9

Equations cartésiennes de droites

Au programme

- √ Découvrir la forme générale des équations de droites.
- √ Savoir déterminer une équation de droite.
- √ Savoir tracer une droite quand on a une équation.
- √ Résoudre des systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues pour déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Table des matières

I - Equations cartésiennes d'une droite .... page 2

- **A** - Vecteurs directeurs d'une droite. Coefficient directeur .... page 2
- **B** - Equations cartésiennes d'une droite .... page 3
- **C** - Equations d'une droite parallèle à un axe de coordonnées .... page 6
- **D** - Equation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées .... page 7
- **E** - Résumé des compétences à acquérir .... page 9

II - Intersections de droites .... page 10

- **A** - Position relative de deux droites du plan .... page 10
- **B** - Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues .... page 11

III - Quelques régionnements du plan .... page 13

Dans tout le chapitre, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

I Equations cartésiennes d'une droite

A Vecteurs directeurs d'une droite. Coefficient directeur

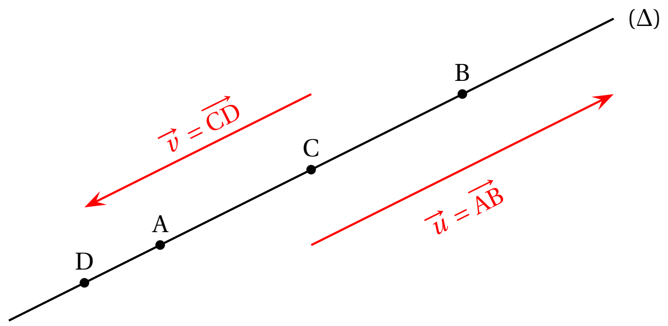
On rappelle la notion de vecteur directeur d'une droite.

Définition 1

Soit (Δ) une droite. Un **vecteur directeur** de la droite (Δ) est un vecteur de la forme $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de la droite (Δ).

On note qu'un vecteur directeur de droite est par définition non nul.

D'après le chapitre précédent, si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur d'une droite (Δ), tout vecteur directeur de (Δ) est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et inversement tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (Δ).



Soit (Δ) une droite. Soient A, B, C et D quatre points de (Δ) tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite (Δ). Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont $\left(x_B - x_A, y_B - y_A\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont $\left(x_D - x_C, y_D - y_C\right)$.
Si de plus la droite (Δ) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, on a $x_A \neq x_B$ ou encore $x_B - x_A \neq 0$ et de même $x_D - x_C \neq 0$. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, on a $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 0$ ou encore $\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_D - x_C \\ y_B - y_A & y_D - y_C \end{vmatrix} = 0$.
Cette égalité s'écrit encore $(x_B - x_A)\left(y_D - y_C\right) - \left(y_B - y_A\right)(x_D - x_C) = 0$ ou encore $(x_B - x_A)\left(y_D - y_C\right) = \left(y_B - y_A\right)(x_D - x_C)$ ou enfin, en tenant compte de $x_B - x_A \neq 0$ et $x_D - x_C \neq 0$,

$$\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

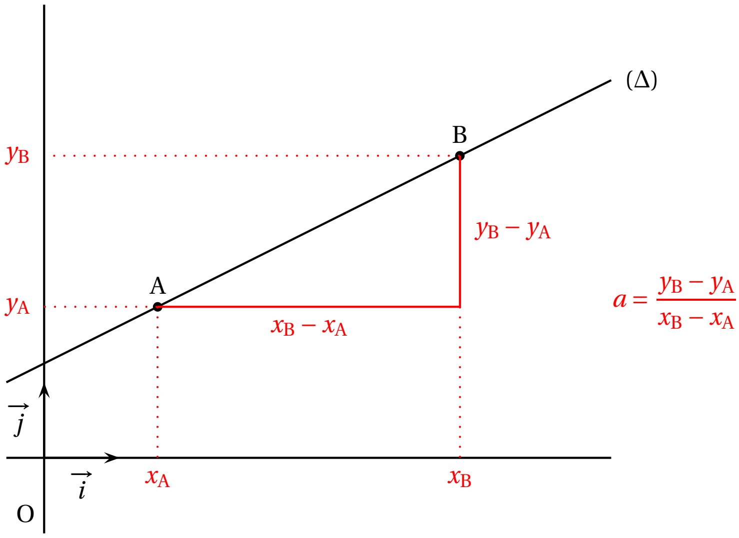
Ainsi, le rapport de l'ordonnée d'un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de (Δ) sur l'abscisse d'un vecteur directeur de (Δ) ne dépend pas de A et de B (ce rapport ne change pas quand on change l'origine et l'extrémité du vecteur directeur). On peut donc poser

Définition 2

Soit (Δ) une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. Le **coefficient directeur** de la droite (Δ) (on dit aussi la **pente** de la droite (Δ)) est le réel

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

où A et B sont deux points distincts de la droite (Δ).



B Equations cartésiennes d'une droite

On cherche maintenant une condition nécessaire et suffisante portant sur les coordonnées (x, y) d'un point M du plan pour que le point M appartienne à la droite (Δ). Cette condition nécessaire et suffisante est une égalité portant sur les coordonnées x et y du point M, égalité vérifiée si le point M appartient à la droite (Δ) et non vérifiée si le point M n'appartient pas à la droite (Δ).

Une telle égalité s'appelle **une équation cartésienne** de la droite (Δ) (ou plus simplement une équation de la droite (Δ)). Le mot « cartésienne » vient du nom René DESCARTES, qui est un mathématicien, physicien et philosophe français ayant vécu au XVII ème siècle. DESCARTES a crée un système de coordonnées pour repérer des points, auxquelles il a donné son nom : les coordonnées cartésiennes.

Théoreme 1

Soit (Δ) une droite du plan. (Δ) admet, dans le repère $\mathscr{R}$, une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Démonstration : (au programme)

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts de la droite (Δ) puis $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On note (α, β) les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ (on a donc $\alpha = x_B - x_A$ et $\beta = y_B - y_A$).

Soit $M(x, y)$ un point du plan. Le point M appartient à la droite (Δ) si et seulement si les points A, B et M sont alignés ou encore les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Donc, le point M appartient à la droite (Δ) si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Or,

$$\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = \beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A,$$

ou encore, en posant $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = -\beta x_A + \beta y_A$, $\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = ax + by + c$. On note que l'un des deux réels α ou β au moins, est non nul (car $\vec{u} \neq \vec{0}$) et donc $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

On a donc trouvé trois réels a, b et c tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ et tels que, pour tout point $M(x, y)$ du plan,

$M(x, y)$ appartient à la droite (Δ) si et seulement si $ax + by + c = 0$.

■

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On donne les points $A(3,-2)$ et $B(-1,1)$.

Déterminer une équation de la droite (AB).

Solution 1 : Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont $(-1-3, 1-(-2))$ ou encore $(-4,3)$. Soit alors $M(x,y)$ un point du plan .

M appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ou encore à $\begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ y+2 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

De plus, $\begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ y+2 & 3 \end{vmatrix} = 3(x-3)-(-4)(y+2) = 3x-9+4y+8 = 3x+4y-1$ et donc

M appartient à la droite (AB) si et seulement si $3x+4y-1=0$.

Une équation de la droite (AB) est $-3x+4y+17=0$.

■

On analyse maintenant la « réciproque du théorème précédent ».

Théoreme 2

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble d'équation $ax+by+c=0$ dans le repère $\mathscr{R}$. Alors,

1) $\mathscr{E}$ est une droite.

