Planche n° 9. Les nombres complexes

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (IT)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1) $(3-i)z+2+i=0$.

2) $(1+2i)\overline{z}+i=0$.

3) a) $(3-i)z+(1+i)\overline{z}=1+i$.

b) $(3-i)z-(3+i)\overline{z}=0$.

Exercice n° 2 (IT)**

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1=1+i\sqrt{3},\ z_2=1+i,\ z_3=-2\sqrt{3}+2i,\ z_4=i,\ z_5=-2i,\ z_6=-3 \text{ et } z_7=1.$$

Exercice n° 3 (T)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2+z+1=0$
2) $2z^2+2z+1=0$
3) $z^2-2z\cos\theta+1=0$, θ réel donné.
4) $z^2-(6+i)z+(11+13i)=0$
5) $2z^2-(7+3i)z+(2+4i)=0$.

Exercice n° 4 (IT)**

Calculer de deux façons les racines carrées de $1+i$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice n° 5 (IT)** (Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas).

1) On pose $z=e^{2i\pi/5}$ puis $a=z+z^4$ et $b=z^2+z^3$. Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont a et b et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

2) Le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par le point M d'affixe i recoupe (Ox) en deux points I et J. Montrer que $x_I+x_J=x_I\times x_J=-1$ et en déduire une construction à la règle et au compas, du pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 dont un des sommets est le point d'affixe 1.

3) La diagonale $[AC]$ d'un pentagone régulier $(ABCDE)$ est recoupée par deux autres diagonales en deux points F et G. Calculer les rapports $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.

Exercice n° 6 : (*I)**

Dans le plan, on donne n points A_1, ... , A_n. Existe-t-il n points M_1,..., M_n tels que A_1 soit le milieu de $[M_1, M_2]$, A_2 soit le milieu de $[M_2, M_3]$,..., A_{n-1} soit le milieu de $[M_{n-1}, M_n]$ et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$.

Exercice n° 7 (***)

Soit $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donné. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Exercice n° 8 (*I)**

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que :

$$\begin{aligned}(ABC) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2+bz+c=0\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc \Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0.\end{aligned}$$

Exercice n° 9 (T)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

Exercice n° 10 (I)**

Déterminer les complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

Exercice n° 11 (IT)**

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}/\ z = \frac{1+ix}{1-ix}).$$

Exercice n° 12 (IT)**

Forme trigonométrique de $\dfrac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta + i\sin\theta}$ et de $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$.

Exercice n° 13 (*IT)

Calculer $(1+i\sqrt{3})^9$.

Exercice n° 14 (T)**

Déterminer les racines quatrièmes de i et les racines cubiques de $-\dfrac{8\sqrt{2}}{1+i}$.

Exercice n° 15 (*I)**

Soit $n \geqslant 2$. Montrer que les solutions de l'équation $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}-nz^n = 0$ sont de module inférieur ou égal à 1.

Exercice n° 16 (I)**

On considère l'équation $(E)\ :\ (z-1)^n - (z+1)^n = 0$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné

1) Montrer que les solutions de (E) sont imaginaires pures.
2) Montrer que les solutions de (E) sont deux à deux opposées.
3) Résoudre (E).

Exercice n° 17 (T)**

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on pose $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que

1) $|Z| = 1$.
2) $|Z| = 2$.
3) $Z \in \mathbb{R}$.
4) $Z \in i\mathbb{R}$.

Exercice n° 18 (*T)

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1) $z' = z + 3 - i$
2) $z' = 2z + 3$
3) $z' = iz + 1$
4) $z' = (1-i)z + 2 + i$

Exercice n° 19 (*T)** (ESIM 1993)

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\operatorname{sh} z = \dfrac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ et $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

1) Quels sont les nombres complexes z pour lesquels $\operatorname{th} z$ existe ?

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\operatorname{th} z = 0$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\left\{\begin{array}{l} |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z| < 1 \end{array}\right.$.

4) Montrer que la fonction th réalise une bijection de $\Delta = \left\{z \in \mathbb{C}/\ |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{4}\right\}$ sur $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}/\ |z| < 1\}$.

Exercice n° 20 (***)

Soit P l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive. On définit sur P la relation $\mathscr{R}$ par

$$\forall (z,z') \in P^2,\ z\mathscr{R}z' \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}/\ z' = \frac{z\cos\theta + \sin\theta}{-z\sin\theta + \cos\theta}.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur P.

Exercice nº 21 (*IT)**

Pour $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$, on pose $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$. Montrer que f réalise une bijection de $D = \{z \in \mathbb{C}/\ |z| < 1\}$ sur $P = \{z \in \mathbb{C}/\ \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Préciser f^{-1}.

Exercice nº 22 (***) Montrer que $\sum \cos(a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n$ (la somme comporte 2^n termes).

Exercice nº 23 (I)** Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \cos^2 x$ 2) $x \mapsto \cos^4 x$ 3) $x \mapsto \sin^4 x$ 4) $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$ 5) $x \mapsto \sin^6 x$
6) $x \mapsto \cos x \sin^6 x$ 7) $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$ 8) $x \mapsto \cos^3 x$.

Exercice nº 24 (***) Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l}\cos a + \cos b + \cos c = 0\\ \sin a + \sin b + \sin c = 0\end{array}\right.$ où a, b et c sont trois réels.

Exercice nº 25 (***) Calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots$

Exercice nº 26 (**) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

