Planche n$^{\text{o}}$ 9. Séries numériques. Corrigé

Exercice n$^{\text{o}}$ 1

1) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$. Pour $n \geqslant 1$, $n^2+n-1 \geqslant 1$ puis $\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1} > 0$ et donc, u_n existe.

1ère solution.

$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, converge (série de Riemann d'exposant $\alpha > 1$), la série de terme général u_n converge absolument et donc converge.

2ème solution. Puisque $\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$,

$$u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} - 1 = \frac{2}{n^2+n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2} > 0.$$

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, converge (série de Riemann d'exposant $\alpha > 1$), la série de terme général u_n converge.

2) Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$. Pour $n \geqslant 2$, $n+(-1)^n\sqrt{n} \geqslant n-\sqrt{n} > 0$ et donc u_n existe et est strictement positif. De plus, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 2$, diverge, la série de terme général u_n diverge.

3) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$. Pour $n \geqslant 1$, $u_n > 0$ et

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right) = \ln(n)\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)\left(-\ln 2 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(2)\ln(n) + o(1).\end{aligned}$$

Donc $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-\ln(2)\ln(n)+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln 2 \ln n} = \dfrac{1}{n^{\ln 2}}$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\ln 2}}$, $n \geqslant 1$, diverge (série de Riemann d'exposant $\alpha = \ln(2) \leqslant 1$), la série de terme général u_n diverge.

4) Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$. u_n existe pour $n \geqslant 2$. $\ln(\operatorname{ch} n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{e^n}{2}\right) = n - \ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)} > 0$.

Vérifions alors que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$, $n \geqslant 2$, diverge. La fonction $x \to x\ln x$ est continue, croissante et strictement positive sur $]1,+\infty[$ (produit de deux fonctions strictement positives et croissantes sur $]1,+\infty[$). Donc, la fonction $x \to \dfrac{1}{x\ln x}$ est continue et décroissante sur $]1,+\infty[$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k\ln k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

Par suite, pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Donc, la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$ est divergente. Ainsi, u_n est positif et équivalent au terme général d'une série divergente. La série de terme général u_n diverge.

5) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \operatorname{Arccos}\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n^2}}$. u_n existe pour $n \geqslant 1$. De plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(u_n) = \sin\left(\text{Arccos}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right) = \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2/3}} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{1-1+\frac{2}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3}}\times\frac{1}{n} > 0$$

La série de terme général $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\frac{1}{n}$ est divergente. Donc, la série de terme général u_n diverge.

6) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$. u_n existe et $u_n \neq 0$ pour $n \geqslant 1$.

1ère solution.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2}\times\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n converge.

2ème solution. Pour $n \geqslant 3$,

$$\frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{(n-1)(n-2)+3(n-1)+1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-3)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

est le terme général d'une série numérique convergente.

7) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$. u_n est défini pour $n \geqslant 1$ car pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \in]0,1] \subset \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Ensuite

$$\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puis $n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n = e^{n\ln(\cos(1/\sqrt{n}))} - \frac{1}{\sqrt{e}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{e}}\left(e^{-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n\sqrt{e}} < 0.$$

La série de terme général $-\frac{1}{12n\sqrt{e}}$ est divergente et donc la série de terme général u_n diverge.

8)

$$\ln\left(\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right) = \ln\left(1-\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n\pi} < 0.$$

Donc, la série de terme général u_n diverge.

9) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$.

Pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et positive et donc, u_n existe et est positif. De plus, pour $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi/2}\frac{1}{n^2+0}\,dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

La série de terme général $\dfrac{\pi}{2n^2}$ converge et donc la série de terme général u_n converge.

10) $-\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)=-\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}-1+O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ puis

$$-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n\underset{n\to+\infty}{=}-\ln(n)+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}-\ln(n)+o(1).$$

Par suite,

$$0<u_n=e^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n}\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-\ln n}=\frac{1}{n}.$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

11) $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}1-\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n=e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{=}e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{=}e\left(1-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e}{2n}>0.$$

La série de terme général $\dfrac{e}{2n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

12)

$$\begin{aligned}1-n\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)&=1-n\left(\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}1-n\left(\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}1-n\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge, la série de terme général u_n converge absolument et donc converge.

Exercice n° 2

1) Puisque $\sqrt[4]{n^4+2n^2}\underset{n\to+\infty}{}n$, si P n'est pas unitaire de degré 3, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Soit P un polynôme unitaire de degré 3. Posons $P=X^3+aX^2+bX+c$.

$$\begin{aligned}u_n&=n\left(\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{1/4}-\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)^{1/3}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}n\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\left(1+\frac{a}{3n}+\frac{b}{3n^2}-\frac{a^2}{9n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}-\frac{a}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}+\frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

- Si $a\neq 0$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.
- Si $a=0$ et $\dfrac{1}{2}-\dfrac{b}{3}\neq 0$, $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b}{3}\right)\dfrac{1}{n}$. u_n est donc de signe constant pour n grand et est équivalent au terme général d'une série divergente. Donc la série de terme général u_n diverge.
- Si $a=0$ et $\dfrac{1}{2}-\dfrac{b}{3}=0$, $u_n\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Dans ce cas, la série de terme général u_n converge (absolument).