2) Un vecteur directeur de $\mathscr{E}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}(-b,a)$.

☞ *Dire que « $(\mathscr{E})$ est l'ensemble d'équation $ax+by+c=0$ dans le repère $\mathscr{R}$ » signifie que (en notant $\left(x_M, y_M\right)$ les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathscr{R}$),*

- *si $ax_M+by_M+c=0$, alors le point M appartient à l'ensemble $(\mathscr{E})$, ou encore, par contraposition, si le point M n'appartient pas à l'ensemble $(\mathscr{E})$, alors $ax_M+by_M+c \neq 0$.*
- *si le point M appartient à l'ensemble $(\mathscr{E})$, alors $ax_M+by_M+c=0$ ou encore, par contraposition, si $ax_M+by_M+c \neq 0$, alors le point M n'appartient pas à l'ensemble $(\mathscr{E})$.*

En résumé, le point M appartient à l'ensemble $(\mathscr{E})$ si et seulement si $ax_M+by_M+c=0$.

Démonstration :

1) Vérifions d'abord que l'ensemble $(\mathscr{E})$ n'est pas vide ou encore que l'ensemble $(\mathscr{E})$ contient au moins un point. On a $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
Si $a \neq 0$, soit $A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$. $ax_A+by_A+c = a \times \left(-\frac{c}{a}\right) + b \times 0 + c = -c+c = 0$. Donc, le point A appartient à l'ensemble $(\mathscr{E})$.
Si $b \neq 0$, soit $A\left(0, -\frac{c}{b}\right)$. $ax_A+by_A+c = a \times 0 + b \times \left(-\frac{c}{b}\right) + c = -c+c = 0$. Donc, le point A appartient à l'ensemble $(\mathscr{E})$.

Dans tous les cas, l'ensemble $(\mathscr{E})$ contient au moins un point que l'on note $A\left(x_A, y_A\right)$. On a donc $ax_A+by_a+c=0$ ou encore $c=-ax_A-by_A$.
Soit $\overrightarrow{u}(-b,a)$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas nul.

Soit M un point du plan dont on note (x,y) les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$.
M appartient à $(\mathscr{E})$ équivaut à $ax+by+c=0$ ou encore à $ax+by-ax_A-by_A=0$ ou encore à $a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$ ou encore à $\left(x-x_A\right)a-\left(y-y_A\right)(-b)=0$ ou encore à $\begin{vmatrix} x-x_A & -b \\ y-y_A & a \end{vmatrix} = 0$ ou encore à $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right)=0$ ou encore à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ colinéaires ou enfin au fait que M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

L'ensemble $(\mathscr{E})$ est donc une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-b,a)$.

■

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit (Δ) la droite d'équation $3x-4y+5=0$ dans le repère $\mathscr{R}$.

1) Les points suivants sont-ils des points de la droite (Δ) : $A\left(0, \frac{5}{4}\right)$, $B(2,3)$ et $C(-15,-10)$.

2) a) Les vecteurs suivants sont-ils des vecteurs directeurs de la droite (Δ) : $\overrightarrow{u_1}(-4,-3)$, $\overrightarrow{u_2}(8,5)$ et $\overrightarrow{u_3}\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$?

b) Quel est le coefficient directeur de la droite (Δ) ?

3) a) Déterminer le point D de la droite (Δ) d'abscisse 1.

b) Tracer la droite (Δ).

Solution 2 :

1) $3x_A-4y_A+5=3\times 0-4\times\frac{5}{4}+5=-5+5=0$. Donc le point A appartient à la droite (Δ).

$3x_B-4y_B+5=3\times 2-4\times 3+5=6-12+5=-1$ et en particulier $3x_B-4y_B+5\neq 0$. Donc le point B n'appartient pas à la droite (Δ).

$3x_C-4y_C+5=3\times(-15)-4\times(-10)+5=-45+40+5=0$. Donc le point C appartient à la droite (Δ).

2) a) Un vecteur directeur de la droite (Δ) est le vecteur $\vec{u}(4,3)$. $\overrightarrow{u_1}=-\vec{u}$ et donc le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

Ensuite,

$$\det\left(\vec{u},\overrightarrow{u_2}\right)=\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=4\times 5-8\times 3=-4.$$

En particulier, $\det\left(\vec{u},\overrightarrow{u_2}\right)\neq 0$ et donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires. Le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ n'est pas un vecteur directeur de la droite (Δ).

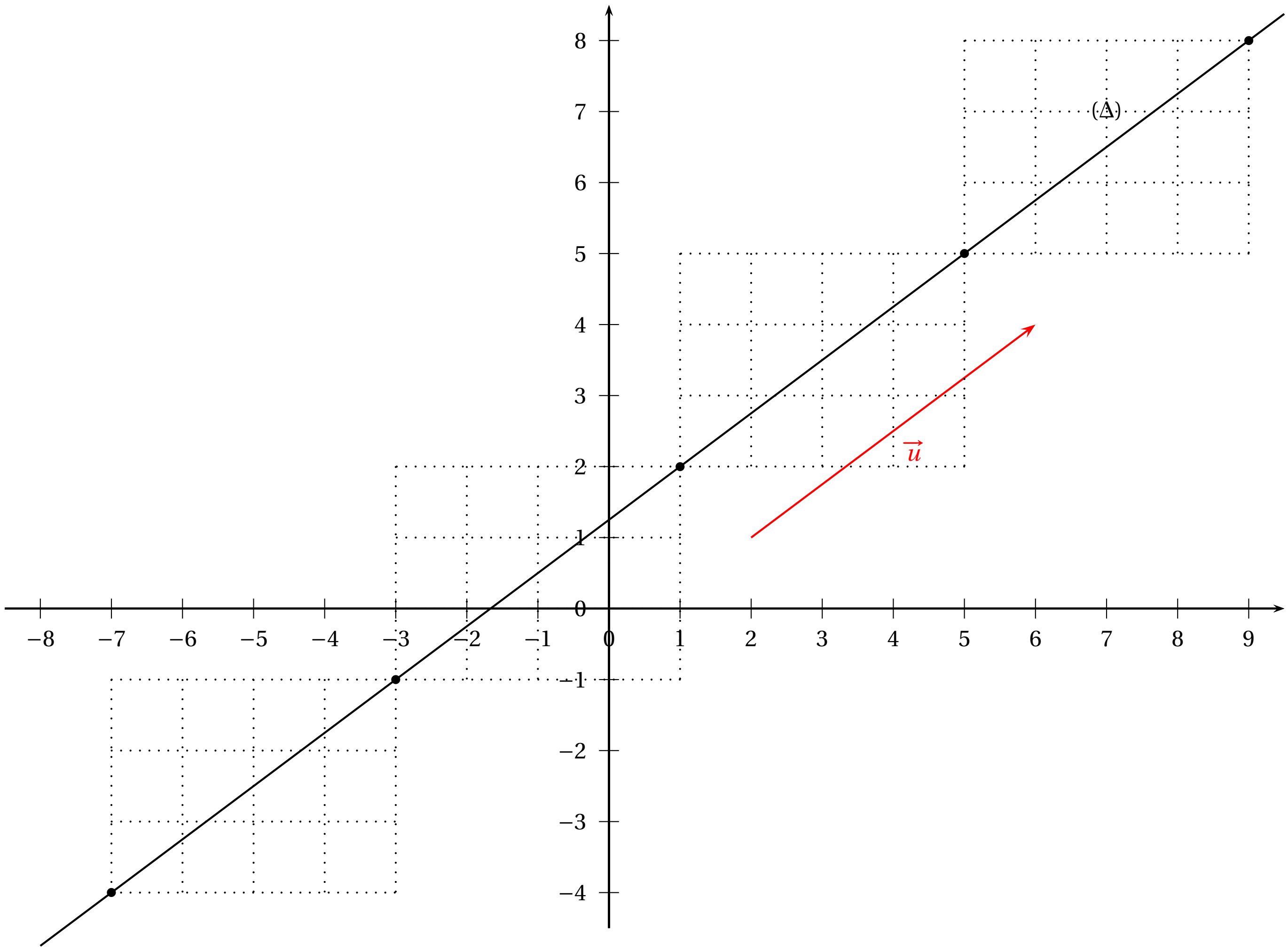
Enfin, $\overrightarrow{u_3}=\frac{1}{5}\vec{u}$ et donc le vecteur $\overrightarrow{u_3}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u_3}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

