Fiche n^o 9. Inégalités dans $\mathbb{R}$.

I Inégalités

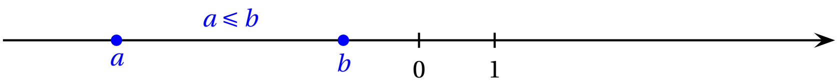
1 Définitions

Définition 1

Soient a et b deux réels.

a est **inférieur ou égal à** b si et seulement si $b-a$ est un réel positif ou nul. Notation : $a \leqslant b$.
a est **strictement inférieur à** b si et seulement si $b-a$ est un réel strictement positif Notation : $a < b$.
a est **supérieur ou égal à** b si et seulement si $b-a$ est un réel négatif ou nul. Notation : $a \geqslant b$.
a est **strictement supérieur à** b si et seulement si $b-a$ est un réel strictement négatif ou nul. Notation : $a > b$.

L'inégalité $a \leqslant b$ se lit sur la droite numérique : le point d'abscisse a est **à gauche** du point d'abscisse b.



Théoreme 1

1) Pour tout réel a, $a \leqslant a$.

2) Pour tous réels a et b, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, alors $a = b$.

3) Pour tous réels a, b et c, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, alors $a \leqslant c$.

Théoreme 2

Pour tous réels a et b, si $a < b$, alors $a \leqslant b$.

2 Calculer avec des inégalités

Avec l'addition, les règles de calcul sont :

Théoreme 3

Pour tous réels a, b et c, si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$.

Théoreme 4

Pour tous réels a, b et c, $a + b \leqslant c$ équivaut à $a \leqslant c - b$.

Par exemple, pour tout réel x, $x + 2 \leqslant 3$ équivaut à $x \leqslant 3 - 2$ ou encore $x \leqslant 1$.

Théoreme 5

Pour tous réels a, b, c et d, si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.

Donc, **on peut additionner membre à membre des inégalités**.

Avec la multiplication, on a des problèmes supplémentaires :

Théoreme 6

Pour tous réels a et b, $a \leqslant b$ équivaut à $-a \geqslant -b$.
Pour tous réels a et b, $a \geqslant b$ équivaut à $-a \leqslant -b$.
Pour tous réels a et b, $a < b$ équivaut à $-a > -b$.
Pour tous réels a et b, $a > b$ équivaut à $-a < -b$.

Quand on multiplie par -1 les deux membres d'une inégalité, on change le sens de cette inégalité.

Théoreme 7

Pour tous réels a, b et c,

1) Si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$, alors $ac \leqslant bc$.

2) Si $c > 0$, alors $a \leqslant b$ équivaut à $ac \leqslant bc$. Si $c < 0$, alors $a \leqslant b$ équivaut à $ac \geqslant bc$.

Quand on multiplie par un nombre négatif les deux membres d'une inégalité, on change le sens de cette inégalité.

Théoreme 8

Pour tous réels a, b et c tels que $b > 0$, $ab \leqslant c$ équivaut à $a \leqslant \dfrac{c}{b}$.

Pour tous réels a, b et c tels que $b < 0$, $ab \leqslant c$ équivaut à $a \geqslant \dfrac{c}{b}$.

Par exemple, pour tout réel x, $2x \leqslant 3$ équivaut à $x \leqslant \dfrac{3}{2}$ et $-2x \leqslant 3$ équivaut à $x \geqslant -\dfrac{3}{2}$.

II Montrer des inégalités

On veut comparer deux nombres a et b.

Technique 1. On étudie le signe de la différence $b - a$.

Technique 2. Si a et b sont strictement positifs, on étudie la position de $\dfrac{a}{b}$ par rapport à 1.

Technique 3. On utilise directement les règles de calcul sur les inégalités.