Planche n° 10. Généralités sur les fonctions. Corrigé

Exercice n° 1

1) f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout réel x

$$f_1(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 1 = 3x^4 - 5x^2 + 1 = f_1(x).$$

La fonction f_1 est paire.

2) f_2 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$f_2(-x) = \frac{(-x)^5 - (-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^5 - x}{x^2 - 1} = -f_2(x).$$

La fonction f_2 est impaire.

3) $f_3(-1)$ existe mais $f_3(1)$ n'existe pas. Le domaine de définition de la fontion f_3 n'est pas symétrique par rapport à 0 et donc, la fonction f_3 n'est ni paire, ni impaire.

4) Pour tout réel x, $e^x + 1 > 1$, en particulier pour tout réel x, $e^x + 1 \neq 0$. f_4 est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$

$$f_4(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\dfrac{1}{e^x} - 1}{\dfrac{1}{e^x} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f_4(x).$$

La fonction f_4 est impaire.

5) f_2 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$

$$f_5(-x) = \cos(-2x) + \tan^2(-x) = \cos(2x) + \tan^2(x) = f_5(x).$$

La fonction f_5 est paire.

6) f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$

$$f_6(-x) = \sin(-x) - (-x) = -(\sin(x) - x) = -f_6(x).$$

La fonction f_6 est impaire.

7) Pour tout réel x, $x^2 + 1 \geqslant 0$. Donc f_7 est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$

$$f_7(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f_7(x).$$

La fonction f_7 est paire.

8) On ne peut pas déterminer le domaine de définition de la fonction f_8. Mais comme $(-x)^6 - (-x)^4 - 31(-x)^2 + 3 = x^6 - x^4 - 31x^2 + 3$, pour tout réel x, $f_8(-x)$ existe si et seulement si $f_8(x)$ existe. Donc f_8 est définie sur un domaine D qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de D

$$f_8(-x) = \frac{-x}{(-x)^6 - (-x)^4 - 31(-x)^2 + 3} = -\frac{x}{x^6 - x^4 - 31x^2 + 3} = -f_8(x).$$

La fonction f_8 est impaire.

9) $f_9(0) = 1 \neq 0$ et donc f_9 n'est pas impaire. $f_9\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 1 = f_9\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Donc, f_9 n'est pas paire.
La fonction f_9 n'est ni paire, ni impaire.

Exercice n° 2

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Unicité. Supposons qu'il existe deux fonctions g et h telles que g est paire, h est impaire et $f = g + h$. Nécessairement pour tout réel x,

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{array}\right. .$$

En additionnant et en retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient pour tout réel x

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Ceci montre l'unicité d'un couple (g, h) tel que g est paire, h est impaire et $f = g + h$.

Existence. Réciproquement, posons pour tout réel x

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

- Pour tout réel x, $g(x) + h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x)$ et donc $f = g + h$.
- Pour tout réel x, $g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = g(x)$ et donc la fonction g est paire.
- Pour tout réel x, $h(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -h(x)$ et donc la fonction h est impaire.

Ainsi, les fonctions g et h conviennent ce qui montre l'existence d'un couple (g, h) tel que g est paire, h est impaire et $f = g + h$.

Exercice n° 3

Soit n un entier naturel. Supposons que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, posons $g(x) = f(-x)$. Alors g est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g^{(n)}(-x) = (-1)^n f^{(n)}(-x).$$

Si de plus f est paire, alors $g = f$ et donc pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$ ou encore

$$\text{pour tout réel } x,\ f^{(n)}(-x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Si n est un entier pair, posons $n = 2p$ où p est un entier. L'égalité précédente s'écrit

$$\text{pour tout réel } x,\ f^{(2p)}(-x) = f^{(2p)}(x)$$

et donc $f^{(2p)}$ est paire. Ainsi, les fonctions f, f'', $f^{(4)}$, $f^{(6)}$ ... sont paires.