b) Un vecteur directeur de la droite (Δ) est le vecteur $\vec{u}(4,3)$. Le coefficient directeur de la droite (Δ) est $\frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}}$ c'est-à-dire $\frac{3}{4}$.

3) a) Soit D un point du plan d'abscisse 1. Notons $(1,y)$ ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ où y est un réel.

D appartient à (Δ) si et seulement si $3\times 1-4\times y+5=0$ ou encore $-4y+8=0$ ou encore $-4y=-8$ ou encore $y=\frac{-8}{-4}$ ou enfin $y=2$. Le point de la droite (Δ) d'abscisse 1 est le point $D(1,2)$.

b) La droite (Δ) est la droite passant par le point $D(1,2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(4,3)$. En reportant le vecteur $\vec{u}$ (on avance de 4 carreaux vers la droite puis on monte de 3 carreaux) ou le vecteur $-\vec{u}$ (on avance de 4 carreaux vers la gauche puis on descend de 3 carreaux), on obtient d'autres points « simples » de la droite (Δ) :



■

C Equations d'une droite parallèle à un axe de cordonnées

Théoreme 3

Une droite parallèle à l'axe des abscisses (Ox), admet dans le repère $\mathscr{R}$, une équation de la forme $y = k$ où k est un réel donné. En particulier, une équation de l'axe (Ox) est $y = 0$.
Inversement, l'ensemble d'équation $y = k$, où k est un réel donné, dans le repère $\mathscr{R}$, est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées (Oy), admet dans le repère $\mathscr{R}$, une équation de la forme $x = k$ où k est un réel donné. En particulier, une équation de l'axe (Oy) est $x = 0$.
Inversement, l'ensemble d'équation $x = k$, où k est un réel donné, dans le repère $\mathscr{R}$, est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Démonstration : Soit (Δ) une droite parallèle à l'axe des abscisses. (Δ) admet dans le repère $\mathscr{R}$ une équation de la forme $ax + ay + c = 0$ $(*)$ où a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Un vecteur directeur de (Δ) est le vecteur $\overrightarrow{u}(-b, a)$. (Δ) est parallèle à (Ox) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{u}(-b, a)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{i}(1, 0)$ ce qui équivaut à $a = 0$. Dans ce cas, on a nécessairement $b \neq 0$. L'équation $(*)$ s'écrit alors $by + c = 0$ ou encore $y = -\dfrac{c}{b}$. On a ainsi obtenu une équation de la forme $y = k$ où k est un réel donné.

Inversement, soit (Δ) la droite d'équation $y = k$ $(**)$ dans le repère $\mathscr{R}$, où k est un réel donné. L'équation $(**)$ s'écrit encore $0 \times x - 1 \times y + k = 0$. Un vecteur directeur de la droite (Δ) est le vecteur de coordonnées $(1, 0)$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{i}$.

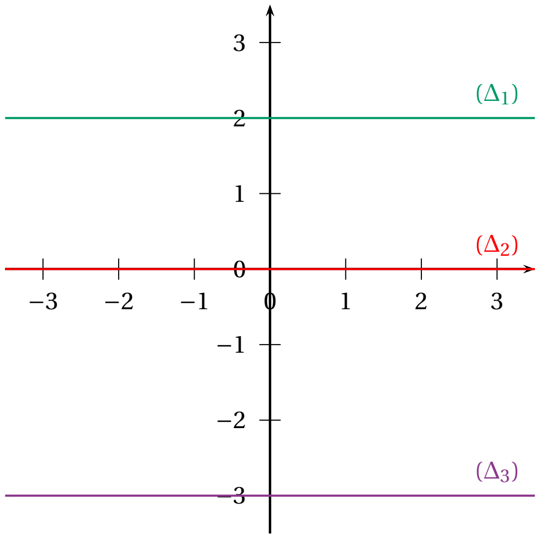
Puisque le vecteur $\overrightarrow{i}$ est un vecteur directeur de la droite (Ox), on en déduit que la droite (Δ) est parallèle à la droite (Ox).

Le cas où la droite (Δ) est parallèle à l'axe $(\mathrm{O}y)$ se traite de manière analogue.

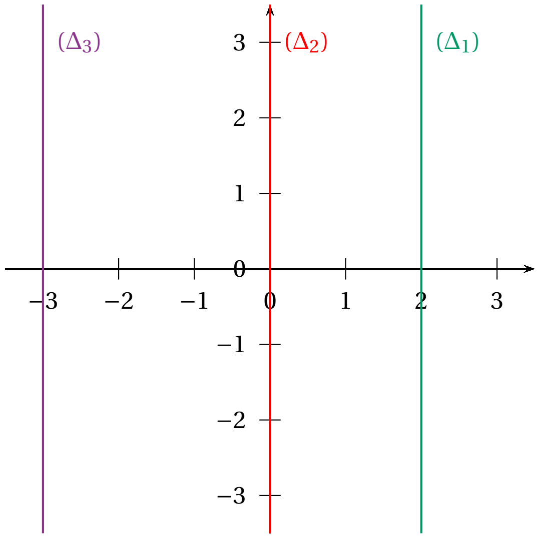
■

La droite (Δ) d'équation $x = k$ dans le repère $\mathscr{R}$, est l'ensemble des points d'abscisse x égale à k. C'est une droite parallèle à $(\mathrm{O}y)$.
La droite (Δ) d'équation $y = k$ dans le repère $\mathscr{R}$, est l'ensemble des points d'ordonnée y égale à k. C'est une droite parallèle à $(\mathrm{O}x)$.

Ci-dessous, on tracé les droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) d'équations respectives $y = 2$, $y = 0$ et $y = -3$ qui sont trois droites parallèles à l'axe des abscisses.



De même, on a tracé ci-dessous les droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) d'équations respectives $x = 2$, $x = 0$ et $x = -3$ qui sont trois droites parallèles à l'axe des ordonnées.



D Equation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Théoreme 4

Soit (Δ) une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. (Δ) admet une équation de la forme $y = ax + b$ et une seule. Cette équation s'appelle **l'équation réduite** de la droite (Δ).

De plus, le coefficient directeur de la droite (Δ) est a.
Un vecteur directeur de la droite (Δ) est le vecteur $\overrightarrow{u}(1, a)$.

☞ *Il faut noter que l'on dit **une** équation de (Δ) (car il n'y en a pas qu'une) et **l'**équation réduite de (Δ) (car il n'y en a qu'une).*

Démonstration : (Δ) admet une équation de la forme $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ $(*)$ où l'un des deux réels α ou β au moins est non nul. Un vecteur directeur de la droite (Δ) est le vecteur $\overrightarrow{u}(-\beta,\alpha)$. Puisque la droite (Δ) est parallèle à l'axe $(\mathrm{O}y)$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{j}$ ce qui impose $\beta\neq 0$.

