Planche n° 10. Familles sommables. Corrigé

Exercice n° 1

Pour tout réel x,

$$e^{e^x}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{e^{px}}{p!}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(px)^n}{n!}\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p^n}{n!p!}x^n\right).$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, posons $u_{n,p}=\dfrac{p^n}{n!p!}x^n$.

- Pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|u_{n,p}|=\frac{p^n}{n!p!}|x|^n=\frac{e^{p|x|}}{p!}<+\infty$.
- $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_{n,p}|\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{e^{p|x|}}{p!}=e^{e^{|x|}}<+\infty$.

La famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est donc sommable et d'après le théorème de FUBINI,

$$\begin{aligned}e^{e^x}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{n,p}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{p^n}{n!p!}x^n\right)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{p^n}{p!}\right)x^n.\end{aligned}$$

Donc, si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{p^n}{p!}$, alors pour tout réel x, $e^{e^x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

Exercice n° 2

Posons $I=\left\{(n,p)\in\mathbb{N}^2/\ p\geqslant n+1\right\}$ puis pour $(n,p)\in I$, posons $u_{n,p}=\dfrac{1}{p!}$. Puisque la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est positive, que cette famille soit sommable ou pas, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p!}\right)&=\sum_{(n,p)\in I}u_{n,p}=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{p-1}\frac{1}{p!}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{p}{p!}\\&=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(p-1)!}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}=e<+\infty.\end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p!}\right)=e$.

Exercice n° 3 Soit $x\in]-1,1[$.

1) Pour $(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2$, posons $u_{n,p}=x^{kl}$.

- Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{l=1}^{+\infty}|u_{k,l}|=\sum_{l=1}^{+\infty}\left(|x|^k\right)^l=\frac{|x|^k}{1-|x|^k}<+\infty$.
- Puisque $\dfrac{|x|^k}{1-|x|^k}\underset{k\to+\infty}{\sim}|x|^k$ et que la série géométrique de terme général $|x|^k$ converge. Il en est de même de la série de terme général $\dfrac{|x|^k}{1-|x|^k}$.

Mais alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{l=1}^{+\infty}|u_{k,l}|\right)<+\infty$. Ceci montre que la famille $\left(x^{k,l}\right)_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

2) On peut donc écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{1-x^p}=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^{kp}\right)=\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}u_{k,l}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $A_n=\left\{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2\ /\ kl=n\right\}$. Tout couple $(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2$ est dans un et un seul des A_n à savoir A_{kl}. De plus, aucun des A_n, $n\in\mathbb{N}^*$ n'est vide car A_n contient $(1,n)$. La famille de parties $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$.

Ensuite, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le nombre de couples $(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tels que $k\times l=n$ est encore le nombre d'entiers naturels non nuls k tels que k divise n. Donc, $\text{card}\,(A_n)=d(n)$

D'après le théorème de sommation par paquets,

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{1-x^p}&=\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}u_{k,l}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,l)\in A_n}x^{kl}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,l)\in A_n}1\right)x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\text{card}\,(A_n)\,x^n\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)x^n.\end{aligned}$$

Exercice n° 4 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

Pour $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$, posons $u_{p,q}=\dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}$. Soit $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$. $p^2+q^2\leqslant p^2+2pq+q^2=(p+q)^2$ et donc $\dfrac{1}{(p+q)^2}\leqslant\dfrac{1}{p^2+q^2}$. D'autre part, puisque $0\leqslant(p-q)^2=p^2+q^2-2pq$, on a encore $2pq\leqslant p^2+q^2$ puis

$$\frac{1}{p^2+q^2}=\frac{2}{2p^2+2q^2}=\frac{2}{p^2+p^2+q^2+q^2}\leqslant\frac{2}{p^2+2pq+q^2}=\frac{2}{(p+q)^2}.$$

On en déduit que pour tout $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$,

$$\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}}\leqslant\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\leqslant\frac{2^\alpha}{(p+q)^{2\alpha}}.$$

La sommabilité de la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est donc équivalente à la sommebilité de la famille $(v_{p,q})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}=\left(\dfrac{1}{(p+q)^{2\alpha}}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Pour $n\geqslant2$, posons $A_n=\left\{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\ /\ p+q=n\right\}$. La famille $(A_n)_{n\geqslant2}$ est une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$ et la famille $(v_{p,q})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est positive. D'après le théorème de sommation par paquets, la sommabilité de la famille $(v_{p,q})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ équivaut à la convergence de la série série de terme général $a_n=\displaystyle\sum_{(p,q)\in A_n}\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}}$ $n\geqslant2$.

