Planche n° 10. Familles sommables

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (**)

Déterminer une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout réel x, $e^{e^x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice n° 2 (**)

Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p!}\right)$.

Exercice n° 3 (* I)** (d'après CCINP 2019 MP Math 1)

Soit $x \in]-1,1[$.

1) Montrer que la famille $\left(x^{k,l}\right)_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{1-x^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$ où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

Exercice n° 4 (***)

Etudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{(p^2+q^2)^{\alpha}}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice n° 5 (***)

Montrer que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{(2^n)}}{1-z^{(2^{n+1})}} = \frac{z}{1-z}$.

Exercice n° 6 (***)

1) Soit α un réel strictement supérieur à 1. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$. Déterminer un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$. Pour quelles valeurs de α la série de terme général R_n est-elle convergente ?

2) Montrer que pour tout $\alpha > 2$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^{\alpha-1}}(=\zeta(\alpha-1))$.

Exercice n° 7 (***)

Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}$. Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n(\zeta(n)-1)$.