En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a=0$ et $b=\dfrac{3}{2}$ ou encore la série de terme général u_n converge si et seulement si P est de la forme $X^3+\dfrac{3}{2}X+c$, $c\in\mathbb{R}$.

2) Pour $n\geqslant 2$, posons $u_n=\dfrac{1}{n^\alpha}S(n)$. Pour $n\geqslant 2$,

$$0 < S(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2} S(n)$$

et donc $\forall n \geqslant 2$, $S(n) \leqslant \dfrac{S(2)}{2^{n-2}}$. Par suite,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \frac{S(2)}{2^{n-2}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout réel α, la série de terme général u_n converge.

3) Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Par suite, $\forall n \geqslant 2$, $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ puis que $u_n = \dfrac{1}{n} e^{-u_{n-1}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} > 0$. La série de terme général u_n diverge.

4) On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Notons $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante d'entiers et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{p_n} = 0$.

Par suite, $0 < \dfrac{1}{p_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln\left(\left(1 - \dfrac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ et les séries de termes généraux $\dfrac{1}{p_n}$ et $\ln\left(\left(1 - \dfrac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ sont de même nature.

Il reste donc à étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\left(1 - \dfrac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$.

Montrons que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right) \geqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right)$.

Soit $n \geqslant 1$. Alors $\dfrac{1}{p_n} < 1$ et la série de terme général $\dfrac{1}{p_n^k}$, $k \in \mathbb{N}$, est une série géométrique convergente de somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} = \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$.

Soit alors N un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à N.

Tout entier entre 1 et N s'écrit de manière unique $p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$ où $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i = \left\lfloor \dfrac{\ln(N)}{\ln(p_i)} \right\rfloor$ et deux entiers distincts ont des décompositions distinctes. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) \ (\text{car } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} > 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^i}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i}\right)\right) = \ln\left(\sum_{0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1, \ldots, \ldots 0 \leqslant \beta_n \leqslant \alpha_n} \frac{1}{p_1^{\beta_1} \ldots,\ p_n^{\beta_n}}\right) \\
&\geqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{N \to +\infty} \ln\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right) = +\infty$ et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) = +\infty$.

La série de terme général $\ln\left(1 - \dfrac{1}{p_k}\right)^{-1}$ diverge et il en est de même de la série de terme général $\dfrac{1}{p_n}$.
(Ceci montre qu'il y a beaucoup de nombres premiers et en tout cas beaucoup plus de nombres premiers que de carrés parfaits par exemple).

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $n = a_p \times 10^p + \ldots + a_1 \times 10 + a_0$ où $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i \in [\![0, 9]\!]$ et $a_p \neq 0$. Alors $c(n) = p + 1$.
Déterminons p est en fonction de n. On a $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ et donc $p = \lfloor \log(n) \rfloor$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n(\lfloor \log n \rfloor + 1)^\alpha}.$$

Par suite, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^\alpha(10)}{n\ln^\alpha(n)}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$ (séries de BERTRAND). Redémontrons ce résultat qui n'est pas un résultat de cours.

La série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$ est divergente (voir n° 1, 4)). Par suite, si $\alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln^\alpha(n)}$ est divergente car $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n\ln^\alpha(n)} \geqslant \dfrac{1}{n\ln n}$.

Soit $\alpha > 1$. Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^\alpha x}$ est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, pour $k \geqslant 3$,

$$\frac{1}{k\ln^\alpha k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx$$

puis, pour $n \geqslant 3$, en sommant pour $k \in [\![3, n]\!]$

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^\alpha k} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx = \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)} - \frac{1}{\ln^{\alpha-1}(n)}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série à termes positifs, de terme général $\dfrac{1}{k\ln^\alpha k}$, est majorée et donc la série de terme général $\dfrac{1}{k\ln^\alpha k}$ converge.

On a montré que la série de terme général $\dfrac{1}{n(c(n))^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge si et seulement si $\alpha > 1$.

6) Soit $n \geqslant 2$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\ln^a(n+1)}{(n+1)^b} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1 \text{ (d'après un théorème de croissances comparées)}$$

et d'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général u_n converge.

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = 0$. Donc

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} \tan(u_n) \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - \left(1-\frac{1}{n}\right)^a}{1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^a} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\frac{2a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par suite, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a = 0$.

8) La fonction $x \mapsto x^{3/2}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc pour $k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} x^{3/2}\,dx \leqslant k^{3/2} \leqslant \int_{k}^{k+1} x^{3/2}\,dx$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n x^{3/2}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} x^{3/2}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} x^{3/2}\,dx = \int_1^{n+1} x^{3/2}\,dx$$

ce qui fournit $\dfrac{2}{5}n^{5/2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \leqslant \dfrac{2}{5}\left((n+1)^{5/2} - 1\right)$ puis $1 \leqslant \dfrac{5}{2n^{5/2}}u_n \leqslant \dfrac{5}{2n^{5/2}}\left((n+1)^{5/2} - 1\right)$ et donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^{5/2}}{5}.$$

Par suite, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n^{\frac{5}{2}-\alpha}}{5} > 0$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\dfrac{5}{2} - \alpha < -1$ ou encore $\alpha > \dfrac{7}{2}$.

9) Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\left(1+\frac{2}{n^\alpha}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right)-1 \geqslant \frac{1}{n^\alpha}+\frac{2}{n^\alpha}+\ldots+\frac{n}{n^\alpha} = \frac{n(n+1)}{2n^\alpha} > 0.$$

Comme $\dfrac{n(n+1)}{2n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^{\alpha-2}}$, si $\alpha \leqslant 3$, on a $\alpha-2 \leqslant 1$ et la série de terme général u_n diverge.

Si $\alpha > 3$,

$$\begin{aligned} 0 < u_n &\leqslant \left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right)^n - 1 = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)} - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \text{ (car } n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-2}} \text{ terme général d'une série de Riemann convergente,} \end{aligned}$$

puisque $\alpha-2>1$, et donc la série de terme général u_n converge. Finalement, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 3$.

Exercice n° 3

1) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi(n^2-1+1)}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n+1}+(n-1)\pi\right) = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

La suite $\left((-1)^{n-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général u_n converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

2) (Attention, la suite $\left(\dfrac{1}{n+(-1)^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroisante à partir d'un certain rang).

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la série de terme général $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente et donc converge. On en déduit que la série de terme général u_n converge.

3) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right) = v_n + w_n + t_n$. Les séries de termes généraux respectifs v_n et t_n sont convergentes et la série de terme général w_n est divergente. Si la série de terme général u_n convergeait, alors la série de terme général $w_n = u_n - v_n - t_n$ convergerait ce qui est faux. Donc, la série de terme général u_n diverge.

Remarque. La série de terme général u_n diverge bien que u_n soit équivalent au terme général d'une série convergente ($u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$)..

4) Pour $x \in]0,+\infty[$, posons $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > e$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x} < 0$.

Donc, la fonction f est décroissante sur $[e,+\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 3}$ est une suite décroissante et converge vers 0. Mais alors la série de terme général $(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

5) • Si $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n est grossièrement divergente.

• Si $\deg(P) \leqslant \deg(Q)-2$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général u_n est absolument convergente.

• Si $\deg(P) = \deg(Q)-1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\dfrac{\mathrm{dom}(P)}{n\,\mathrm{dom}(Q)} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. u_n est alors somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général u_n converge.

En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\deg(P) < \deg(Q)$.

7) $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ puis pour $n \geqslant 2$, $n!e = 1+n+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$.

Pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $\dfrac{n!}{k!}$ est un entier divisible par $n(n-1)$ et est donc un entier pair que l'on note $2K_n$. Pour $n \geqslant 2$, on obtient

$$\sin(n!\pi e) = \sin\left(2K_n\pi + (n+1)\pi + \pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\right).$$

Déterminons un développement limité à l'ordre 2 de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}.$$

Maintenant, pour $k \geqslant n+3$, $\dfrac{n!}{k!} = \dfrac{1}{k(k-1)\dots(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^{k-n}}$ et donc

$$\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!} \leqslant \sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{(n+1)^3}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n^3}.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il reste

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement , $\sin(n!\pi e) \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
$\sin(n!\pi e)$ est somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général $\sin(n!\pi e)$ converge.
Si $p \geqslant 2$, $|\sin^p(n!\pi e)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^p}{n^p}$ et la série de terme général $\sin^p(n!\pi e)$ converge absolument.

Exercice n° 4

1) D'après un théorème de croissances comparées, $\dfrac{n+1}{3^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par suite, la série de terme général $\dfrac{n+1}{3^n}$ converge.

1er calcul. Soit $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\\ &= (S-1) - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = S - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit que $S = \dfrac{9}{4}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}.}$$

2ème calcul. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k.$$

Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = f_n'(x) = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Pour $x = \dfrac{1}{3}$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{3^k} = \frac{\dfrac{n}{3^{n+1}} - \dfrac{n+1}{3^n}+1}{\left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2}$ et quand n tend vers l'infini, on obtient de nouveau $S = \dfrac{9}{4}$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^3-4x} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x+2}$ avec $a = \displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2)f(x) = \frac{3}{2(2+2)} = \frac{3}{8}$, $b = \displaystyle\lim_{x\to 0} xf(x) = \frac{1}{4}$ et $c = \displaystyle\lim_{x\to -2}(x+2)f(x) = -\frac{5}{8}$.

Pour $k \geqslant 3$, $\dfrac{2k-1}{k^3-4k} = \dfrac{3}{8(k-2)} + \dfrac{1}{4k} - \dfrac{5}{8(k+2)}$. Puis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n}\frac{2k-1}{k^3-4k} &= \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2} = \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + o(1) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{8}\times\frac{3}{2} + \frac{5}{8}\times\frac{7}{12} + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{89}{96} + o(1).
\end{aligned}$$

La série proposée est donc convergente de somme $\dfrac{89}{96}$.