L'équation $(*)$ s'écrit alors $\beta y=-\alpha x-\gamma$ ou encore $y=-\dfrac{\alpha}{\beta}x-\dfrac{\gamma}{\beta}$. On a ainsi obtenu une équation de la forme $y=ax+b$ $('**)$ où $a=-\dfrac{\alpha}{\beta}$ et $b=-\dfrac{\gamma}{\beta}$.

Vérifions maintenant l'unicité de a et b. L'équation $(**)$ s'écrit $a\times x+(-1)\times y+b=0$. Un vecteur directeur de la droite (Δ) est $\overrightarrow{u}(1,a)$ puis le coefficient directeur de la droite (Δ) est a. Ainsi, a est est nécessairement le coefficient directeur de la droite (Δ) (qui est uniquement défini) et donc le nombre a est uniquement défini.

Puisque la droite (Δ) n'est pas parallèle à l'axe $(\mathrm{O}y)$, la droite (Δ) a en commun un et un seul point avec l'axe $(\mathrm{O}y)$. On obtient l'ordonnée y de ce point en remplaçant x par 0 dans l'égalité $(*)$: $y=0\times x+b=b$. b est donc uniquement défini.

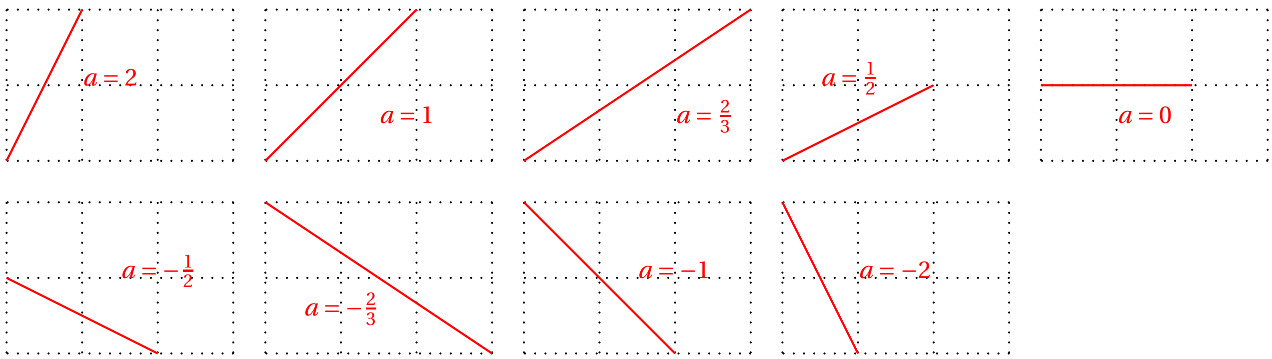
■

Si (Δ) est la droite d'équation $y=ax+b$, a est le **coefficient directeur** de la droite (Δ) et b est l'**ordonnée à l'origine** de la droite (Δ) (b est l'ordonnée du point de la droite (Δ) qui appartient à l'axe des ordonnées $(\mathrm{O}y)$).

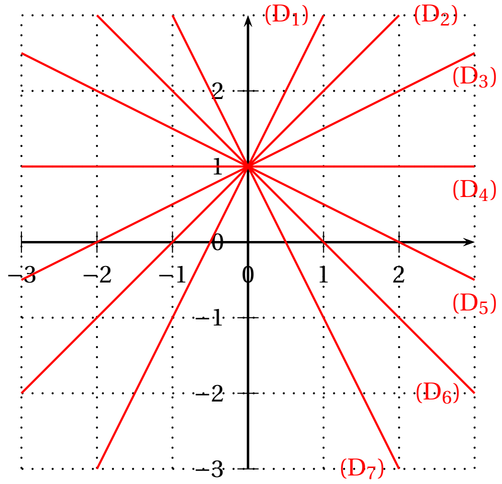
On doit savoir tracer immédiatement tracer une droite quand on a l'équation réduite $y=ax+b$. On part du point de coordonnées $(0,b)$ puis on trace la droite dans la direction indiquée par le coefficient directeur :

si $a>0$, la droite monte quand on lit le dessin de gauche à droite,
si $a<0$, la droite descend quand on lit le dessin de gauche à droite,
si $a=0$, la droite est parallèle à l'axe $(\mathrm{O}x)$ (droite horizontale).

Plus précisément, si $a>0$, quand on avance de 1 carreau vers la droite, on monte de a carreaux ou plus généralement, quand on avance d'une quantité vers la droite, on monte de a quantités (si on avance de deux carreaux, on monte de $2a$ carreaux, ...).
Si $a<0$, c'est la même chose mais en descendant.



Pour finir, on trace les droites (D_1) d'équation $y=2x+1$, (D_2) d'équation $y=x+1$, (D_3) déquation $y=\dfrac{1}{2}x+1$, (D_4) d'équation $y=1$, (D_5) d'équation $y=-\dfrac{1}{2}x+1$, (D_6) d'équation $y=-x+1$ et (D_7) d'équation $y=-2x+1$. Ces droites ont toutes la même ordonnée à l'origine à savoir 1.



E Résumé des compétences à acquérir

1 - Quand on dispose d'une équation cartésienne d'une droite (Δ) de la forme $ax+by+c=0$, on doit savoir :

- Fournir un point ou plusieurs points de (Δ) : on donne une valeur précise à x (ou à y) puis on détermine l'autre coordonnée y (ou x) grâce à l'équation.

  Par exemple, si (Δ) a pour équation $2x+3y+5=0$, $x=-1$ fournit $2\times(-1)+3y+5=0$ puis $y=-1$.
  Le point de coordonnées $(-1,-1)$ est un point de (Δ).
- Trouver un vecteur directeur de (Δ) : un vecteur directeur de (Δ) est le vecteur $\overrightarrow{u}(-b,a)$.
- Trouver le coefficient directeur de (Δ) (quand (Δ) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées) : le coefficient directeur de (Δ) est le rapport de l'ordonnée d'un vecteur directeur sur l'abscisse de ce vecteur directeur, à savoir $-\dfrac{a}{b}$.
- Tracer la droite (Δ) : on trouve un point simple (en évitant si possible des fractions) puis on reporte plusieurs fois un vecteur directeur vers la gauche ou vers la droite pour obtenir de nombreux points (3 ou 4 points assez espacés permettent de faire un tracé plus précis que seulement 2 points).
- Tester si un point donné A, appartient ou n'appartient pas à la droite (Δ) : on calcule calcule ax_A+by_A+c.

  Si on trouve 0, le point A appartient à la droite (Δ) et si on ne trouve pas 0, le point A n'appartient pas à la droite (Δ).

  Par exemple, si (Δ) a pour équation $2x+3y+5=0$, Le point $A(-1,-1)$ appartient à la droite (Δ) car $2x_A+3y_A+5=0$ et le point $B(1,-2)$ n'appartient pas à la droite (Δ) car $2x_B+3y_B+5\neq 0$.
- Tester si un vecteur non nul donné, est ou non un vecteur directeur de la droite (Δ) : on dispose d'un vecteur directeur, le vecteur $\overrightarrow{u}(-b,a)$. Si maintenant, $\overrightarrow{v}(\alpha,\beta)$ est un autre vecteur non nul, on calcule $\begin{vmatrix} -b & \alpha \\ a & \beta \end{vmatrix}$. Si on trouve 0, le vecteur $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de (Δ) et si on ne trouve pas 0, le vecteur $\overrightarrow{v}$ n'est pas un vecteur directeur de (Δ).
- Fournir l'équation réduite de la droite (Δ) (quand (Δ) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées) : on exprime y en fonction de x.

