Planche nº 9. Series numériques

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice nº 1

Nature de la série de terme général

1) (*) $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ **2) (*)** $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ **3) (**)** $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$

4) (**) $\dfrac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$ **5) (**)** $\operatorname{Arccos}\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n^2}}$ **6) (*)** $\dfrac{n^2}{(n-1)!}$

7) (**) $\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ **8) (**)** $\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\dfrac{n^2+1}{n}\right)$ **9) (**)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$

10) (**) $n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$ **11) (**)** $e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ **12) (**)** $1-n\ln\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)$

Exercice nº 2

Nature de la série de terme général .

1) (***) $\sqrt[4]{n^4+2n^2}-\sqrt[3]{P(n)}$ où P est un polynôme. **2) (**)** $\dfrac{1}{n^\alpha}S(n)$ où $S(n)=\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}\dfrac{1}{p^n}$.

3) (**) u_n où $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{n}e^{-u_{n-1}}$.

4) (** I)** $u_n=\dfrac{1}{p_n}$ où p_n est le n-ème nombre premier

(indication : considérer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p_n}}\right)=\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+\dfrac{1}{p_n}+\dfrac{1}{p_n^2}+\dots\right)$).

5) (***) $u_n=\dfrac{1}{n(c(n))^\alpha}$ où $c(n)$ est le nombre de chiffres de n en base 10.

6) (*) $\dfrac{\left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\ln k\right)^a}{(n!)^b}$ $a>0$ et $b>0$. **7) (**)** $\operatorname{Arctan}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^a\right)-\operatorname{Arctan}\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^a\right)$.

8) (**) $\dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{3/2}$. **9) (***)** $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^\alpha}\right)\right)-1$.

Exercice nº 3

Nature de la série de terme général .

1) (**) $\sin\left(\dfrac{\pi n^2}{n+1}\right)$ **2) (**)** $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$ **3) (**)** $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

4) (**) $(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ **5) (**)** $(-1)^n\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls

6) (****) $(\sin(n!\pi e))^p$ p entier naturel non nul.

Exercice nº 4

Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

1) (**) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n+1}{3^n}$ **2) (**)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\dfrac{2n-1}{n^3-4n}$ **3) (***)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n)!}$ **4) (**)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$

5) (*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$ **6) (***)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\dfrac{a}{2^n}\right)$ $a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ **7) (***)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\operatorname{th}\dfrac{a}{2^n}}{2^n}$

Exercice n° 5 (* I)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Trouver un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers 0.

Exercice n° 6 (***)

Soit σ une injection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même. Montrer que la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice n° 7 (**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n, $\frac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$ et $\int_0^{u_n}\frac{dx}{1+x^e}$ sont de mêmes natures.

Exercice n° 8 (***)

Trouver un développement limité à l'ordre 4 quand n tend vers l'infini de $\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\times(n+1)!$.

Exercice n° 9 (***)

Nature de la série de terme général $u_n=\sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$.

Exercice n° 10 (**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Exercice n° 11 (***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Trouver la nature de la série de terme général $v_n=\frac{u_n}{(1+u_1)\dots(1+u_n)}$, $n\geqslant 1$, connaissant la nature de la série de terme général u_n puis en calculer la somme en cas de convergence.

Exercice n° 12 (****)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n diverge.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=u_0+...+u_n$. Etudier en fonction de $\alpha>0$ la nature de la série de terme général $\frac{u_n}{(S_n)^\alpha}$.

Exercice n° 13

1) (**) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Nature de la série de terme général $u_n=\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$, $n\geqslant 1$.

2) (***) Soit $\alpha>0$. Nature de la série de terme général $u_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{1}{2n^{2\alpha}}\right)$, $n\geqslant 1$.

Exercice n° 14 (****)

On sait que $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2$.
A partir de la série précédente, on construit une nouvelle série en prenant p termes positifs, q termes négatifs, p termes positifs ... (Par exemple pour $p=3$ et $q=2$, on s'intéresse à $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$). Convergence et somme de cette série .

Exercice n° 15 (***)

Nature de la série de terme général $u_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k(n-k))^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice n° 16

Convergence et somme éventuelle de la série de terme général

1) (**) $u_n=\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$ **2) (***)** $u_n=\frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$, $n\geqslant 1$, $a\in\mathbb{R}^{+*}$ donné.

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

Exercice n° 17 (*)

Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \in]0, +\infty[$.

Exercice n° 18 (* I)**

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha}$ (règle de Raabe-Duhamel). Indication : poser $v_n = n^\alpha u_n$ puis $w_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ et étudier la nature de la série de terme général w_n.

2) Nature de la série de terme général $\frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$ (a réel positif donné).

Exercice n° 19 (I)**

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice n° 20 (* I)**

Développement limité à l'ordre 4 de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ quand n tend vers l'infini.

Exercice n° 21 (**)

Equivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{p=1}^{n} p^p$.

Exercice n° 22 (***)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\, n\neq p} \frac{1}{n^2 - p^2}\right)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\, p\neq n} \frac{1}{n^2 - p^2}\right)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice n° 23 (**)

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice n° 24 (****)

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$. Montrer que si la série de terme général $(u_n)^2$ converge alors la série de terme général $(v_n)^2$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} (v_n)^2 \leqslant 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n)^2$ (indication : majorer $v_n^2 - 2u_n v_n$).

Exercice n° 25 (***)

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, $n \geqslant 0$.