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{89}{96}.}$$

3) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $1^{3k} + j^{3k} + (j^2)^{3k} = 3$ puis $1^{3k+1} + j^{3k+1} + (j^2)^{3k+1} = 1 + j + j^2 = 0$ et $1^{3k+2} + j^{3k+2} + (j^2)^{3k+2} = 1 + j^2 + j^4 = 0$. Par suite,

$$e + e^j + e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1^n + j^n + (j^2)^n}{n!} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!},$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!} &= \frac{1}{3}\left(e + e^j + e^{j^2}\right) = \frac{1}{3}\left(e + e^{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(e + 2e^{-1/2}\mathrm{Re}\left(e^{-i\sqrt{3}/2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(e + 2e^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left(e + \frac{2}{\sqrt{e}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).}$$

4) $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

Posons $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$ puis pour $n \geqslant 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$. Puisque la série converge, $S = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{p\to+\infty} S_{2p+1}$ avec

$$\begin{aligned} S_{2p+1} &= \sum_{k=2}^{2p+1} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} (\ln(2k) - \ln(2k+1) + \ln(2k+1) - \ln(2k)) = 0 \end{aligned}$$

et quand p tend vers $+\infty$, on obtient $S = 0$.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.}$$

5) Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + o(1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

6) Si $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors, pour tout entier naturel n, $\frac{a}{2^n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) > 0$.
Ensuite, $\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{4^n}\right)$ et la série converge. Ensuite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(2\times\frac{a}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{n+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right) \text{ (produit télescopique)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\times\frac{a}{2^n}}\right) = \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right) \quad \left(a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \sin(2a) > 0\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).}$$

7) Vérifions que pour tout réel x on a $\operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \operatorname{ch}(2x)$ et $2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \operatorname{sh}(2x)$ puis

$$\frac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x} = \frac{2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x)} = \operatorname{th}(2x).$$

Par suite, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $2\frac{\operatorname{th}(x)}{\operatorname{th}(2x)} = 1 + \operatorname{th}^2(x)$ puis $\frac{2}{\operatorname{th}(2x)} = \frac{1}{\operatorname{th} x} + \operatorname{th}(x)$ et donc $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$. Mais alors, pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\,\mathrm{th}\left(\frac{a}{2^k}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\left(\frac{2}{\mathrm{th}\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}-\frac{1}{\mathrm{th}\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k-1}\,\mathrm{th}\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}-\frac{1}{2^k\,\mathrm{th}\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right)$$
$$=\frac{2}{\mathrm{th}(2a)}-\frac{1}{2^n\,\mathrm{th}\left(\frac{a}{2^n}\right)}\text{ (somme télescopique)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{2}{\mathrm{th}(2a)}-\frac{1}{a}.$$

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R}^*,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\,\mathrm{th}\left(\frac{a}{2^n}\right)=\frac{2}{\mathrm{th}(2a)}-\frac{1}{a}.}$$

Si $a=0$, la somme est nulle.

Exercice n° 5

Il faut vérifier que $nu_n\underset{n\to+\infty}{\to}0$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a

$$0<(2n)u_{2n}=2(\underbrace{u_{2n}+\ldots+u_{2n}}_{n})\leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n}u_k\text{ (car la suite } u\text{ est décroissante)}$$
$$=2(S_{2n}-S_n).$$

Puisque la série de terme général u_n converge, $\lim_{n\to+\infty}2(S_{2n}-S_n)=0$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty}(2n)u_{2n}=0$.

Ensuite, $0<(2n+1)u_{2n+1}\leqslant(2n+1)u_{2n}=(2n)u_{2n}+u_{2n}$ avec $(2n)u_{2n}+u_{2n}\underset{n\to+\infty}{\to}0$. Donc les suites des termes de rangs pairs et impairs extraites de la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite à savoir 0. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}nu_n=0$ ou encore que $u_n\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Contre exemple avec u non monotone. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\begin{cases}0\text{ si }n=0\\ \frac{1}{n}\text{ si }n\text{ est un carré parfait non nul}\\ 0\text{ sinon}\end{cases}$. La suite u est positive et $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}<+\infty$. Pourtant, $p^2u_{p^2}=1\underset{p\to+\infty}{\to}1$ et la suite (nu_n) admet une suite extraite convergeant vers 1. On n'a donc pas $\lim_{n\to+\infty}nu_n=0$.

Exercice n° 6

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k)}{k^2}$.

$$S_{2n}-S_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sigma(k)}{k^2}\geqslant\frac{1}{(2n)^2}\sum_{k=n+1}^{2n}\sigma(k)$$
$$\geqslant\frac{1}{4n^2}(1+2+\ldots+n)\text{ (car les } n\text{ entiers }\sigma(k),\ 1\leqslant k\leqslant n,\text{ sont strictement positifs et deux à deux distincts)}$$
$$=\frac{n(n+1)}{8n^2}\geqslant\frac{n^2}{8n^2}=\frac{1}{8}.$$

Si la suite (S_n) converge, on doit avoir $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ ce qui contredit l'inégalité précédente. Donc la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$, $n\geqslant1$, diverge.

Exercice n° 7

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n=\ln(1+u_n)$, $w_n=\frac{u_n}{1+u_n}$ et $t_n=\int_0^{u_n}\frac{dx}{1+x^e}$.