  Par exemple, si (Δ) a pour équation $2x+3y+5=0$, l'équation réduite de (Δ) est $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$.

2 - Quand on dispose d'une équation cartésienne d'une droite (Δ) de la forme $y=ax+b$, on doit savoir :

- Fournir un point ou plusieurs points de (Δ) : on dispose du point de coordonnées $(0,b)$ qui appartient à (Oy).
- Trouver le coefficient directeur de (Δ) : le coefficient directeur est a.
- Trouver un vecteur directeur de (Δ) : un vecteur directeur est le vecteur de coordonnées $(1,a)$.
- Tester si un point donné, appartient ou n'appartient pas à la droite (Δ) : on calcule ax_A+b. Si on trouve y_A, le point A appartient à la droite (Δ) et si on ne trouve pas y_A le point A n'appartient pas à la droite (Δ).

  Par exemple, si (Δ) a pour équation réduite $y=2x-1$, le point $A(1,1)$ appartient à (Δ) car $2x_A-1=y_A$ et le point $B(1,-3)$ n'appartient pas à (Δ) car $2x_B-1\neq y_B$.
- Tester si un vecteur non nul donné, est ou non un vecteur directeur de la droite (Δ) : si $\overrightarrow{v}(\alpha,\beta)$ est un vecteur tel que $\alpha\neq 0$, $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de (Δ) si et seulement si $\dfrac{\beta}{\alpha}$ est le coefficient directeur a de (Δ).

3 - Inversement, on doit savoir fournir une équation cartésienne d'une droite (Δ) quand :

- On connaît un point et un vecteur directeur de (Δ) : si $A\left(x_A,y_A\right)$ est un point de (Δ) et $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta)$ est un vecteur directeur de (Δ), l'égalité $\begin{vmatrix} x-x_A & \alpha \\ y-y_A & \beta \end{vmatrix}=0$ fournit après développement et réduction, une équation de la droite (Δ).
- On connaît deux points distincts A et B de (Δ) : on se ramène à la situation précédente en constatant que (Δ) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$.
- On connaît un point A et le coefficient directeur a de (Δ) (quand (Δ) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées) : l'ordonnée à l'origine b est alors déterminée par l'égalité $ax_A+b=y_A$.

  Par exemple, soit (Δ) la droite de coefficient directeur $a=-2$ passant par le point $A(-2,3)$. (Δ) a une équation de la forme $y=-2x+b$ où de plus $-2\times(-2)+b=3$ et donc $b=-1$.
  L'équation réduite de la droite (Δ) est $y=-2x-1$.

4 - Enfin, on doit savoir

- Reconnaître si une droite est parallèle à (Ox) ou à (Oy) quand on a une équation cartésienne : une droite parallèle à (Ox) a une équation du type $y=k$ et une droite parallèle à (Oy) a une équation du type $x=k$.

- Fournir immédiatement une équation cartésienne d'une droite parallèle à (Ox) ou à (Oy) quand on connaît de plus un point de cette droite.

  Par exemple, la parallèle à (Ox) passant par le point de coordonnées $(-1,2)$ a pour équation $y=2$ et la parallèle à (Oy) passant par le point de coordonnées $(-1,2)$ a pour équation $x=-1$.

II Intersections de droites

A Position relative de deux droites du plan

Théoreme 5

Soient a, b, c, a', b' et c' six réels tels que l'un des deux réels a ou b au moins est non nul et l'un des deux réels a' ou b' au moins est non nul.
Soient (Δ) la droite d'équation $ax+by+c=0$ dans le repère $\mathscr{R}$ et (Δ') la droite d'équation $a'x+b'y+c'=0$ dans le repère $\mathscr{R}$.

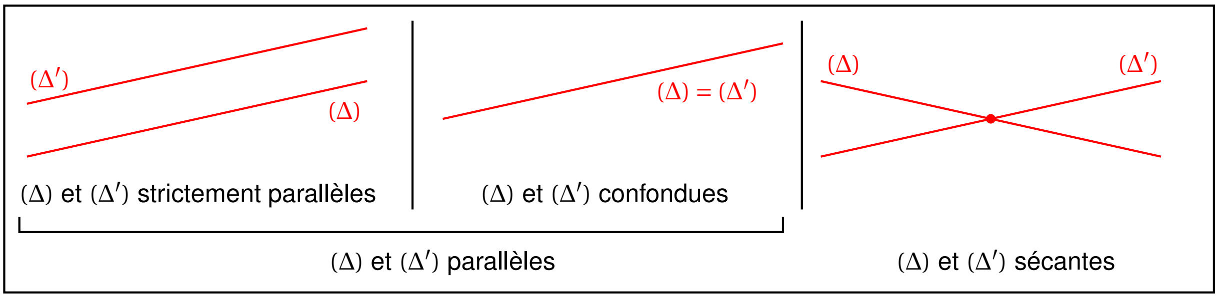
Les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.
Les droites (Δ) et (Δ') sont sécantes si et seulement si $ab'-a'b\neq 0$.

Démonstration : Un vecteur directeur de la droite (Δ) est $\overrightarrow{u}(-b,a)$ et un vecteur directeur de la droite (Δ') est $\overrightarrow{u'}(-b',a')$. Les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires ce qui équivaut à $\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix}=0$.

Or, $\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix}=(-b)\times a'-a\times(-b')=ab'-ba'$. Donc, les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$. Mais alors, on a aussi : les droites (Δ) et (Δ') sont sécantes si et seulement si $ab'-a'b\neq 0$.

■

En se rappelant que le mot « parallèles » signifie ou bien « strictement parallèles » ou bien « confondues », on a donc trois situations pour deux droites (Δ) et (Δ') :



Dans le cas où (Δ) et (Δ') sont sécantes, (Δ) et (Δ') ont en commun un point et un seul.
Dans le cas où (Δ) et (Δ') sont strictement parallèles, $(\Delta)\cap(\Delta')=\varnothing$ ((Δ) et (Δ') n'ont aucun point en commun).
Dans le cas où (Δ) et (Δ') sont confondues, $(\Delta)\cap(\Delta')=(\Delta)$ (et en particulier (Δ) et (Δ') ont une infinité de points en commun).

Théoreme 6

Soient a, b, a' et b' quatre réels. Soient (Δ) la droite d'équation $y=ax+b$ dans le repère $\mathscr{R}$ et (Δ') la droite d'équation $y=a'x+b'$ dans le repère $\mathscr{R}$.

Les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles si et seulement si $a=a'$.
Les droites (Δ) et (Δ') sont sécantes si et seulement si $a\neq a'$.

Démonstration : Un vecteur directeur de la droite (Δ) est le vecteur $\overrightarrow{u}(1,a)$ et un vecteur directeur de la droite (Δ') est le vecteur $\overrightarrow{u'}(1,a')$.

Les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a' \end{vmatrix}=0$ ou encore $a'-a=0$ ou enfin $a=a'$.

■

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On donne les points $A(-1,2)$, $B(2,1)$ et $C(-3,3)$ et la droite (Δ) d'équation $y=-x+1$.

1) Déterminer une équation de (Δ'), la parallèle à (AB) passant par C.

