas posséder plusieurs points ayant la même abscisse x.



Voici ensuite le graphe de la fonction $f : x \mapsto |x|$. On a $f(-3) = 3$, $f(-2) = 2$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ et $f(3) = 3$. On place donc déjà les points de coordonnées respectives $(-3,3)$, $(-2,2)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ qui sont quelques points du graphe de la fonction f. On n'obtient plus une droite mais une réunion de deux demies-droites.

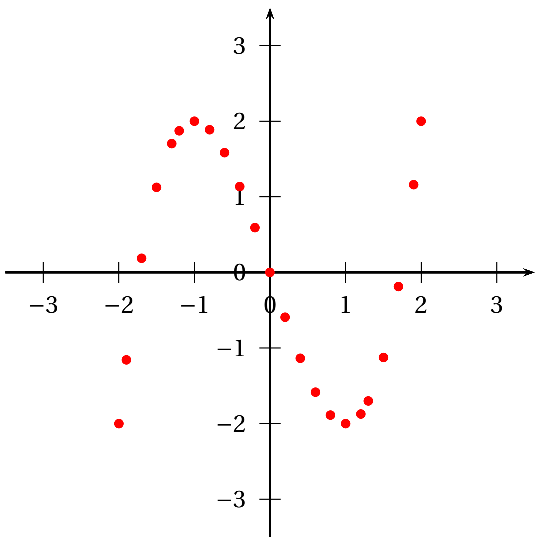


En seconde, le stock de fonctions que l'on va étudier va augmenter et les graphiques que l'on va rencontrer ne sont plus des droites mais de vraies courbes. Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2$ dont on va construire le graphe sur $[-2,2]$ (c'est-à-dire que la variable x appartient à l'intervalle $[-2,2]$). On construit d'abord un tableau de valeurs assez fin :

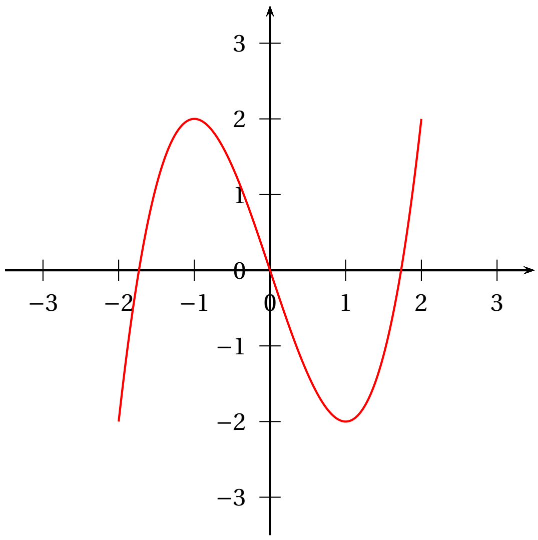
x	-2	$1,9$	$-1,7$	$-1,5$	$-1,3$	$-1,2$	-1	$-0,8$	$-0,6$	$-0,4$	$-0,2$	0
$f(x)$	-2	$-1,159$	$0,187$	$1,125$	$1,702$	$1,969$	2	$1,872$	$1,584$	$1,136$	$0,592$	0

x	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1	$1,2$	$1,3$	$1,5$	$1,7$	$1,9$	2
$f(x)$	-0.592	$-1,136$	$-1,584$	$-1,872$	-2	$-1,969$	$-1,702$	$-1,125$	$-0,187$	$1,159$	2

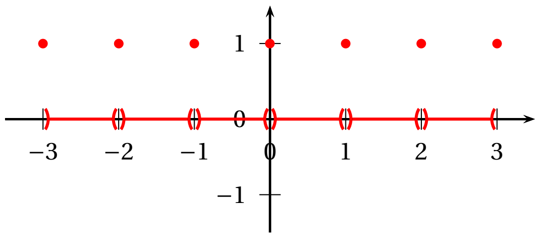
On place ensuite les différents points de coordonnées $(x, f(x))$ obtenus :



On essaie alors d'imaginer la courbe complète qui se trace d'un **trait continu**.

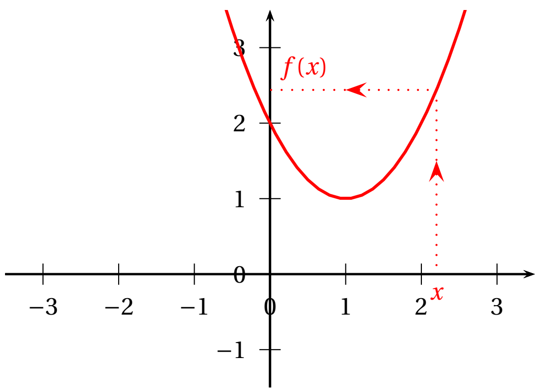


Traçons aussi le graphe de la fonction définie sur $[-3,3]$, qui à chaque réel de $[-3,3]$ associe 0 si ce réel n'est pas un entier et 1 si ce réel est un entier :

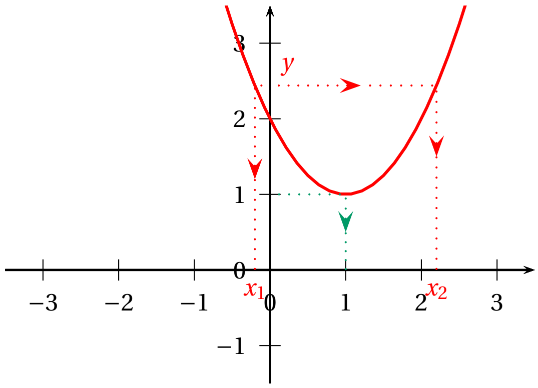


Les petites parenthèses) et (symbolisent le fait que les extrémités du trait ne font pas partie de la courbe représentative de f.

De manière générale, quand on dispose d'un graphe de fonction, on lit sur l'axe des ordonnées l'image d'un réel x situé lui sur l'axe des abscisses en allant verticalement à la courbe à partir de x puis en allant horizontalement à l'axe des ordonnées à partir du point de la courbe :

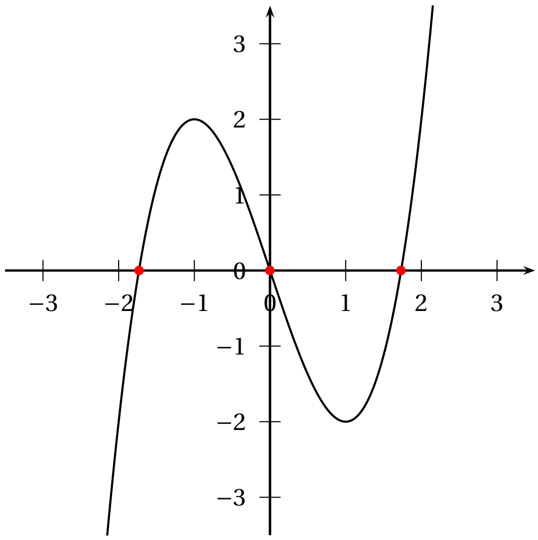


Inversement, on lit le ou les antécédents d'un réel y situé sur l'axe des ordonnées (si y a un antécédent) en allant horizontalement de y à la courbe (il peut y avoir plusieurs points de la courbe sur cette horizontale) puis en allant verticalement à l'axe des abscisses. Sur le dessin ci-dessous le réel y a deux antécédents x_1 et x_2 ($f(x_1) = f(x_2) = y$). On note aussi que le réel $0,5$ lu sur l'axe des ordonnées n'a pas d'antécédent par la fonction f et que le réel 1 lu sur l'axe des ordonnées a exactement un antécédent par la fonction f à savoir le réel 1 lu cette fois-ci sur l'axe des abscisses.