Si n est un entier impair, posons $n = 2p + 1$ où p est un entier. L'égalité précédente s'écrit

$$\text{pour tout réel } x,\ f^{(2p+1)}(-x) = -f^{(2p+1)}(x)$$

et donc $f^{(2p+1)}$ est impaire. Ainsi, les fonctions f', $f^{(3)}$, $f^{(5)}$ ... sont impaires. On résume ces résultats en disant que

$$\text{si } f \text{ est paire, } f^{(n)} \text{ a la parité de } n.$$

Si f est impaire, alors f' est paire et on peut lui appliquer les résultats précédents. Donc,

$$\text{si } f \text{ est impaire, } f^{(n)} \text{ a la parité contraire de celle de } n.$$

Une primitive de fonction impaire est automatiquement une fonction paire. Démontrons-le.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire. Soit F une primitive de f. Pour tout réel x, posons $G(x) = F(x) - F(-x)$. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$G'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0.$$

Donc, la fonction G est constante sur $\mathbb{R}$ puis, pour tout réel x,

$$G(x) = G(0) = F(0) - F(0) = 0.$$

On en déduit que pour tout réel x, $F(-x) = F(x)$ et donc que F est paire.

Le résultat analogue est faux si on suppose que f est paire car une fonction constante est paire. Voici une succession de primitives pour exemple :

$$x \mapsto 1, \quad x \mapsto x + 4, \quad x \mapsto \frac{x^2}{2} + 4x - 5, \quad x \mapsto \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \ \ldots$$

Exercice n° 4

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à $\frac{3}{2}$. De plus, pour tout réel x,

$$f(3-x) = (3-x)^2 - 3(3-x) + 2 = x^2 - 3x + 2 = f(x).$$

Donc, la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie du graphe dans un repère orthonormé de la fonction f.

2) La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ qui est symétrique par rapport à 1. De plus, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f(2x_I - x) + f(x) = \frac{2(2-x)+1}{(2-x)-1} + \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-5}{x-1} + \frac{2x+1}{x-1} = \frac{4x-4}{x-1} = \frac{4(x-1)}{x-1} = 4 = 2y_I.$$

Donc, le point I de coordonnées $(1,2)$ est centre de symétrie du graphe de la fonction f.

3) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout réel x,

$$f(2x_I - x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} + \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1} + \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} + \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1 = 2y_I.$$

Donc, le point I de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie du graphe de la fonction f.

4) • La fonction f est paire et donc l'axe des ordonnées est un axe de symétrie du graphe de f. Plus généralement, pour tout entier relatif k et pour tout réel x,

$$f(2k\pi - x) = \cos(2k\pi - x) + \cos(6k\pi - 3x) = \cos(-x) + \cos(-3x) = \cos(x) + \cos(3x) = f(x).$$

On en déduit que pour tout entier relatif k, la droite d'équation $x = k\pi$ est un axe de symétrie du graphe de f.

• Pour tout réel x,

$$f(\pi - x) = \cos(\pi - x) + \cos(3\pi - 3x) = \cos(\pi - x) + \cos(\pi - 3x) = -\cos(x) - \cos(3x) = -f(x),$$

et donc pour tout réel x, $f(\pi - x) + f(x) = 0$. On en déduit que le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie du graphe de f. Plus généralement, pour tout entier relatif k, le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right)$ est un centre de symétrie du graphe de f.

Exercice n° 5

Chacune des fonctions considérées est définie sur $\mathbb{R}$.

1) Pour tout réel x, $f_1(x+1) = \lfloor x+1 \rfloor - (x+1) = E(x) + 1 - x - 1 = \lfloor x \rfloor - x = f_1(x)$ et donc la fonction f_1 est 1-périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif k, f_1 est k-périodique.

2) Pour tout réel x, $f_2\left(x + \frac{1}{2}\right) = \lfloor 2x+1 \rfloor - (2x+1) = \lfloor 2x \rfloor - 2x = f_2(x)$ et donc la fonction f_2 est $\frac{1}{2}$-périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif k, f_2 est $\frac{k}{2}$-périodique.

3) Pour tout réel x, $f_3(x+\pi) = \cos(2x+2\pi) - \sin(4x+4\pi) = \cos(2x) - \sin(4x) = f_3(x)$ et donc la fonction f_3 est π-périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif k, f_3 est $k\pi$-périodique.

4) Pour tout réel x, $f_4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(4x+2\pi) = \cos(4x) = f_4(x)$ et donc la fonction f_4 est $\frac{\pi}{2}$-périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif k, f_4 est $\frac{k\pi}{2}$-périodique.

5) Pour tout réel x, $f_5\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3x}{2} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = f_5(x)$ et donc la fonction f_5 est $\frac{4\pi}{3}$-périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif k, f_5 est $\frac{4k\pi}{3}$-périodique.