2) Déterminer une équation de (Δ''), la parallèle à (Δ) passant pas B.

3) Les droites (Δ') et (Δ'') sont-elles sécantes ?

Solution 3 :

1) Un vecteur directeur de la droite (Δ') est le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(2-(-1), 1-2)$ ou encore $(3,-1)$. (Δ') est donc la droite passant par le point $C(-3,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3,-1)$.

Soit $M(x,y)$ un point du plan. M appartient à (Δ') équivaut à $\det\left(\overrightarrow{CM}, \vec{u}\right)=0$ ou encore à $\begin{vmatrix} x+3 & 3 \\ y-3 & -1 \end{vmatrix}=0$ ou encore à $(-1)(x+3)-3(y-3)=0$ ou encore à $-x-3-3y+9=0$ ou encore à $-x-3y+6=0$ ou enfin à $x+3y-6=0$ (en multipliant par -1 les deux membres de l'égalité).

Une équation de la droite (Δ') est $x+3y-6=0$.

2) Le coefficient directeur de la droite (Δ) est égal à -1. Puisque (Δ'') est parallèle à (Δ), -1 est aussi le coefficient directeur de la droite (Δ''). La droite (Δ'') a une équation réduite de la forme $y=-x+b$ où b est un réel.
Le point B appartient à (Δ'') si et seulement si $-2+b=1$ ou encore $b=3$. Une équation de la droite (Δ'') est $y=-x+3$.

3) Un vecteur directeur de la droite (Δ') est $\vec{u}(3,-1)$ et un vecteur directeur de la droite (Δ'') est $\vec{v}(1,-1)$. Ensuite, $\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right)=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3\times 1-(-1)\times 1=4$. Ainsi, $\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\neq 0$ puis les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Mais alors, les droites (Δ') et (Δ'') sont sécantes.

■

B Systèmes de deux équations à deux inconnues

Nous allons maintenant apprendre à trouver les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.

Soient a, b, c, a', b' et c' six réels tels que l'un des deux réels a ou b est non nul et l'un des deux réels a' ou b' est non nul. Soient (Δ) et (Δ') les droites d'équations $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ dans le repère $\mathscr{R}$ respectivement.

On cherche les points M de coordonnées (x,y) qui appartiennent aux deux droites (Δ) et (Δ'). Ceci équivaut à trouver tous les couples de réels (x,y) vérifiant à la fois $ax+by+c=0$ et aussi $a'x+b'y+c'=0$ ou encore en abrégé

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right. \qquad (S).$$

(S) est un **système de deux équations linéaires à deux inconnues**. Une **solution du système** (S) est un couple de réels vérifiant les deux équations à la fois. Résoudre le système (S), c'est trouver tous les couples de réels (x,y) solutions du système (S). Deux systèmes (S) et (S') sont dits équivalents si et seulement si ces systèmes admettent le même ensemble de (couples) solutions.

Au vu des différentes positions relatives de deux droites, le système (S) admet ou bien un et un seul couple de réels solution, ou bien une infinité de couples de réels solutions, ou bien pas de couple de réels solution.

On met en place deux méthodes pour résoudre un tel système. On va décrire ces deux méthodes de résolution sur un exemple : on va résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} 2x-y-3=0 \\ 3x+4y+1=0 \end{array}\right. \quad (S)$.

MÉTHODE PAR SUBSTITUTION.

Dans une des deux équations (au choix), on exprime une des deux inconnues (au choix) en fonction de l'autre puis on remplace (ou on substitue) cette inconnue dans l'autre équation par l'expression obtenue.
Le système obtenu est un système équivalent où l'une des deux équations ne contient plus qu'une des deux inconnues.

On résout maintenant notre système servant d'exemple. On note que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=2\times 4-(-1)\times 3=11$ et en particulier, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\neq 0$. Le système (S) admet donc un couple de réels solution et un seul. Ensuite,

$\left\{\begin{array}{l} 2x-y-3=0 \\ 3x+4y+1=0 \end{array}\right.$ équivaut à

$\left\{\begin{array}{l} y=2x-3 \\ 3x+4y+1=0 \end{array}\right.$ ou encore à

$\left\{\begin{array}{l} y=2x-3 \\ 3x+4(2x-3)+1=0 \end{array}\right.$ (le moment de la substitution) ou encore à

$\left\{\begin{array}{l} 11x-11=0 \\ y=2x-3 \end{array}\right.$ (on a changé l'ordre des deux équations) ou encore à

$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2x-3 \end{array}\right.$ (on a résolu l'équation qui ne contient plus qu'une inconnue) ou encore à

$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2\times 1-3 \end{array}\right.$ ou enfin à

$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$.

Le système (S) admet un couple de réels solution et un seul : le couple $(1,-1)$ (on a placé la valeur de x en premier et la valeur de y en deuxième). Si on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions du système (S), on a donc $\mathscr{S}=\{(1,-1)\}$.

MÉTHODE PAR ADDITION (on dit aussi MÉTHODE PAR COMBINAISONS).

On multiplie les deux équations par des nombres de manière à ce que l'une des inconnues disparaisse quand on additionne membre à membre les deux équations obtenues.

Sur notre exemple, cela donne :

$\left\{\begin{array}{ll} 2x-y-3=0 & (\times 4) \\ 3x+4y+1=0 & \end{array}\right.$ (on veut éliminer y)

équivaut à $\left\{\begin{array}{ll} 8x-4y-12=0 & (\mathrm{I}) \\ 3x+4y+1=0 & (\mathrm{II}) \end{array}\right.$

ou encore à $\left\{\begin{array}{l} 11x-11=0 \\ 3x+4y+1=0 \end{array}\right.$ (on additionne membre à membres les équations (I) et (II) et on garde l'une des deux équations)

ou encore à $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ 3\times 1+4y+1=0 \end{array}\right.$ ou enfin à $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$.

Si on avait voulu éliminer x au lieu d'éliminer y, on aurait écrit

$\left\{\begin{array}{ll} 2x-y-3=0 & (\times 3) \\ 3x+4y+1=0 & (\times(-2)) \end{array}\right.$ équivaut à $\left\{\begin{array}{l} 6x-3y-9=0 \\ -6x-8y-2=0 \end{array}\right.$ ou encore à $\left\{\begin{array}{l} -11y-11=0 \\ -6x-8y-2=0 \end{array}\right.$ (en additionnant membre à membre les deux équations et en gardant l'autre équation) ce qui amène de nouveau à $y=-1$ et $x=1$.

Quand deux systèmes (S) et (S') sont équivalents, on peut écrire $(\mathrm{S}) \Leftrightarrow (\mathrm{S}')$. Mais encore une fois, l'usage du symbole $\Leftrightarrow$ se mettra en place petit à petit au lycée et peut ne pas vous être permis en classe de seconde.

Exercice 4

Résoudre les systèmes suivants : **1)** $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y=4 \\ 4x+y=7 \end{array}\right.$, **2)** $\left\{\begin{array}{l} 4x-6y=1 \\ -6x+9y=4 \end{array}\right.$, **3)** $\left\{\begin{array}{l} 5x+10y=15 \\ 3x+6y=9 \end{array}\right.$.

Solution 4 : On note (S) le système proposé et $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions du système (S).

1) $\left|\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{array}\right| = 3\times 1-2\times 4=-5$ et en particulier $\left|\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{array}\right| \neq 0$. Le système (S) admet donc un et un seul couple solution.