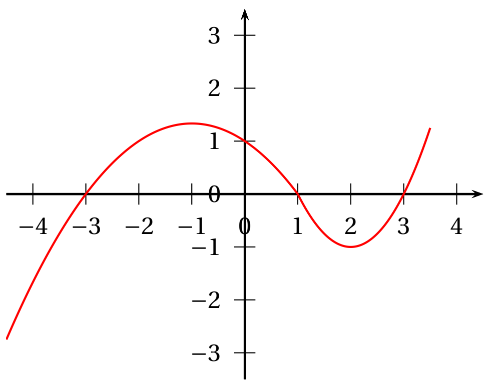
Un cas particulier de cette situation est la recherche des antécédents du nombre 0 (lu sur l'axe des ordonnées) c'est-à-dire les réels x vérifiant $f(x) = 0$ ou encore les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Si x est une solution de l'équation $f(x) = 0$, alors le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x, f(x))$ a une ordonnée nulle et est donc sur l'axe des abscisses. Inversement, si le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x, f(x))$ est sur l'axe des abscisses, alors son ordonnée, à savoir $f(x)$ est nulle et donc x est solution de l'équation $f(x) = 0$.

On retiendra : **les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses x des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses**.



Exercice 1

On donne le graphe d'une fonction f sur l'intervalle $[-4,5;3,5]$:



1) Préciser $f(0)$ et évaluer $f(-1)$.

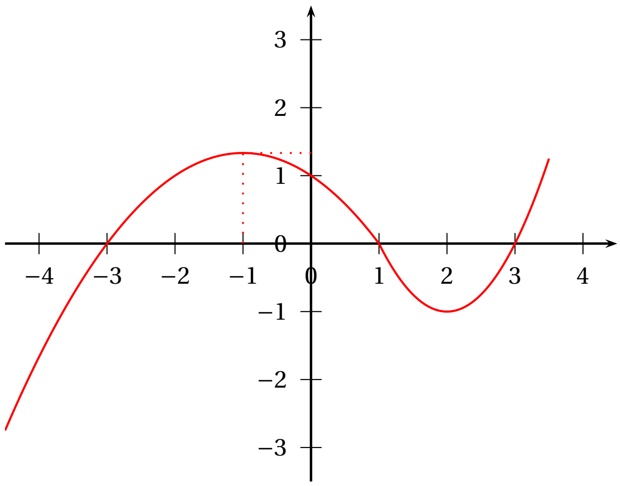
2) Déterminer un antécédent de 1. Combien d'antécédents possède le nombre 1 ?

3) a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

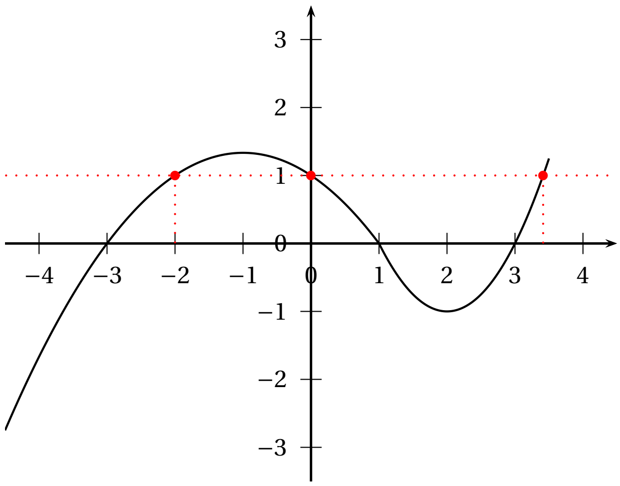
b) Résoudre l'équation $f(x) = 2$.

Solution 1 :

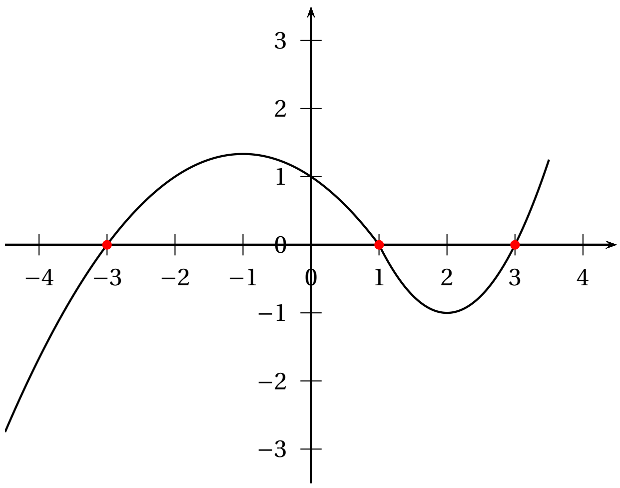
1) La courbe passe par le point de coordonnées $(0,1)$ et donc $f(0)=1$. Ensuite, $f(-1)$ vaut environ $1,3$.



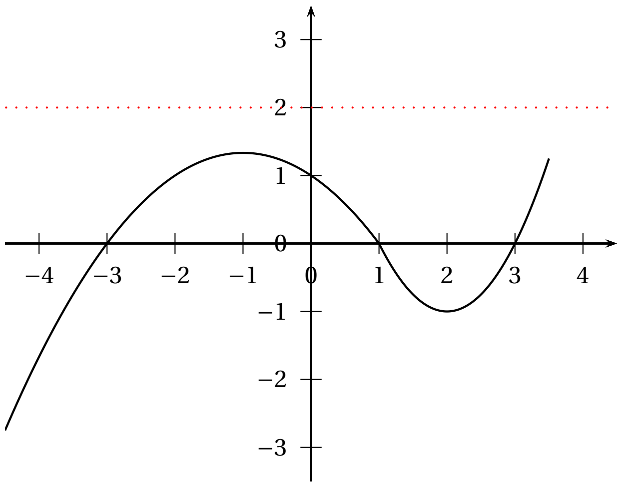
2) Puisque $f(0)=1$, 0 est un antécédent de 1 par la fonction f. Ensuite, le nombre 1 a trois antécédents, le nombre 0, le nombre -2 et un troisième antécédent approximativement égal à $3,4$:



3) a) Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe (Ox). L'équation $f(x)=0$ a donc trois solutions, les nombres -3, 1 et 3, ou encore si on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=0$, $\mathscr{S}=\{-3;1;3\}$.



b) Il n'existe pas de réel x de l'intervalle $[-4,5;3,5]$ tel que $f(x)=2$. Si on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=2$, alors $\mathscr{S}=\varnothing$.