Pour $n\geqslant2$, $a_n=\displaystyle\sum_{(p,q)\in A_n}\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}}=\sum_{(p,q)\in A_n}\frac{1}{n^{2\alpha}}=\frac{\text{card}\,(A_n)}{n^{é\alpha}}=\frac{n-1}{n^{2\alpha}}$. Or,

$$a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{n^{2\alpha}}=\frac{1}{n^{2\alpha-1}}>0.$$

Mais alors, la série de terme général a_n, $n\geqslant2$, converge si et seulement si $2\alpha-1>1$ ce qui équivaut à $\alpha>1$. On a montré que la famille $\left(\dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $\alpha>1$

Exercice n° 5 Soit z un nombre complexe tel que $|z|<1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|z^{(2^{n+1})}\right|=|z|^{(2^{n+1})}<1$ et donc

$$\frac{z^{(2^n)}}{1-z^{(2^{n+1})}}=z^{(2^n)}=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(z^{(2^{n+1})}\right)^p=\sum_{p=0}^{+\infty}z^{((2p+1)2^n)}.$$

Pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, posons $u_{n,p}=z^{((2p+1)2^n)}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| = \sum_{p=0}^{+\infty} |z|^{((2p+1)2^n)} = \frac{|z|^{(2^n)}}{1-|z|^{(2^{n+1})}} < +\infty$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{(2^n)}}{1-|z|^{(2^{n+1})}} < +\infty$ car $\displaystyle\frac{|z|^{(2^n)}}{1-|z|^{(2^{n+1})}} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^{(2^n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(|z|^n\right)$.

On en déduit que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Maintenant, tout entier naturel non nul s'écrit de manière unique sous la forme $k = 2^n(2p+1)$ où $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. Donc, si pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_k = \left\{(n,p) \in \mathbb{N}^2 / \ 2^n(2p+1) = k\right\}$, la famille $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$. D'après le théorème de sommation par paquets,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{(2^n)}}{1-z^{(2^{n+1})}} &= \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} z^{((2p+1)2^n)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{(n,p)\in A_k} z^{((2p+1)2^n)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} z^k = \frac{z}{1-z}.\end{aligned}$$

Exercice n° 6

1) Soit $\alpha > 1$. La série de terme général $\dfrac{1}{k^\alpha}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n existe dans $\mathbb{R}$ (reste à l'ordre n d'une série convergente). De plus, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) &= \frac{1}{(\alpha-1)^{\alpha-1}}\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)^{1-\alpha} - 1\right) \\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)^{\alpha-1}}\left(-\frac{1-\alpha}{k}\right) = \frac{1}{k^\alpha} > 0.\end{aligned}$$

D'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\begin{aligned}R_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1}\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

Mais alors, la série de terme général R_n, $n \in \mathbb{N}$, converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ ou encore $\alpha > 2$.

2) Soit $\alpha > 2$. Donc, la série de terme général R_n, $n \in \mathbb{N}$, converge. Posons $A = \left\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 / \ 0 \leqslant n < k\right\}$. Puisque la série de terme général R_n converge et la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in A} = \left(\dfrac{1}{k^\alpha}\right)_{(n,k)\in A}$ est positive, cette famille est sommable et le théorème de sommation par paquets permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} R_n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k>n}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{k^\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}} = \zeta(\alpha-1).\end{aligned}$$

Exercice n° 7

Tout d'abord, sans préjuger de l'existence, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n(\zeta(n)-1) = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{k^n}$. Pour k et n entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, posons donc $u_{k,n} = \dfrac{(-1)^n}{k^n}$.

- Pour tout $k \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}|u_{k,n}| = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{k^n} = \frac{1}{k^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \frac{1}{k(k-1)} < +\infty$,

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}|u_{k,n}| = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 1 < +\infty \text{ (série télescopique).}$$

Donc, la famille $(u_{k,n})_{k\geqslant 2,\ n\geqslant 2}$ est sommable. En particulier, la série de terme général $(-1)^n(\zeta(n)-1)$, $n \geqslant 2$, converge absolument et donc converge. D'après le théorème de sommation par paquets,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n(\zeta(n)-1) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{k^n} = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{k}\right)^n = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\times\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{k}\right)}\\ &= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \frac{1}{2} \text{ (série télescopique).}\end{aligned}$$