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, alors $0 < u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$. Dans ce cas, les séries de termes généraux u_n, v_n et w_n sont de même nature.
D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{1+u_n^e} \leqslant t_n \leqslant u_n$ puis $\dfrac{1}{1+u_n^e} \leqslant \dfrac{t_n}{u_n} \leqslant 1$ et donc $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Les séries de termes généraux u_n et t_n sont aussi de même nature.

• Si u_n ne tend pas vers 0, la série de terme général u_n est grossièrement divergente. Puisque $u_n = e^{v_n} - 1$, v_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général v_n est grossièrement divergente. Dans ce cas aussi, les séries de termes généraux sont de même nature.
De même, puisque $w_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} < 1$, on a $u_n = \dfrac{w_n}{1-w_n}$ et w_n ne peut tendre vers 0.
Enfin, puisque u_n ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier naturel N, il existe $n = n(N) \geqslant N$ tel que $u_n \geqslant \varepsilon$. Pour cet ϵ et ces n, on a $t_n \geqslant \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \dfrac{dx}{1+x^e} > 0$ (fonction continue, positive et non nulle) et la suite t_n ne tend pas vers 0. Dans le cas où u_n ne tend pas vers 0, les quatre séries sont grossièrement divergentes.

Exercice n° 8

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = (n+1)!\left(e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!}\\
&= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k}
\end{aligned}$$

On a $0 < \displaystyle\sum_{k=n+6}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+2)(n+3)\dots k} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+6}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}} = \dfrac{1}{(n+2)^5}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n+2}} = \dfrac{1}{(n+2)^4(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n^5}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=n+6}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+2)(n+3)\dots k} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\\
&\quad + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{19}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3}\left(1 - \frac{9}{n}\right) + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{(n+1)!\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Exercice n° 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$. D'après la formule du binôme de Newton, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{3}$ où A_n et B_n sont des entiers naturels. Un calcul conjugué fournit aussi $\left(2-\sqrt{3}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{3}$. Par suite, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2A_n$ est un entier pair. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sin\left(2A_n\pi - \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) = -\sin\left(\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right).$$

Mais $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ et donc $\left(2-\sqrt{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On en déduit que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de terme général u_n converge absolument et en particulier converge.

Exercice nº 10

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(\sqrt{u_n} - \dfrac{1}{n}\right)^2 \geqslant 0$ et donc $0 \leqslant \dfrac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme la série terme général $\dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$ converge, la série de terme général $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Exercice nº 11

Pour $n \geqslant 2$, $v_n = \dfrac{u_n+1-1}{(1+u_1)\ldots(1+u_n)} = \dfrac{1}{(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1})} - \dfrac{1}{(1+u_1)\ldots(1+u_n)}$ et d'autre part $v_1 = 1 - \dfrac{1}{1+u_1}$. Donc, pour $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_1)\ldots(1+u_n)} \text{ (somme télescopique).}$$

Si la série de terme général u_n converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc $0 < u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1+u_n)$. Donc la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge ou encore la suite $\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers un certain réel ℓ. Mais alors la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers le réel strictement positif $P = e^{\ell}$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $1 - \dfrac{1}{P}$.

Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général $\ln(1+u_n)$ diverge vers $+\infty$ et il en est de même que la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Exercice nº 12

Etudions tout d'abord la convergence de la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$.

Si $\dfrac{u_n}{S_n}$ tend vers 0 alors

$$0 < \frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) = \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1}).$$

Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On en déduit que la série de terme général $\ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ est divergente car $\sum_{k=1}^{n} \ln(S_k) - \ln(S_{k-1}) = \ln(S_n) - \ln(S_0) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Dans ce cas, la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$ diverge ce qui est aussi le cas si $\dfrac{u_n}{S_n}$ ne tend pas vers 0.

Donc, dans tous les cas, la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$ diverge.

Si $\alpha \leqslant 1$, puisque S_n tend vers $+\infty$, à partir d'un certain rang on a $S_n^{\alpha} \leqslant S_n$ et donc $\dfrac{u_n}{S_n^{\alpha}} \geqslant \dfrac{u_n}{S_n}$. Donc, si $\alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^{\alpha}}$ diverge.

Si $\alpha > 1$, puisque la suite (S_n) est croissante,

$$0 < \frac{u_n}{S_n^{\alpha}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^{\alpha}} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{S_n^{\alpha}} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right),$$

qui est le terme général d'une série télescopique convergente puisque $\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Dans ce cas, la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^{\alpha}}$ converge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{u_n}{S_n^{\alpha}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

Exercice n° 13

1) Si $\alpha < 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{-2\alpha}$ et si $\alpha = 0$, $u_n = 1 + (-1)^n$. Donc si $\alpha \leqslant 0$, u_n ne tend pas vers 0. La série de terme général u_n diverge grossièrement dans ce cas.

On suppose dorénavant que $\alpha > 0$. Pour tout entier naturel non nul n, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$ et donc la série de terme général u_n converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

Il reste à étudier le cas où $0 < \alpha \leqslant 1$. On a $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} + \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$. La suite $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 en décroissant et donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. On en déduit que la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général $\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ converge ou encore si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

En résumé

> Si $\alpha \leqslant 0$, la série de terme général $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge grossièrement,
> si $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, la série de terme général $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge,
> si $\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ est semi convergente,
> si $\alpha > 1$, la série de terme général $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ converge absolument.