■

III Position relative de deux courbes

A Signe d'une fonction

Définition 3

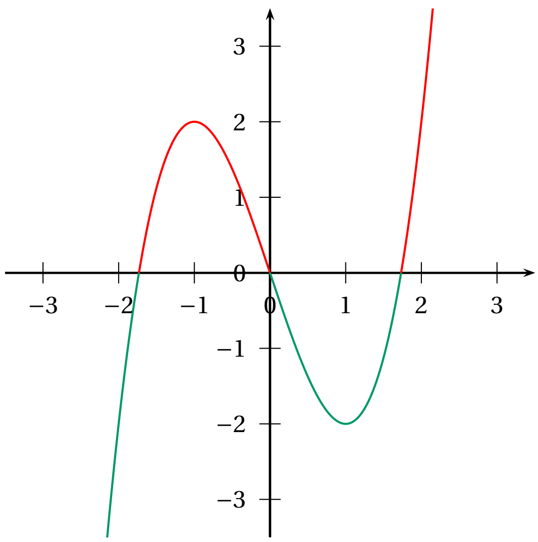
Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'ensemble D.

La fonction f est **positive** sur D si et seulement si pour tout réel x de D, $f(x) \geqslant 0$.
La fonction f est **strictement positive** sur D si et seulement si pour tout réel x de D, $f(x) > 0$.
La fonction f est **négative** sur D si et seulement si pour tout réel x de D, $f(x) \leqslant 0$.
La fonction f est **strictement négative** sur D si et seulement si pour tout réel x de D, $f(x) < 0$.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est positive sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$.
De même, la fonction $g : x \mapsto x^3$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$, strictement négative sur $[-\infty, 0[$ et s'annule en 0.

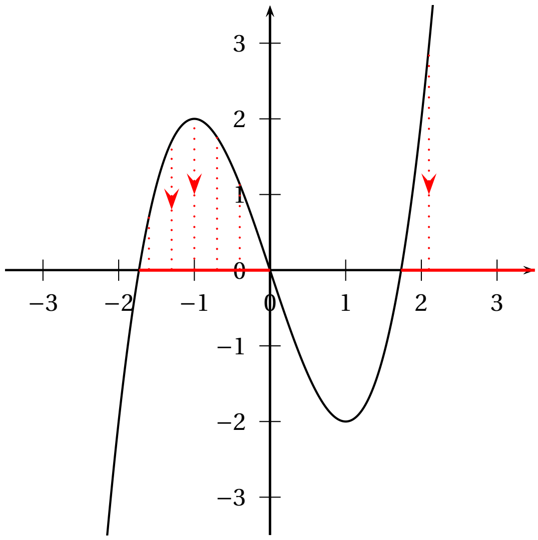
Analysons maintenant l'influence du signe d'une fonction sur sa courbe représentative. Soit f une fonction dont la courbe représentative est notée $\mathscr{C}_f$. Une équation de la courbe $\mathscr{C}_f$ est $y = f(x)$.

Si la fonction f est positive sur un intervalle I, alors pour chaque x de I, le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x, c'est-à-dire le point de coordonnées $(x, f(x))$, a une ordonnée positive. La courbe $\mathscr{C}_f$ est alors au-dessus de l'axe des abscisses.
Si la fonction f est négative sur un intervalle I, alors pour chaque x de I, le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x, c'est-à-dire le point de coordonnées $(x, f(x))$, a une ordonnée négative. La courbe $\mathscr{C}_f$ est alors au-dessous de l'axe des abscisses.



Inversement, quand on a à disposition le graphe d'une fonction, on peut résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 0$: **l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est l'ensemble des abscisses x des points de $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de l'axe des abscisses**, axe des abscisses compris.

On obtient ces solutions en projetant orthogonalement les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur (Ox).



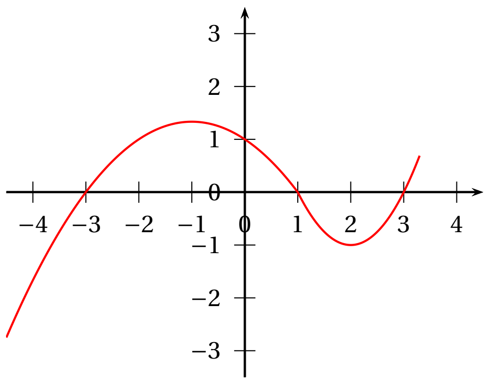
Sur le graphique ci-dessus, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est approximativement $[-1,7;0] \cup [1,7,+\infty[$.

De même, **l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ est l'ensemble des abscisses x des points de $\mathscr{C}_f$ situés au-dessous de l'axe des abscisses**, axe des abscisses compris.

On obtient ces solutions en projetant orthogonalement les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur (Ox).

Exercice 2

On donne le graphe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4,5;3,3]$:

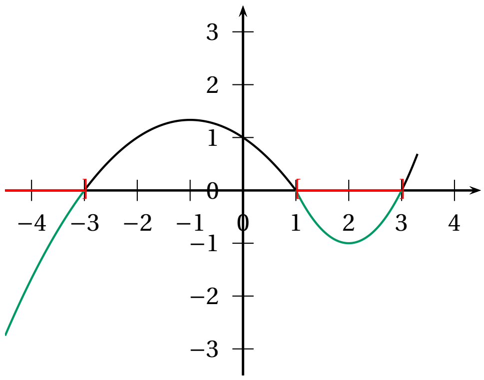


1) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

2) Résoudre l'inéquation $f(x) > 1$.

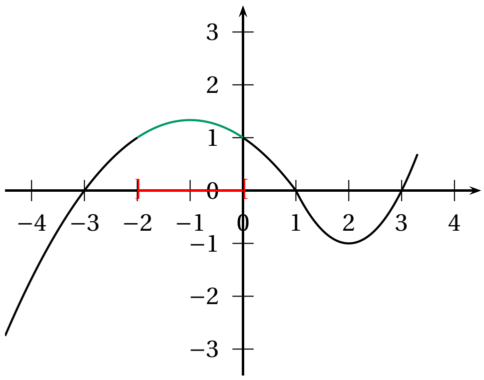
Solution 2 :

1) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ est l'ensemble des abscisses x des points de $\mathscr{C}_f$ situés au-dessous de l'axe des abscisses, axe des abscisses compris.



L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est donc $[-4,5;-3] \cup [1,3]$.

2) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 1$ est l'ensemble des abscisses x des points de $\mathscr{C}_f$ situés strictement au-dessus de la droite d'équation $y = 1$.



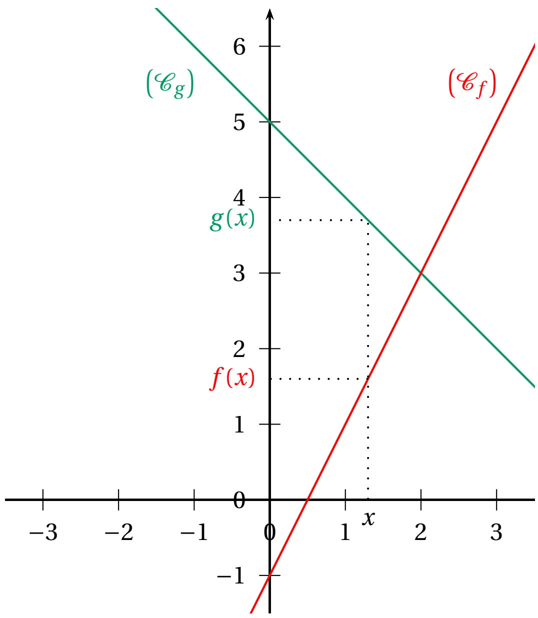
L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est donc $]-2,0[$.

■

B Position relative de deux courbes

On veut maintenant savoir si la courbe représentative d'une certaine fonction f est au-dessus ou au-dessous de la courbe représentative d'une certaine fonction g.

On commence par l'étude d'un exemple. Soient les fonctions $f : x \mapsto 2x-1$ et $g : x \mapsto -x+5$ dont voici les graphes :



On veut déterminer algébriquement les intervalles sur lesquels le graphe de la fonction f est au-dessus du graphe de la fonction g et les intervalles sur lesquels le graphe de la fonction f est au-dessous du graphe de la fonction g.

Un réel x étant donné, le point M de coordonnées $(x, f(x))$ est au-dessous du point N de coordonnées $(x, g(x))$ si et seulement si l'ordonnée de M, à savoir $f(x)$, est inférieure ou égale à l'ordonnée de N, à savoir $g(x)$. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur un certain intervalle I si et seulement si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant g(x)$ ou encore $g(x) - f(x) \geqslant 0$. De même, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $g(x) - f(x) \leqslant 0$.

On note que l'expression « au-dessus » signifie « au-dessus au sens large ». Sinon, on dit « strictement au-dessus ».

On retiendra : **pour étudier la position relative de deux courbes, on étudie le signe de l'expression $g(x) - f(x)$ en fonction de x.**

Reprenons notre exemple. Pour tout réel x, $g(x) - f(x) = (-x+5) - (2x-1) = -x+5-2x+1 = -3x+6$. La fonction affine $g - f$ s'annule en $\dfrac{-6}{-3}$ ou encore 2. D'après l'étude du signe d'une fonction affine, pour tout réel x de $]-\infty, 2[$, $g(x) - f(x) > 0$, pour tout réel x de $]2, +\infty[$, $g(x) - f(x) < 0$ et enfin $g(2) - f(2) = 0$.

Mais alors, pour tout réel x de $]-\infty, 2[$, $f(x) < g(x)$, pour tout réel x de $]2, +\infty[$, $f(x) > g(x)$ et enfin $f(2) = g(2)$. La courbe $(\mathscr{C}_g)$ est strictement au-dessus de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ sur $]-\infty, 2[$, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ est strictement au-dessous de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ sur $]2, +\infty[$ et enfin, les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ se coupent en leur point d'abscisse 2 et donc d'ordonnée $f(2) = g(2) = 3$.

Exercice 3

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$.

Etudier la position relative des courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ représentatives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

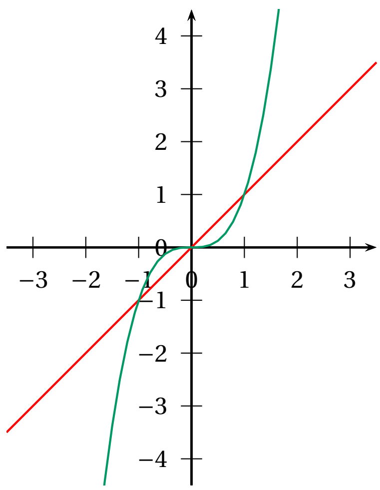
Solution 3 : Pour tout réel x,

$$g(x) - f(x) = x^3 - x = x\left(x^2 - 1\right) = x\left(x^2 - 1^2\right) = x(x-1)(x+1).$$

Etudions le signe de la fonction $x \mapsto g(x) - f(x)$ dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)-f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour tout réel x de $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$, $g(x) - f(x) > 0$. Donc, $(\mathscr{C}_f)$ est strictement en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$. Pour tout réel x de $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$, $g(x) - f(x) < 0$. Donc, $(\mathscr{C}_f)$ est strictement en dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$. Enfin, $f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0) = 0$ et $f(1) = g(1) = 1$. Donc, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées respectives $(-1, -1)$, $(0, 0)$ et $(1, 1)$.



■

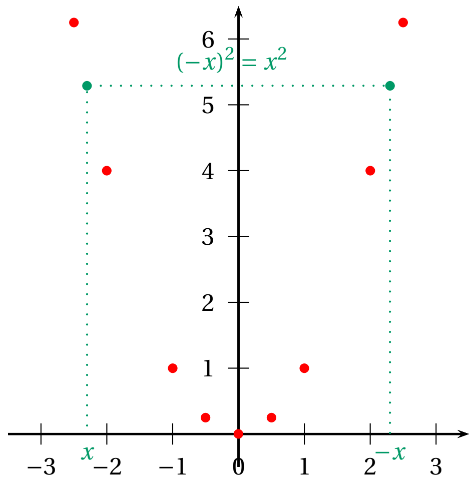
IV Fonctions paires, fonctions impaires

A Fonctions paires

Dressons un tableau de valeurs, « symétrique par rapport à 0 », de la fonction $f : x \mapsto x^2$.

x	$-2,5$	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	$2,5$
x^2	$6,25$	4	1	$0,25$	0	$0,25$	1	4	$6,25$

On constate que $-2,5$ et $2,5$ ont la même image par la fonction f, -2 et 2 ont la même image par la fonction f, -1 et 1 ont la même image par la fonction f, $-0,5$ et $0,5$ ont la même image par la fonction f, ... Plus généralement, pour tout réel x, $(-x)^2 = x^2$. Ceci a une conséquence sur le graphe de la fonction f :



Les points de la courbe représentative de f d'abscisse $-x$ et x ont la même ordonnée (et des abscisses opposées). Ces points sont donc symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.