6) Pour tout réel x, $f_6(x+3\pi) = \cos\left(\frac{2x}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2x}{3}\right) = f_6(x)$ et donc la fonction f_6 est 3π-périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif k, f_6 est $3k\pi$-périodique.

Exercice n° 6

Pour tout réel x, $x^2+1>1$ et en particulier, pour tout réel x, $x^2+1\neq 0$. Donc, les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$.

1) Pour tout réel x,

$$0\leqslant \frac{x^2}{x^2+1}\leqslant \frac{x^2+1}{x^2+1}=1.$$

Donc, pour tout réel x, $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. La fonction $f\ :\ x\mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout réel x,

$$(|x|-1)^2\geqslant 0\Rightarrow x^2-2|x|+1\geqslant 0\Rightarrow x^2+1\geqslant 2|x|\Rightarrow \frac{1}{2}\geqslant \frac{|x|}{x^2+1}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{x}{x^2+1}\right|\leqslant \frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant \frac{1}{2}.$$

Donc, pour tout réel x, $-\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{1}{2}$. La fonction $f\ :\ x\mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 7

1) Pour tout réel x, $f(x)=k(h(g(x)))$ où $g\ :\ x\mapsto x+1$, $h\ :\ y\mapsto y^2$ et $k\ :\ z\mapsto -z+1$.
La fonction g est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$, la fonction h est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $f=k\circ h\circ g$ est strictement décroissante sur $[-1,+\infty[$.

La fonction g est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ à valeurs dans $]-\infty,0]$, la fonction h est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $f=k\circ h\circ g$ est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$.

2) Pour tout réel x, $f(x)=k(h(g(x)))$ où $g\ :\ x\mapsto 2x+1$, $h\ :\ y\mapsto \dfrac{1}{y}$ et $k\ :\ z\mapsto 3-5z$.

La fonction g est strictement croissante sur $\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[$ à valeurs dans $]-\infty,0[$, la fonction h est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $f=k\circ h\circ g$ est strictement croissante sur $\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[$.

3) La fonction $x\mapsto 1+e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction $X\mapsto \ln X$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Donc, $x\mapsto \ln(1+e^x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) La fonction $x\mapsto \exp\left(1-\dfrac{1}{\ln^2|x|+1}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire.

La fonction $x\mapsto \ln x$ est croissante et négative sur $]0,1]$. Donc, la fonction $x\mapsto 1+\ln^2 x$ est décroissante et strictement positive sur $]0,1]$. Par suite, la fonction $x\mapsto 1-\dfrac{1}{\ln^2 x+1}$ est décroissante sur $]0,1]$ et enfin, la fonction $x\mapsto \exp\left(1-\dfrac{1}{\ln^2|x|+1}\right)$ est décroissante sur $]0,1]$. De même, la fonction $x\mapsto \exp\left(1-\dfrac{1}{\ln^2|x|+1}\right)$ est croissante sur $[1,+\infty[$. Par parité, la fonction $x\mapsto \exp\left(1-\dfrac{1}{\ln^2|x|+1}\right)$ est décroissante sur $]-\infty,-1]$ et croissante sur $[-1,0[$.

5) Soient x et x' deux réels tels que $x\leqslant x'$. Alors, pour tout réel t de l'intervalle $[x,x']$, $\dfrac{1}{1+t^2}\geqslant 0$ et donc, $f_5(x')-f_5(x)=\displaystyle\int_x^{x'}\frac{1}{1+t^2}\,dt\geqslant 0$ (par positivité de l'intégrale et car $x'\geqslant x$). f_5 est croissante sur $\mathbb{R}$.

6) Soient x et x' deux réels tels que $x\leqslant x'$. Alors, pour tout réel t de l'intervalle $[0,1]$, on a $xt\leqslant x't$, puis pour tout réel t de $[0,1]$, $e^{xt}\leqslant e^{x't}$. Par croissance de l'intégrale, on a alors $f_6(x)\leqslant f_6(x')$. f_6 est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 8

1) La fonction $x\mapsto \sin x$ est strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$. La fonction $x\mapsto \cos x$ est strictement décroissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et donc la fonction $x\mapsto -\cos x$ est strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$. f_1 est strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

2) Les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont croissantes et positives sur $[1, +\infty[$. Donc, f_2 est croissante sur $[1, +\infty[$ en tant que produit de fonctions croissantes et positives sur $[1, +\infty[$.