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y=4 \\ 4x+y=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-4x+7 \\ 3x+2y=4 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-4x+7 \\ 3x+2(-4x+7)=4 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-4x+7 \\ -5x+10=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-10}{-5} \\ y=-4x+7 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-4\times 2+7 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array}\right. .$$

Donc, $\mathscr{S}=\{(2,-1)\}$.

Une fois la résolution achevée, on est censé avoir trouvé le couple solution du système (S). Pour être sûr que nous n'avons pas fait une erreur de calcul, une vérification s'impose (cette vérification ne doit pas apparaître sur une copie normalement) : $3\times 2+2\times(-1)=6-2=4$ et $4\times 2+(-1)=8-1=7$. Le couple $(2,-1)$ est effectivement solution du système (S). Nous n'avons pas fait d'erreur de calcul.

2) $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 4\times 9-(-6)\times(-6)=36-36=0$. Le système (S) admet donc ou bien une infinité de couples solutions, ou bien pas de couple solution. On unifie les premiers membres de chaque équation en divisant par 2 le premier membre de la première équation et par -3 le premier membre de la deuxième équation :

$\left\{\begin{array}{l} 4x-6y=1 \\ -6x+9y=4 \end{array}\right.$ équivaut à $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y=\dfrac{1}{2} \\ 2x-3y=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$. Il n'existe pas de couple de réels (x,y) tel que $2x-3y$ soit à la fois égal à $\dfrac{1}{2}$ et à $-\dfrac{4}{3}$. Donc, $\mathscr{S}=\varnothing$.

3) $\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\times 6-10\times 3=30-30=0$. Le système (S) admet donc ou bien une infinité de couples solutions, ou bien pas de solution. On unifie les premiers membres de chaque équation en divisant par 5 le premier membre de la première équation et par 3 le premier membre de la deuxième équation :

$\left\{\begin{array}{l} 5x+10y=15 \\ 3x+6y=9 \end{array}\right.$ équivaut à $\left\{\begin{array}{l} x+2y=3 \\ x+2y=3 \end{array}\right.$ ou encore à $x+2y=3$ ou enfin à $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$. Les solutions de (S) sont les couples de la forme $\left(x,-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}\right)$ où x est un réel quelconque. Ceci s'écrit de manière plus synthétique $\mathscr{S}=\left\{\left(x,-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}\right),\ x\in\mathbb{R}\right\}$ ce qui se lit : $\mathscr{S}$ est l'ensemble des couples de réels de la forme $\left(x,-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}\right)$ où x est un réel quelconque.

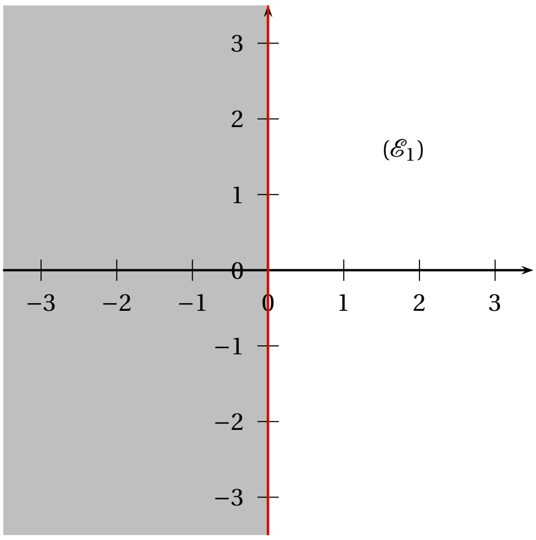
■

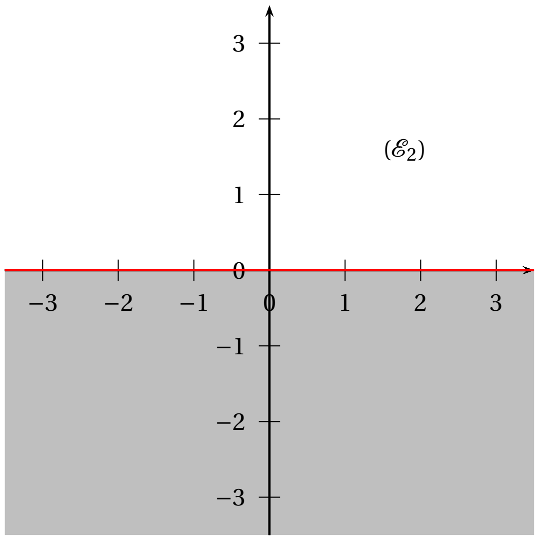
III Quelques régionnements du plan

Ce paragraphe est un approfondissement prévu par le programme officiel.

Commençons par représenter l'ensemble $(\mathscr{E}_1)$ des points M de coordonnées (x,y) dans le repère $\mathscr{R}$ tels que $x\geqslant 0$ et l'ensemble $(\mathscr{E}_2)$ des points M de coordonnées (x,y) dans le repère $\mathscr{R}$ tels que $y\geqslant 0$. $(\mathscr{E}_1)$ est l'ensemble des points du plan dont l'abscisse est un réel positif et $(\mathscr{E}_2)$ est l'ensemble des points du plan dont l'ordonnée est un réel positif.

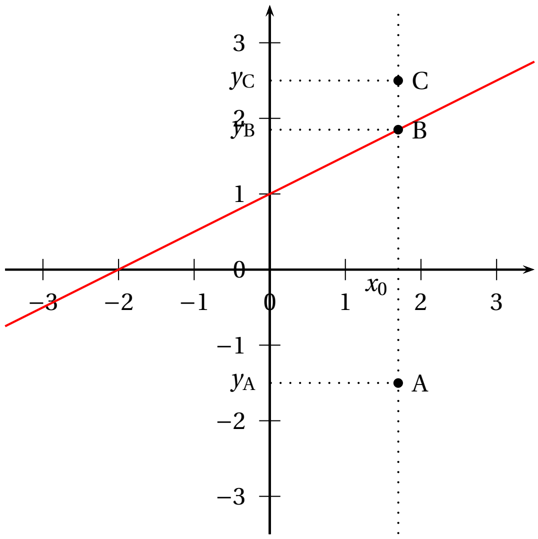
Les ensembles $(\mathscr{E}_1)$ et $(\mathscr{E}_2)$ sont des demi-plans. Ils sont représentés ci-dessous, colorés en blanc.





Représentons maintenant l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$ tels que $y \geqslant \frac{1}{2}x+1$.

Sur le graphique ci-dessous, on a d'abord construit la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x+1$ puis on a placé trois points A, B et C ayant tous les trois la même abscisse x_0.



Le point B est sur la droite (Δ) et donc $y_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}x_{\mathrm{B}}+1 = \frac{1}{2}x_0+1$.

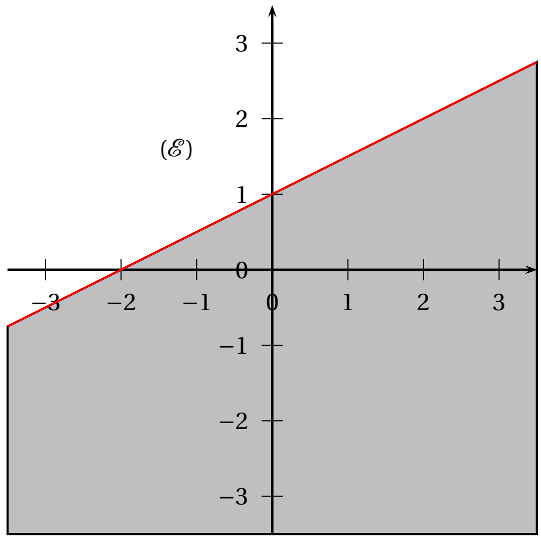
Le point C est sur la verticale passant par B et au-dessus du point B. Donc, l'ordonnée du point C est strictement supérieure à l'ordonnée du point B. Ceci s'écrit $y_{\mathrm{C}} > y_{\mathrm{B}}$ ou encore $y_{\mathrm{C}} > x_0+1$ ou enfin, $y_{\mathrm{C}} > \frac{1}{2}x_{\mathrm{C}}+1$.