La même propriété est vérifiée par les fonctions $x \mapsto x^4$, $x \mapsto x^6$, $x \mapsto x^8$, ... : pour tout réel x, les réels $-x$ et x ont la même image par chacune de ces fonctions (pour tout réel x, $(-x)^4 = x^4$, $(-x)^6 = x^6$, $(-x)^8 = x^8$, ...). Ceci vient du fait que les exposant $2, 4, 6, 8, \dots$ sont des entiers pairs et qu'« un produit d'un nombre pair de $-$ est égal à $+$ ». Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 4

Soit f une fonction définie sur partie D de $\mathbb{R}$.

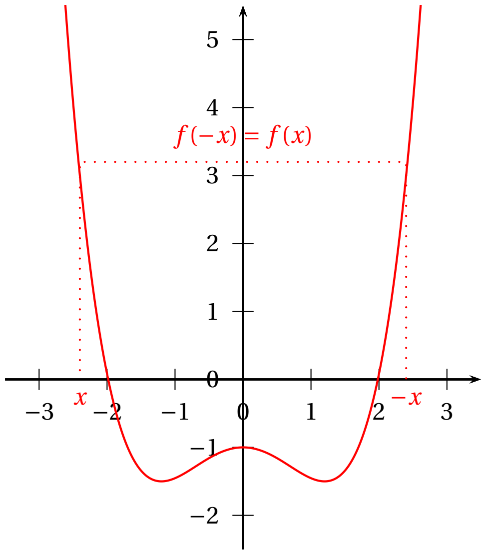
La fonction f est **paire** si et seulement si, pour tout réel x de D, le réel $-x$ appartient à D et de plus, pour tout réel x de D, $f(-x) = f(x)$.

Avec les remarques du début du paragraphe, on peut énoncer :

Théoreme 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



B Fonctions impaires

Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^5$, ... vérifient : pour tout réel x, les réels $-x$ et x ont des images opposées par chacune de ces fonctions (pour tout réel x, $(-x)^3 = -x^3$, $(-x)^5 = -x^5$, ...). Ceci vient du fait que les exposant 1, 3, 5, ... sont des entiers impairs et qu'« un produit d'un nombre impair de – est égal à – ». Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 5

Soit f une fonction définie sur partie D de $\mathbb{R}$.

La fonction f est **impaire** si et seulement si, pour tout réel x de D, le réel $-x$ appartient à D et de plus, pour tout réel x de D, $f(-x) = -f(x)$.

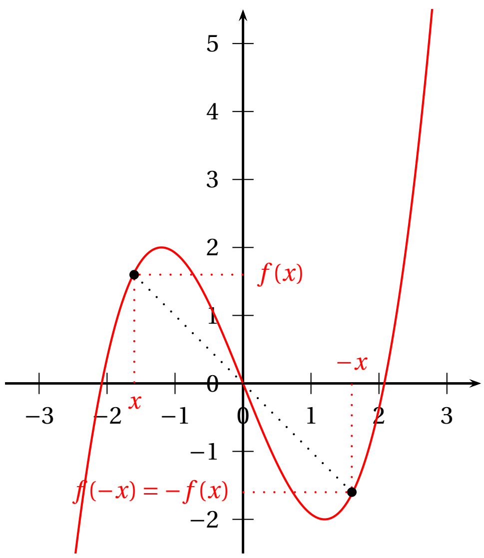
Analysons maintenant les conséquences géométriques de cette propriété. Soit f une fonction impaire. Soit M un point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x, f(x))$. Soit N le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $-x$. Les coordonnées de N sont $(-x, f(-x))$ ou encore $(-x, -f(x))$.

Mais alors, le milieu du segment $[\mathrm{MN}]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x-x}{2}, \dfrac{f(x)-f(x)}{2}\right)$ ou encore $(0, 0)$. Ainsi, le milieu du segment $[\mathrm{MN}]$ est l'origine O du repère ou encore les points M et N sont symétriques par rapport à O. On peut énoncer :

Théoreme 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.



Exercice 4

Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f_1 \ : \ x \mapsto 2x^4 - x^2 + 1$.

2) $f_2 \ : \ x \mapsto x^3 - 3x$.

3) $f_3 \ : \ x \mapsto x^4 - x + 1$.

4) $f_4 \ : \ x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$.

5) $f_5 \ : \ x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-1}$.

☞ *La phrase « étudier la parité » signifie « déterminer si f est une fonction paire ou une fonction impaire ou une fonction ni paire, ni impaire ».*

Solution 4 :

1) La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour tout réel x,

$$f_1(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 1 = 2x^4 - x + 1 = f_1(x).$$

La fonction f_1 est donc une fonction paire.

2) La fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour tout réel x,

$$f_2(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -\left(x^3 - 3x\right) = -f_2(x).$$

La fonction f_2 est donc une fonction impaire.

3) $f_3(-2) = (-2)^4 - (-2) + 1 = 19$ et $f_3(2) = 2^4 - 2 + 1 = 15$. Donc, $f_3(-2) \neq f_3(2)$ et $f_3(-2) \neq -f_3(2)$. Ainsi, il existe un réel x tel que $f_3(-x) \neq f_3(x)$ et donc la fonction f_3 n'est pas une fonction paire. De même, il existe un réel x tel que $f_3(-x) \neq -f_3(x)$ et donc la fonction f_3 n'est pas une fonction impaire.

En résumé, la fonction f_3 n'est ni paire, ni impaire.

4) Pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$ et en particulier, pour tout réel x, $x^2 + 1 \neq 0$. La fonction f_4 est donc définie sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour tout réel x,

$$f_4(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f_4(x).$$

La fonction f_4 est donc une fonction impaire.

4) Pour tout réel x, $x^2 - 1 = 0$ équivaut à $(x+1)(x-1) = 0$ ou encore à $x = -1$ ou $x = 1$. Les réels -1 et 1 n'ont pas d'image par la fonction f_5 et d'autre part, si x est un réel différent de -1 et de 1, $x^2 - 1 \neq 0$ et donc $f_5(x)$ existe. La fonction f_5 est définie sur $\mathrm{D} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

Si x est un réel de D, alors $-x$ est aussi un réel de D (l'ensemble de définition D est symétrique par rapport à 0) puis, pour tout réel x de D,

$$f_5(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2-1} = -\frac{2x}{x^2-1} = -f_5(x).$$

La fonction f_5 est donc une fonction impaire.

■

On note qu'une fonction peut être ni paire, ni impaire, et donc le mot « impaire » n'est pas le contraire du mot « paire ». On note aussi qu'il existe une fonction qui est à la fois paire et impaire : la **fonction nulle**. C'est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $f(x) = 0$.