3) f_3 est paire. $x \mapsto \dfrac{\pi}{2(x^2+1)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et la fonction $X \mapsto \cos X$ est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc, la fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{2(x^2+1)}\right)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et de plus positive sur $\mathbb{R}^+$. f_3 est croissante sur $\mathbb{R}^+$ en tant que produit de fonctions croissantes et positives sur $\mathbb{R}^+$. Par parité, f_3 est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 1 \times (3) = -5 < 0$. Donc, f_4 est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

5) f_5 est paire. La fonction $x \mapsto x^4$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Puisque $1 \times 1 - 1 \times (-1) = 2 > 0$, la fonction $X \mapsto \dfrac{X-1}{X+1}$ est croissante sur $]-1, +\infty[$ et en particulier sur $\mathbb{R}^+$. f_5 est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Par parité, f_5 est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

6) Les fonctions $x \mapsto -x^7$ et $x \mapsto x^4 + x^2 + 3$ sont strictement décroissantes sur $]-\infty, 0]$. Donc, f_6 est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ en tant que somme de fonctions strictement décroissantes sur $]-\infty, 0]$.

Exercice n° 9

1) Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $3 \leqslant 2x + 1 \leqslant 5$ et $0 < 7 \leqslant 4x + 3 \leqslant 11$. Par suite, $0 < 3 \leqslant 2x + 1 \leqslant 5$ et $0 < \dfrac{1}{11} \leqslant \dfrac{1}{4x+3} \leqslant \dfrac{1}{7}$, puis $\dfrac{3}{11} \leqslant \dfrac{2x+1}{4x+3} \leqslant \dfrac{5}{7}$.

2) $\dfrac{2x+1}{4x+3} = \dfrac{3}{11} \Leftrightarrow 11(2x+1) = 3(4x+3) \Leftrightarrow 10x = -2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{5}$. La solution obtenue n'est pas dans l'intervalle $[1, 2]$, ou encore l'équation $\dfrac{2x+1}{4x+3} = \dfrac{3}{11}$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[1, 2]$. Ceci signifie que l'encadrement fourni au 1) est trop large et peut donc sûrement être amélioré.

3) Puisque $2 \times 3 - 1 \times 4 = 2 > 0$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{4x+3}$ est croissante sur $[1, 2]$. Par suite, si $x \in [1, 2]$,

$$\frac{3}{7} = f(1) \leqslant \frac{2x+1}{4x+3} = f(x) \leqslant f(2) = \frac{5}{11}.$$

Exercice n° 10

1) f_1 est décroissante sur $[-1, 0]$ et croissante sur $[0, 2]$. f_1 admet donc un minimum égal à $f_1(0) = 0$ et un maximum égal à $\text{Max}\{f_1(-1), f_1(2)\} = 4$. Pour $x \in [-1, 2]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$.

2) Pour $x \in [0, 4]$, $x^2 - 3x + 2 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$. Donc, pour $x \in [0, 4]$, $= -\dfrac{1}{4} = f_2\left(\dfrac{3}{2}\right) \leqslant f_2(x) \leqslant f_2(4) = 6$.

3) f_3 est décroissante sur $[-2, -1]$. Donc, pour $x \in [-2, -1]$, $f_2(-1) \leqslant f_2(x) \leqslant f_2(-2)$, ou encore $-1 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

4) f_4 est paire, décroissante sur $]0, 1]$. f_4 n'est pas majorée sur $]0, 1]$ et admet un minimum égal à $f_4(1) = 1$.
Pour $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 1$.

5) f_5 est décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$. Pour $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$, $-1 = \cos\pi \leqslant \cos x \leqslant \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6) f_6 est dérivable sur $[0, 4]$ (car $-\dfrac{2}{13} \notin [0, 4]$) et pour $x \in [0, 4]$, $f_6'(x) = \dfrac{5 \times 2 - 13 \times 1}{(13x+2)^2} = -\dfrac{3}{(13x+2)^2} < 0$. f_6 est donc décroissante sur $[0, 4]$ et pour $x \in [0, 4]$, $\dfrac{7}{18} = f_6(4) \leqslant f_6(x) = \dfrac{5x+1}{13x+2} \leqslant f_6(0) = \dfrac{1}{2}$.