2) Puisque $\alpha > 0$, $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} + \dfrac{1}{2n^{2\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puis

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\alpha}}\right) &= \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\alpha}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\alpha}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\alpha}}\right)^3 \\
&\quad - \frac{1}{4}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^4 + o\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{(-1)^n}{n^{3\alpha}}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{n^{4\alpha}}\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + o\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}) - \frac{(-1)^n}{6n^{3\alpha}} + \frac{1}{8n^{4\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

($(-1)^{3n} = (-1)^n$ car $3n - n = 2n \in 2\mathbb{N}$ et donc les entiers n et $3n$ ont même parité).

Puisque $\alpha > 0$, les suites $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha})\right)$ et $\left(\dfrac{(-1)^n}{6n^{3\alpha}}\right)$ sont alternées en signe et leurs valeurs absolues respectives tend vers 0 en décroissant. Donc, les séries de termes généraux respectifs $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha})$ et $\dfrac{(-1)^n}{6n^{3\alpha}}$ convergent en vertu du critère spécial aux séries alternées. Donc, la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} + \dfrac{1}{2n^{2\alpha}}\right)$ converge si et seulement si la série de terme général $\dfrac{1}{8n^{4\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{4\alpha}}\right)$ converge. Mais, $\dfrac{1}{8n^{4\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{4\alpha}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8n^{4\alpha}} > 0$ et donc la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} + \dfrac{1}{2n^{2\alpha}}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{4}$.

> La série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} + \dfrac{1}{2n^{2\alpha}}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{4}$.

Exercice n° 14

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers termes de la série considérée et on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Il est connu que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}S_{m(p+q)} &= \left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2q}\right)+\left(\frac{1}{2p+1}+\ldots+\frac{1}{4p-1}\right)-\left(\frac{1}{2q+2}+\ldots+\frac{1}{4q}\right)+\ldots\\
&\quad+\left(\frac{1}{2(m-1)p+1}+\ldots+\frac{1}{2mp-1}\right)-\left(\frac{1}{2(m-1)q+2}+\ldots+\frac{1}{2mq}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{2k}=H_{2mp}-\frac{1}{2}\left(H_{mp}+H_{mq}\right)\\
&\underset{m\to+\infty}{=}(\ln(2mp)+\gamma)-\frac{1}{2}(\ln(mp)+\gamma+\ln(mq)+\gamma)+o(1)\underset{m\to+\infty}{=}\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)+o(1).\end{aligned}$$

Ainsi, la suite extraite $(S_{m(p+q)})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)$.

Montrons alors que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Il existe un unique entier naturel non nul m_n tel que $m_n(p+q)\leqslant n<(m_n+1)(p+q)$ à savoir $m_n=\left\lfloor\dfrac{n}{p+q}\right\rfloor$.

$$\begin{aligned}\left|S_n-S_{m_n(p+q)}\right| &\leqslant \frac{1}{2m_np+1}+\ldots+\frac{1}{2(m_n+1)p-1}+\frac{1}{2m_nq+2}+\frac{1}{2(m_n+1)q}\\
&\leqslant\frac{p}{2m_np+1}+\frac{q}{2m_nq+2}\leqslant\frac{1}{2m_n}+\frac{1}{2m_n}=\frac{1}{m_n}.\end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon>0$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}m_n=+\infty$, il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $\dfrac{1}{m_n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ et aussi $\left|S_{m_n(p+q)}-\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
Pour $n\geqslant n_0$, on a alors

$$\begin{aligned}\left|S_n-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| &\leqslant |S_n-S_{m_n(p+q)}|+\left|S_{m_n(p+q)}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right|\leqslant\frac{1}{m_n}+\left|S_{m_n(p+q)}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right|\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*/\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left(n\geqslant n_0\Rightarrow\left|S_n-\left(\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)\right)\right|<\varepsilon\right)$ et donc, la série proposée converge et a pour somme $\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)$.

Exercice nº 15

La série proposée est le produit de Cauchy de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$, $n\geqslant 1$, par elle même.

• Si $\alpha>1$, on sait que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge absolument et donc que la série proposée converge.

• Si $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, pour $0<k<n$ on a $0<k(n-k)\leqslant\dfrac{n}{2}\left(n-\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{n^2}{4}$ (la fonction $x\mapsto x(n-x)$ admet sur $[0,n]$ un maximum en $\dfrac{n}{2}$). Donc $u_n\geqslant\dfrac{n-1}{\left(\dfrac{n^2}{4}\right)^\alpha}$ avec $\dfrac{n-1}{\left(\dfrac{n^2}{4}\right)^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{4^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$. Comme $2\alpha-1\leqslant 1$, la série proposée diverge.

• Si $\alpha<0$, $u_n\geqslant\dfrac{1}{(n-1)^\alpha}$ et donc u_n ne tend pas vers 0. Dans ce cas, la série proposée diverge grossièrement.