Le point A est sur la verticale passant par B et strictement au-dessous du point B. Donc, l'ordonnée du point A est strictement inférieure à l'ordonnée du point B. Ceci s'écrit $y_{\mathrm{A}} < y_{\mathrm{B}}$ ou encore $y_{\mathrm{A}} < \frac{1}{2}x_0+1$ ou enfin, $y_{\mathrm{A}} < \frac{1}{2}x_{\mathrm{A}}+1$.

Ainsi, l'ensemble des points de coordonnées (x, y) dont l'abscisse x est égale à x_0 et l'ordonnée y est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}x+1$ est la demi-droite $[\mathrm{BC})$ ou encore la partie de la verticale (BC) qui est située au-dessus de la droite (Δ).

Si enfin on fait varier x_0 sur l'axe des abscisses, on obtient le fait qu'un point M de coordonnées (x, y) appartient à $(\mathscr{E})$ (c'est-à-dire que ses coordonnées vérifient $y \geqslant \frac{1}{2}x+1$) si et seulement si le point M est situé strictement au-dessus de la droite (Δ) ou sur la droite (Δ). L'ensemble $(\mathscr{E})$ est le demi-plan de frontière (Δ), situé au-dessus de (Δ), bord compris.

L'ensemble $(\mathscr{E})$ est la zone colorée en blanc ci-dessous.



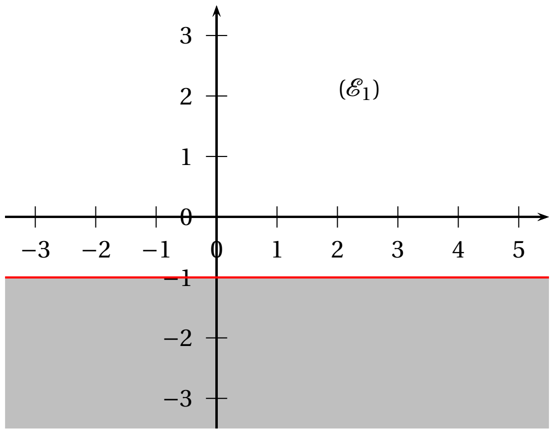
Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Représenter l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M du plan, de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$, vérifiant $x + y \leqslant 3$ et $2x + y \geqslant 5$ et $y \geqslant -1$.

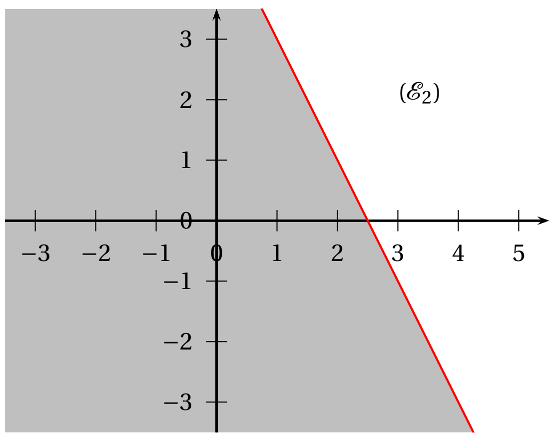
Solution 5 : L'ensemble $(\mathscr{E})$ est l'intersection des trois ensembles $(\mathscr{E}_1)$, $(\mathscr{E}_2)$ et $(\mathscr{E}_3)$ où

- $(\mathscr{E}_1)$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x + y \leqslant 3$,
- $(\mathscr{E}_2)$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $2x + y \geqslant 5$,
- $(\mathscr{E}_3)$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y \geqslant -1$.

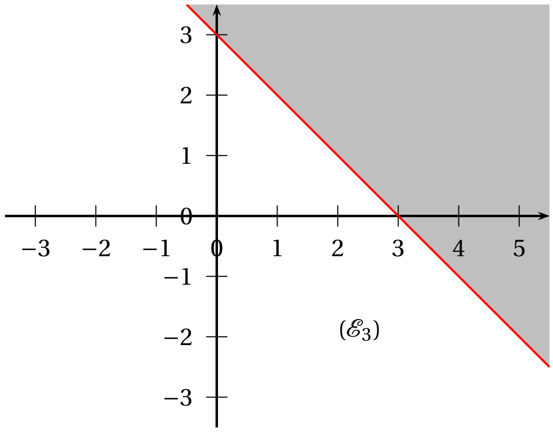
L'ensemble $(\mathscr{E}_1)$ est la zone en blanc ci-dessous et la zone en gris est le complémentaire de $(\mathscr{E}_1)$. La frontière du demi-plan $(\mathscr{E}_1)$ est la droite (D_1) d'équation $y = -1$.



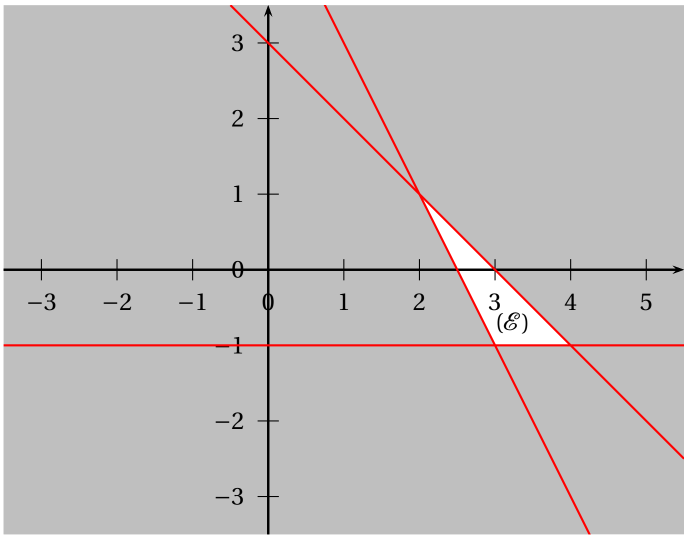
Puisque l'inégalité $2x + y \geqslant 5$ équivaut à l'inégalité $y \geqslant -2x + 5$, l'ensemble $(\mathscr{E}_2)$ est le demi-plan situé au-dessus de la droite (D_2) d'équation $2x + y = 5$, zone représentée en blanc ci-dessous. La zone en gris est le complémentaire de $(\mathscr{E}_2)$.



Puisque l'inégalité $x+y \leqslant 3$ équivaut à l'inégalité $y \leqslant -x+3$, l'ensemble $(\mathscr{E}_3)$ est le demi-plan situé au-dessous de la droite (D_3) d'équation $x+y=3$, zone représentée en blanc ci-dessous. La zone en gris est le complémentaire de $(\mathscr{E}_3)$.



On représente maintenant sur un même graphique les ensembles $(\mathscr{E}_1)$, $(\mathscr{E}_2)$ et $(\mathscr{E}_3)$. La zone en blanc est la zone commune aux trois ensembles $(\mathscr{E}_1)$, $(\mathscr{E}_2)$ et $(\mathscr{E}_3)$: c'est donc l'ensemble $(\mathscr{E})$



■