V Variations d'une fonction. Extremums

A Sens de variation d'une fonction

On reprend l'exemple du volume V d'une sphère de rayon R : $\mathrm{V}(\mathrm{R}) = \dfrac{4}{3}\pi\mathrm{R}^3$. Il est clair que quand le rayon R de la sphère augmente, le volume V de cette sphère augment également ce qui peut être traduit par : si R et R' sont deux réels positifs tels que $R \leqslant R'$, alors $V(R) \leqslant V(R')$. On exprime ceci en disant que la fonction $R \mapsto V(R)$ est **croissante** sur $[0, +\infty[$ (intervalle dans lequel varie R).

Il s'agit maintenant de définir avec soin, de manière générale, une phrase du type « quand cette quantité grandit, cette autre quantité grandit (ou diminue) ».

Définition 6

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles.

f est **croissante** sur D si et seulement si, pour touts réels a et b de D, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$.
f est **strictement croissante** sur D si et seulement si, pour touts réels a et b de D, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.

f est **décroissante** sur D si et seulement si, pour touts réels a et b de D, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$.
f est **strictement décroissante** sur D si et seulement si, pour touts réels a et b de D, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

f est **monotone** sur D si et seulement si f est croissante sur D ou f est décroissante sur D.
f est **strictement monotone** sur D si et seulement si f est strictement croissante sur D ou f est strictement décroissante sur D.

Vérifions à titre d'exemple que la fonction $f : x \mapsto 2x - 3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $g : x \mapsto -3x + 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Alors, $2a < 2b$ puis $2a - 3 < 2b - 3$ et donc $f(a) < f(b)$. Ainsi, pour touts réels a et b, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Alors, $-3a > -3b$ puis $-3a + 1 > -3b + 1$ et donc $g(a) > g(b)$. Ainsi, pour tous réels a et b, si $a < b$, alors $g(a) > g(b)$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Les deux fonctions f et g sont en particulier strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Il existe des fonctions qui ne sont pas monotone. Par exemple, la fonction $h : x \mapsto x^2$ n'est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $h : x \mapsto x^2$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$. Vérifions le explicitement.

Soient $a = -2$ et $b = -1$. a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$. Ensuite, $h(a) = 4$ et $h(b) = 1$ et donc $h(a) > h(b)$. Ainsi, il existe deux réels a et b tels que $a \leqslant b$ et $h(a) > h(b)$. La fonction h n'est donc pas croissante sur $\mathbb{R}$.
Soient $a = 1$ et $b = 2$. a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$. Ensuite, $h(a) = 1$ et $h(b) = 2$ et donc $h(a) < h(b)$. Ainsi, il existe deux réels a et b tels que $a \leqslant b$ et $h(a) < h(b)$. La fonction h n'est donc pas décroissante sur $\mathbb{R}$.
Finalement, la fonction h n'est ni croissante sur $\mathbb{R}$, ni décroissante sur $\mathbb{R}$. La fonction h n'est donc pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Par contre, la fonction h est croissante sur $[0, +\infty[$. Vérifions-le explicitement. Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$. On a

$$h(b) - h(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

Puisque $0 \leqslant a \leqslant b$, on a $(b - a)(b + a) \geqslant 0$ puis $h(b) - h(a) \geqslant 0$ et donc $h(a) \leqslant h(b)$. On a montré que pour tous réels a et b de l'intervalle $[0, +\infty[$, si $a \leqslant b$, alors $h(a) \leqslant h(b)$. Donc, la fonction h est croissante sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, il existe des fonctions qui ne sont ni croissante, ni décroissante sur un ensemble donné et donc le mot « décroissante » n'est pas le contraire du mot « croissante ». D'autre part, il existe des fonctions qui sont à la fois croissante et décroissante sur un ensemble donné : les fonctions constantes.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1) Montrer que pour tous réels a et b, $f(b) - f(a) = (b - a)(a + b - 4)$.

2) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[2, +\infty[$ et sur l'intervalle $]-\infty, 2]$.

Solution 5 :

1) Soient a et b deux réels.

$$\begin{aligned}f(b)-f(a)&=\left(b^2-4b+3\right)-\left(a^2-4a+3\right)\\&=b^2-4b+3-a^2+4a-3\\&=\left(b^2-a^2\right)-4(b-a)\\&=(b-a)(b+a)-4(b-a)\\&=(b-a)(a+b-4).\end{aligned}$$

2)

• Soient a et b deux réels de $[2,+\infty[$ tels que $a \leqslant b$. Alors, $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$ puis $a+b \geqslant 4$ puis $a+b-4 \geqslant 0$. D'autre part, $b-a \geqslant 0$ et donc $(b-a)(a+b-4) \geqslant 0$. Finalement, $f(b)-f(a) \geqslant 0$ ou encore $f(a) \leqslant f(b)$.

On a montré que pour tous réels a et b de $[2,+\infty[$, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

• Soient a et b deux réels de $]-\infty,2]$ tels que $a \leqslant b$. Alors, $a \leqslant 2$ et $b \leqslant 2$ puis $a+b \leqslant 4$ puis $a+b-4 \leqslant 0$. D'autre part, $b-a \geqslant 0$ et donc $(b-a)(a+b-4) \leqslant 0$. Finalement, $f(b)-f(a) \leqslant 0$ ou encore $f(a) \geqslant f(b)$.

On a montré que pour tous réels a et b de $]-\infty,2]$, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty,2]$.

■

Remarques.
1 - En affinant le travail précédent, on aurait pu montrer le résultat plus précis : f est strictement décroissante sur $]-\infty,2]$ et strictement croissante sur $[2,+\infty[$.
2 - L'exercice précédent permet de dégager une méthode générale pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle. On calcule $f(b)-f(a)$ en cherchant à faire apparaître $b-a$ en facteur puis on étudie le signe de $f(b)-f(a)$ sous l'hypothèse $b-a \geqslant 0$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : pour tout réel x différent de 2, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$.

1) Montrer que pour tous réels a et b de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(b)-f(a)=-\dfrac{3(b-a)}{(a-2)(b-2)}$.

2) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty,2[$ et sur $]2,+\infty[$.

3) La fonction f est-elle strictement décroissante sur $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$?

Solution 6 :

1) Soient a et b deux réels de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (ou encore $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$).

$$\begin{aligned}f(b)-f(a)&=\frac{2b-1}{b-2}-\frac{2a-1}{a-2}=\frac{(2b-1)(a-2)-(2a-1)(b-2)}{(a-2)(b-2)}=\frac{(2ab-a-4b+2)-(2ab-b-4a+2)}{(a-2)(b-2)}\\&=\frac{2ab-a-4b+2-2ab+b+4a+2}{(a-2)(b-2)}=\frac{3a-3b}{(a-2)(b-2)}=-\frac{3(b-a)}{(a-2)(b-2)}.\end{aligned}$$

2) • Soient a et b deux réels de $]2,+\infty[$ tels que $a<b$. Alors, $a-2>0$ et $b-2>0$ puis $(a-2)(b-2)>0$. D'autre part, $b-a>0$ puis $3(b-a)>0$ puis $\dfrac{3(b-a)}{(a-2)(b-2)}>0$ puis $-\dfrac{3(b-a)}{(a-2)(b-2)}<0$. On en déduit que $f(b)-f(a)<0$ et donc $f(a)>f(b)$.
On a montré que pour tous réels a et b de $]2,+\infty[$, si $a<b$, alors $f(a)<f(b)$. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]2,+\infty[$.