La série proposée converge si et seulement si $\alpha>1$.

Exercice nº 16

1) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+1 &= 2(n+3)(n+2)(n+1)-15n^2-22n-11=2(n+3)(n+2)(n+1)-15(n+3)(n+2)+53n+79\\
&=2(n+3)(n+2)(n+1)-15(n+3)(n+2)+53(n+3)-80\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{n!}-\frac{15}{(n+1)!}+\frac{53}{(n+2)!}-\frac{80}{(n+3)!}\right)=2e-15(e-1)+53(e-2)-80\left(e-\frac{5}{2}\right)$$
$$=-40e+109.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}=-40e+109.}$$

2) Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1}=\dfrac{n+1}{a+n+1}u_n$. Par suite $(n+a+1)u_{n+1}=(n+1)u_n=(n+a)u_n+(1-a)u_n$ puis

$$(1-a)\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}(k+a+1)u_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}(k+a)u_k=(n+a+1)u_{n+1}-(a+1)u_1=(n+a+1)u_{n+1}-1.$$

Si $a=1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.

Si $a\neq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{1-a}((n+a+1)u_{n+1}-1)=\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a-1}(a+n+1)u_{n+1}$.

Si $a>1$, la suite u est strictement positive et la suite des sommes partielles (S_n) est majorée par $\dfrac{1}{a-1}$. Donc la série de terme général u_n converge. Il en est de même de la suite $((a+n+1)u_{n+1})$. Soit $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}(a+n+1)u_{n+1}$.

Si $\ell\neq 0$, $u_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ell}{n+a+1}$ contredisant la convergence de la série de terme général u_n. Donc $\ell=0$ et

$$\text{si } a>1,\ \sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\frac{1}{a-1}.$$

Si $0<a<1$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geqslant\dfrac{1\times 2\times\ldots\times n}{2\times 3\ldots\times(n+1)}=\dfrac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.

Exercice nº 17

Pour tout entier naturel non nul n, $0<\dfrac{1}{2^pn^{p-1}}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n)^p}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^p}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{n^{p-1}}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $p>2$.

Exercice nº 18

1) Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n=n^\alpha u_n$ puis $w_n=\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

$$\begin{aligned}w_n&=\ln\left(\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}\right)=\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}\alpha\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

On en déduit que la série de terme général $w_n=\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)$ converge. On sait qu'il en est de même de la suite $(\ln(v_n))$. Posons $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(v_n)$ puis $K=\ell$. K est un réel strictement positif tel que $n^\alpha u_n=v_n=e^{\ln(v_n)}\underset{n\to+\infty}{\to}e^\ell=K$ et donc tel que

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{K}{n^\alpha}.$$

2) Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{a+n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{-1}\underset{n\to+\infty}{=}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{a+1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et d'après 1), il existe un réel strictement positif K tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^a}$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $a > 1$.

Exercice n° 19

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots = \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)-2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots\right)\\ &= \left(1-\frac{2}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{12},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} &= 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots = \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\text{ et }\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.}$$

Exercice n° 20

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$, $k\geqslant 1$, converge, la suite (R_n) est définie et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$0<\dfrac{1}{k^2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{k(k-1)}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$ et puisque la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ converge, la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\text{ (surtout ne pas décomposer en deux sommes)}\\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\text{ (somme télescopique)}\\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

ou encore $R_n\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Plus précisément, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $R_n-\dfrac{1}{n}=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)}=-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2(k-1)}$.

Or $-\dfrac{1}{k^2(k-1)}+\dfrac{1}{k(k-1)(k-2)}=\dfrac{2}{k^2(k-1)(k-2)}$ puis
$\dfrac{2}{k^2(k-1)(k-2)}-\dfrac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)}=-\dfrac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}$ et donc

$$\begin{aligned}R_n &= \frac{1}{n}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2(k-1)}=\frac{1}{n}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2}{k^2(k-1)(k-2)}\\ &= \frac{1}{n}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}\end{aligned}$$

Ensuite $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^5}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4n^4}$ (toujours par la règle de l'équivalence des restes ou en encadrant par des intégrales) ou encore

$$-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}\underset{n\to+\infty}{=}-\frac{3}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}&=\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{k-(k-2)}{k(k-1)(k-2)}=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)(k-2)}-\frac{1}{k(k-1)}\right)\\&=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{N(N-1)}\right)=\frac{1}{2n(n-1)}\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}=\frac{1}{2n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)}&=\lim_{N\to+\infty}\frac{2}{3}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)}-\frac{1}{k(k-1)(k-2)}\right)\\&=\lim_{N\to+\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\right)=\frac{2}{3n(n-1)(n-2)}\\&=\frac{2}{3n^3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-1}\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{2}{3n^3}\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{2}{3n^3}+\frac{2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Finalement,

$$R_n\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{2n^4}\right)+\left(\frac{2}{3n^3}+\frac{2}{n^4}\right)-\frac{3}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Exercice n° 21

$\sum n^n$ est une série à termes positifs grossièrement divergente.

1 ère solution.