7) Pour $x \neq \dfrac{9}{2}$, posons $f_7(x) = \dfrac{2x+3}{2x-9}$. Puisque $2 \times (-9) - 3 \times 2 < 0$, f_7 est décroissante sur $\left[0, \dfrac{9}{2}\right[$ et aussi sur $\left]\dfrac{9}{2}, +\infty\right[$.
Par suite, pour $n \geqslant 5$, $1 = \lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{2p+3}{2p-9} \leqslant \dfrac{2n+3}{2n-9} = f_7(n) \leqslant \dfrac{2 \times 5 + 3}{2 \times 5 - 9} = 13$ et pour $0 \leqslant n \leqslant 4$,
$-11 = \dfrac{2 \times 4 + 3}{2 \times 4 - 9} \leqslant \dfrac{2n+3}{2n-9} \leqslant \dfrac{2 \times 0 + 3}{2 \times 0 - 9} = -\dfrac{1}{3}$. La plus petite valeur de $\dfrac{2n+3}{2n-9}$ est -11 (obtenue pour $n = 4$) et la plus grande valeur de $\dfrac{2n+3}{2n-9}$ est 13 (obtenue pour $n = 5$).

8) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{4n+1}{3n+7} = \dfrac{\frac{4}{3}(3n+7) - \frac{28}{3} + 1}{3n+7} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{25}{9\left(n + \frac{7}{3}\right)}$. La suite $\left(\dfrac{4n+1}{3n+7}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante. On en déduit que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{7} = u_0 \leqslant \dfrac{4n+1}{3n+7} < \lim\limits_{p \to +\infty} u_p = \dfrac{4}{3}$.

Exercice n° 11

1) Soit $x \in [1, 3]$. $(2x^2 - 5x + 3) - (3x - 3) = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x-1)(x-3) \leqslant 0$. Donc, pour $x \in [1, 3]$, $2x^2 - 5x + 3 \leqslant 3x - 3$.

2) Pour $x \geqslant 1$, $\dfrac{2x^2 - 7x + 1}{x+3} \leqslant \dfrac{2x^2 + 7x + 1}{x+3} \leqslant \dfrac{2x^2 + 7x^2 + x^2}{x} = 10x$.

3) Pour tout réel x, $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ et donc $\sqrt{x^2 - x + 1}$ existe pour tout réel x. De plus, pour tout réel x, $\sqrt{x^2 - x + 1} > 0$.

Pour $x \leqslant 0$, $\sqrt{x^2 - x + 1} - x > 0$ et donc $\sqrt{x^2 - x + 1} + x$ a le même signe que

$$\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x\right)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right) = -x + 1 \geqslant 0.$$

Ainsi, pour tout réel $x \leqslant 0$, $\sqrt{x^2 - x + 1} + x \geqslant 0$ et donc pour tout réel $x \leqslant 0$, $\sqrt{x^2 - x + 1} \geqslant -x$.

Exercice n° 12

Pour tout réel x, $x^2 + 1 \geqslant 0$ et donc, pour tout réel x, $\sqrt{x^2 + 1}$ existe. Ensuite, pour tout réel x,

$$\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|.$$

Par suite, pour tout réel x, $\sqrt{x^2 + 1} > |x| \geqslant x$ et donc $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$ et aussi, pour tout réel x, $\sqrt{x^2 + 1} > |x| \geqslant -x$ et donc $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$.

Exercice n° 13

1) Pour $x \geqslant 0$, posons $f(x) = \sin x - x$. f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$, on a $f'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$. f est donc décroissante sur $[0, +\infty[$. Mais $f(0) = 0$ et donc, f est négative sur $[0, +\infty[$ ce qui démontre l'inégalité de l'énoncé.

Commentaire. La démonstration précédente ne tient pas debout car la formule $(\sin)' = \cos$ a été établie en sachant que pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(x) \leqslant x$. Néanmoins, c'est ce qui est attendu dans la pratique (et il se trouve qu'on est capable de démontrer que $(\sin)' = \cos$ sans utiliser l'inégalité $\sin(x) \leqslant x$).

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = e^x - 1 - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^x - 1$. f' est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$. f admet donc un minimum en 0 égal à $f(0) = 0$. f est négative sur $\mathbb{R}$ ce qui démontre l'inégalité de l'énoncé.

3) Pour $x > -1$, posons $f(x) = \ln(1+x) - x$. f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour $x > -1$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x}$. f' est positive sur $]-1, 0]$ et négative sur $\mathbb{R}^+$. f admet donc un maximum en 0 égal à $f(0) = 0$.
On en déduit que f est négative sur $]-1, +\infty[$ ce qui démontre l'inégalité de l'énoncé.