• Soient a et b deux réels de $]-\infty,2[$ tels que $a<b$. Alors, $a-2<0$ et $b-2<0$ puis $(a-2)(b-2)>0$. D'autre part, $b-a>0$ puis $3(b-a)>0$ puis $\dfrac{3(b-a)}{(a-2)(b-2)}>0$ puis $-\dfrac{3(b-a)}{(a-2)(b-2)}<0$. On en déduit que $f(b)-f(a)<0$ et donc $f(a)>f(b)$.

On a montré que pour tous réels a et b de $]-\infty,2[$, si $a<b$, alors $f(a)<f(b)$. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty,2[$.

3) $f(1) = \dfrac{2-1}{1-2} = -1$ et $f(3) = \dfrac{2\times3-1}{3-2} = 5$. On a ainsi $1 < 3$ et $f(1) \leqslant f(3)$. Donc, il existe deux réels a et b de $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ tels que $a < b$ et $f(a) \leqslant f(b)$.

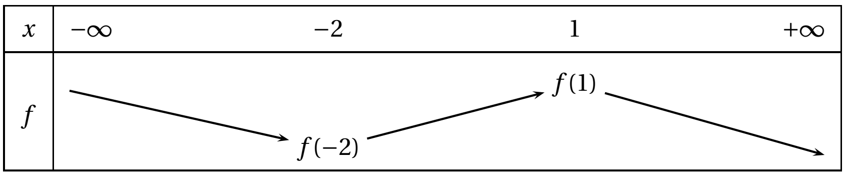
La phrase « pour tous réels a et b de $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$ » est donc fausse. La fonction f n'est pas strictement décroissante sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

■

☞ *On doit noter que la phrase « f est strictement décroissante sur $]-\infty, 2[$ et f est strictement décroissante sur $]2, +\infty[$ » n'est pas équivalente à la phrase « f est strictement décroissante sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ ».*

B Tableau de variation d'une fonction

Une phrase du genre « la fonction f est décroissante sur $]-\infty, -2]$ puis la fonction f est croissante sur $[-2, 1]$ puis la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$ », qui décrit les variations d'une certaine fonction f, est longue à écrire et peu visuelle. On décide de représenter les variations de cette fonction f dans un tableau, appelé **tableau de variation** de la fonction f, qui a l'allure suivante :



La première ligne de ce tableau correspond pour un graphe à ce qu'on lit l'axe des abscisses et la deuxième ligne de ce tableau correspond pour un graphe à ce qu'on lit l'axe des ordonnées.

C Maximum, minimum, extremum

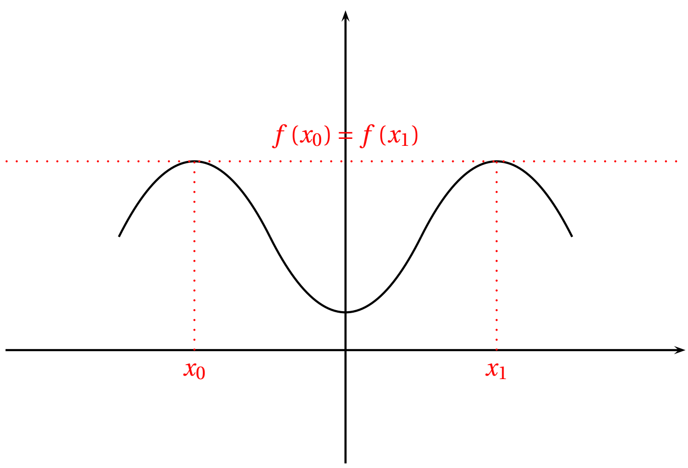
Définition 7

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un réel de D.

La fonction f admet un **maximum** en x_0 si et seulement si pour tout réel x de D, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
La fonction f admet un **minimum** en x_0 si et seulement si pour tout réel x de D, $f(x) \geqslant f(x_0)$.

La fonction f admet un **extremum** en x_0 si et seulement si la fonction f admet un maximum ou un minimum en x_0.

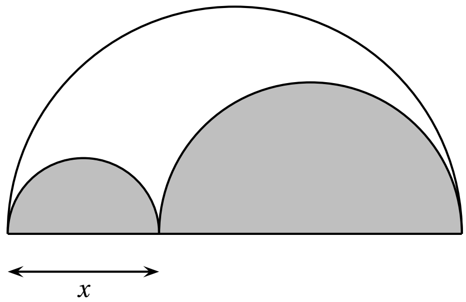
Le maximum (ou un minimum) d'une fonction est une valeur prise par la fonction. Il se lit sur l'axe des ordonnées. Il n'y a qu'un maximum (s'il y en a un) mais il peut **être atteint** en plusieurs réels x_0, x_1, ...



La recherche des extremums d'une fonction f est une activité classique en analyse. On trouve ces extremums en étudiant les variations de f :

Exercice 7

On considère un demi-cercle de rayon R strictement positif. On trace alors deux demis-cercles comme ci-dessous. On note x le diamètre du demi-cercle de gauche, noté C_1, et on note C_2 le demi-cercle de droite.



1) Dans quel intervalle I varie x ?

2) Déterminer le périmètre $P(x)$ de la zone grise.

3) Montrer que, pour tout réel x de I, l'aire $A(x)$ de la zone grise est $\frac{\pi}{4}\left((x-R)^2+R^2\right)$.

4) a) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto A(x)$ sur l'intervalle I puis dresser le tableau de variation de la fonction $x \mapsto A(x)$.

b) En déduire le minimum et le maximum de l'aire $A(x)$ pour x appartenant à I.

Solution 7 :

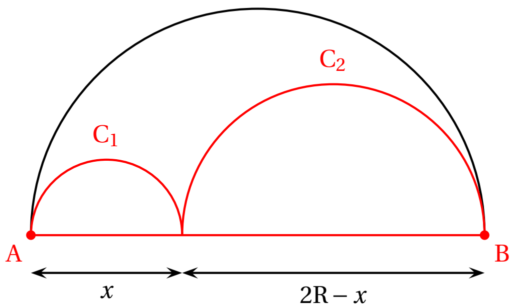
1) x est le diamètre de C_1. Il est positif et d'autre part, x n'excède pas le diamètre $2R$ du grand cercle. x prend toutes les valeurs de 0 à $2R$ ou encore x varie dans l'intervalle $I = [0, 2R]$ (si on n'accepte pas les cas conventionnels où C_1 est de diamètre 0 ou de diamètre $2R$, alors x varie dans $]0, 2R[$).