$0<n^n\underset{n\to+\infty}{\sim}n^n-(n-1)^{n-1}$ car $\dfrac{n^n-(n-1)^{n-1}}{n^n}=1-\dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\underset{n\to+\infty}{=}1-\dfrac{1}{ne}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\to}1$.

D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes,

$$\sum_{p=1}^{n}p^p\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{p=2}^{n}p^p\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{p=2}^{n}(p^p-(p-1)^{p-1})=n^n-1\underset{n\to+\infty}{\sim}n^n.$$

(La somme est équivalente à son dernier terme.)

2 ème solution. Pour $n \geqslant 3$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n^n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n-2} p^p \leqslant \dfrac{1}{n^n} \times (n-2)(n-2)^{n-2} \leqslant \dfrac{n^{n-1}}{n^n} = \dfrac{1}{n}$. Donc $\dfrac{1}{n^n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n-2} p^p \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. On en déduit que $\dfrac{1}{n^n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^p = 1 + \dfrac{(n-1)^{n-1}}{n^n} + \dfrac{1}{n^n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n-2} p^p \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1) + o(1) = 1 + o(1)$.

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} p^p \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n.}$$

Exercice n° 22

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}$, $\dfrac{1}{n^2-p^2} = \dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{1}{n-p} - \dfrac{1}{n+p}\right)$. Donc pour $N > p$,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant n\leqslant N,\ n\neq p} \frac{1}{n^2-p^2} &= \frac{1}{2p}\sum_{1\leqslant n\leqslant N,\ n\neq p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{2p}\left(\sum_{1-p\leqslant k\leqslant N-p,\ k\neq 0}\frac{1}{k} - \sum_{p+1\leqslant k\leqslant N+p,\ k\neq 2p}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{2p}\left(-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+p}\frac{1}{k} + \frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2p}\left(\frac{3}{2p} - \sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

Maintenant, $\displaystyle\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k} = \frac{1}{N-p+1} + \ldots + \frac{1}{N+p}$ est une somme de $2p$ termes tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Puisque $2p$ est constant quand N varie, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k} = 0$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\ n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\times\frac{3}{2p} = \frac{3}{4p^2} \text{ puis } \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\ n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on a aussi $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2} = -\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{p^2-n^2} = -\frac{3}{4n^2}$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}\right) = -\frac{\pi^2}{8} \neq \frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit que la suite double $\left(\dfrac{1}{n^2-p^2}\right)_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ n\neq p}$ n'est pas sommable.

Exercice n° 23

La suite $\left((-1)^n\dfrac{1}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $(-1)^n\dfrac{1}{3n+1}$, $n \geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{3k}\,dt = \int_0^1 \frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1-(-t^3)}\,dt = \int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt + (-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt.$$

Mais $\left|(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\right| = \displaystyle\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{3n+3}\,dt = \frac{1}{3n+4}$. On en déduit que $(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt.$$

Calculons cette dernière intégrale.

$$\frac{1}{X^3+1}=\frac{1}{(X+1)(X+j)\left(X+j^2\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{j}{X+j}+\frac{j^2}{X+j^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\left[\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$$
$$=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.}$$

Exercice n° 24

Pour tout entier $n\geqslant 2$, on a $nv_n-(n-1)v_{n-1}=u_n$ ce qui reste vrai pour $n=1$ si on pose de plus $v_0=0$. Par suite, pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$v_n^2-2u_nv_n=v_n^2-2(nv_n-(n-1)v_{n-1})v_n=-(2n-1)v_n^2+2(n-1)v_{n-1}v_n$$
$$\leqslant-(2n-1)v_n^2+(n-1)(v_{n-1}^2+v_n^2)=(n-1)v_{n-1}^2-nv_n^2.$$

Mais alors, pour $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N}(v_n^2-2u_nv_n)\leqslant\sum_{n=1}^{N}((n-1)v_{n-1}^2-nv_n^2)=-nv_n^2\leqslant 0.$$

Par suite,

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2\leqslant\sum_{n=1}^{N}2u_nv_n\leqslant 2\left(\sum_{n=1}^{N}u_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}\quad\text{(inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

Si $\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}>0$, on obtient après simplification par $\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}$ puis élévation au carré

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2\leqslant 4\sum_{n=1}^{N}u_n^2,$$

cette inégalité restant claire si $\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}=0$. Finalement,

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2\leqslant 4\sum_{n=1}^{N}u_n^2\leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général $v_n^2(\geqslant 0)$ est majorée. Donc la série de terme général v_n^2 converge et de plus, quand N tend vers l'infini, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leqslant 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

Exercice n° 25

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt - \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\, dt \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt. \end{aligned}$$

Par suite, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \left(-t^2\right) \frac{1-\left(-t^2\right)^{N+1}}{(1+t^2)^2}\, dt = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\, dt.$$

Or $\left|(-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\, dt\right| = \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\, dt \leqslant \int_0^1 t^{2N+2}\, dt = \frac{1}{2N+3}$. Comme $\frac{1}{2N+3}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, il en est de même de $(-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\, dt$. On en déduit que la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge et de plus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt = \int_0^1 \frac{t}{2} \times \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\, dt \\ &= \left[\frac{t}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.}$$