2) Le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$. La longueur de C_1 est donc $\frac{2\pi \times x}{2}$ ou encore πx. Le diamètre de C_2 est $2R - x$. La longueur de C_2 est $\frac{2\pi \times (2R-x)}{2}$ ou encore $\pi(2R-x)$. Enfin, le segment $[AB]$ (voir ci-dessous) a une longueur égale à $2R$.

Le périmètre demandé est donc $\pi x + \pi(2R-x) + 2R$ ou encore $\pi(x + 2R - x) + 2R$ ou encore $\pi R + 2R$ ou enfin $(\pi+2)R$.

Pour tout réel x de $[0, 2R]$, $P(x) = (\pi+2)R$.

On note que le périmètre est constant quand x varie.



3) L'aire d'un disque de diamètre d est $\frac{\pi d^2}{4}$. L'aire du demi-disque de frontière C_1 est donc $\frac{1}{2} \times \frac{\pi x^2}{4}$ ou encore $\frac{\pi x^2}{8}$ et l'aire du demi-disque de frontière C_2 est donc $\frac{\pi(2R-x)^2}{8}$. Donc,

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{\pi x^2}{8} + \frac{\pi(2R-x)^2}{8} = \frac{\pi}{8}\left(x^2 + (2R-x)^2\right) = \frac{\pi}{8}\left(x^2 + (2R)^2 - 2 \times 2R \times x + x^2\right) \\
&= \frac{\pi}{8}\left(2x^2 - 4Rx + 4R^2\right) = \frac{2\pi}{8}\left(x^2 - 2Rx + 2R^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(x^2 - 2Rx + R^2 + R^2\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\left((x-R)^2 + R^2\right).
\end{aligned}
$$

Pour tout réel x de $[0,2\mathrm{R}]$, $\mathrm{A}(x)=\dfrac{\pi}{4}\left((x-\mathrm{R})^2+\mathrm{R}^2\right)$.

4) a) Soient a et b deux réels de l'intervalle $[0,2\mathrm{R}]$ tels que $a\leqslant b$.

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(b)-\mathrm{A}(a)&=\frac{\pi}{4}\left((b-\mathrm{R})^2+\mathrm{R}^2\right)-\frac{\pi}{4}\left((a-\mathrm{R})^2+\mathrm{R}^2\right)=\frac{\pi}{4}\left((b-\mathrm{R})^2+\mathrm{R}^2-(a-\mathrm{R})^2-\mathrm{R}^2\right)=\frac{\pi}{4}\left((b-\mathrm{R})^2-(a-\mathrm{R})^2\right)\\&=\frac{\pi}{4}((b-\mathrm{R})-(a-\mathrm{R}))((b-\mathrm{R})+(a-\mathrm{R}))=\frac{\pi}{4}(b-a)(a+b-2\mathrm{R}).\end{aligned}$$

1er cas. Supposons que a et b sont dans $[0,\mathrm{R}]$. Alors, $a\leqslant\mathrm{R}$ et $b\leqslant\mathrm{R}$ puis $a+b\leqslant 2\mathrm{R}$ et donc $a+b-2\mathrm{R}\leqslant 0$. D'autre part, $b-a\geqslant 0$ et finalement, $\dfrac{\pi}{4}(b-a)(a+b-2\mathrm{R})\leqslant 0$ puis $\mathrm{A}(b)-\mathrm{A}(a)\leqslant 0$.

Ainsi, pour tout réels a et b de l'intervalle $[0,\mathrm{R}]$, si $a\leqslant b$, alors $\mathrm{A}(a)\geqslant\mathrm{A}(b)$. La fonction A est décroissante sur l'intervalle $[0,\mathrm{R}]$.

2ème cas. Supposons que a et b sont dans $[\mathrm{R},2\mathrm{R}]$. Alors, $a\geqslant\mathrm{R}$ et $b\geqslant\mathrm{R}$ puis $a+b\geqslant 2\mathrm{R}$ et donc $a+b-2\mathrm{R}\geqslant 0$. D'autre part, $b-a\geqslant 0$ et finalement, $\dfrac{\pi}{2}(b-a)(a+b-2\mathrm{R})\geqslant 0$ puis $\mathrm{A}(b)-\mathrm{A}(a)\geqslant 0$.

Ainsi, pour tout réels a et b de l'intervalle $[\mathrm{R},2\mathrm{R}]$, si $a\leqslant b$, alors $\mathrm{A}(a)\leqslant\mathrm{A}(b)$. La fonction A est croissante sur l'intervalle $[\mathrm{R},2\mathrm{R}]$.

On note que $\mathrm{A}(0)=\dfrac{\pi}{2}\times 2\mathrm{R}^2=\pi\mathrm{R}^2$ et de même $\mathrm{A}(2\mathrm{R})=\pi\mathrm{R}^2$. Enfin, $\mathrm{A}(\mathrm{R})=\dfrac{\pi}{2}\left(0^2+\mathrm{R}^2\right)=\dfrac{\pi\mathrm{R}^2}{2}$. On en déduit le tableau de variation de la fonction $x\mapsto\mathrm{A}(x)$ sur $[0,2\mathrm{R}]$.

x	0		R		$2\mathrm{R}$
A	$\pi\mathrm{R}^2$	$\searrow$	$\frac{\pi\mathrm{R}^2}{2}$	$\nearrow$	$\pi\mathrm{R}^2$

b) La fonction A est décroissante sur $[0,\mathrm{R}]$. Donc, pour tout réel x de $[0,\mathrm{R}]$, $\mathrm{A}(\mathrm{R})\leqslant\mathrm{A}(x)\leqslant\mathrm{A}(0)$ ou encore $\dfrac{\pi\mathrm{R}^2}{2}\leqslant\mathrm{A}(x)\leqslant\pi\mathrm{R}^2$.

La fonction A est croissante sur $[\mathrm{R},2\mathrm{R}]$. Donc, pour tout réel x de $[\mathrm{R},2\mathrm{R}]$, $\mathrm{A}(\mathrm{R})\leqslant\mathrm{A}(x)\leqslant\mathrm{A}(2\mathrm{R})$ ou encore $\dfrac{\pi\mathrm{R}^2}{2}\leqslant\mathrm{A}(x)\leqslant\pi\mathrm{R}^2$.

Ainsi, pour tout réel x de $[0,2\mathrm{R}]$, $\dfrac{\pi\mathrm{R}^2}{2}\leqslant\mathrm{A}(x)\leqslant\pi\mathrm{R}^2$.

L'aire minimum est $\dfrac{\pi\mathrm{R}^2}{2}$, obtenue pour $x=\mathrm{R}$, ce qui correspond au cas où les deux demis-disques ont le même rayon.

L'aire maximum est $\pi\mathrm{R}^2$, obtenue pour $x=0$ ou $x=\mathrm{R}$, ce qui correspond au cas où l'un des deux demis-disques occupe la totalité du grand demi-disque.

■