8

Vecteurs du plan. Coordonnées dans un repère

Au programme

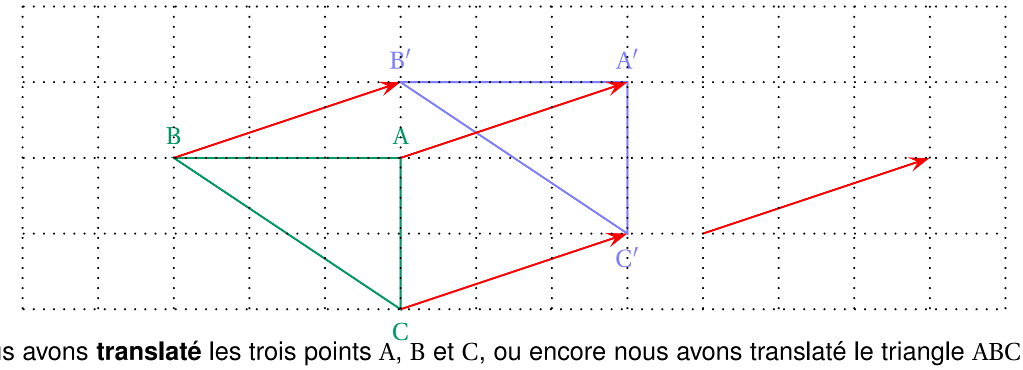
- √ Découvrir la notion de vecteur et représenter géométriquement un vecteur.
- √ Construire la somme de deux vecteurs ou le produit d'un vecteur par un réel.
- √ Connaître et utiliser la notion de vecteurs colinéaires (alignement, parallélisme).
- √ Manipuler les coordonnées d'un point dans un repère orthonormé du plan ou d'un vecteur dans une base orthonormée du plan.

Table des matières

I Vecteurs du plan

A Vecteur d'une translation

Au collège, vous avez appris à translater une figure :



Ci-dessus, nous avons **translaté** les trois points A, B et C, ou encore nous avons translaté le triangle ABC, de trois carreaux vers la droite et d'un carreau vers le haut et nous avons obtenu les points A', B' et C' ou encore nous avons obtenu le triangle $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$. On peut aussi dire que nous avons effectué une **translation** qui est un déplacement des trois points effectué sans tourner ni retourner la figure.

Le déplacement des trois points A, B et C a été représenté par une flèche. Cette flèche s'appelle un **vecteur**. Le mot vecteur a la même étymologie que le mot véhicule par exemple. Ces deux mots viennent du mot latin « vehere » qui veut dire conduire.

La flèche qui nous a permis de passer du point A au point A' se note $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$. De même, la flèche qui nous a permis de passer du point B au point B' se note $\overrightarrow{\mathrm{BB}'}$ et la flèche qui nous a permis de passer du point C au point C' se note $\overrightarrow{\mathrm{CC}'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$ est le vecteur d'**origine** A et d'**extrémité** A'. C'est le vecteur de la translation qui transforme A en A'.

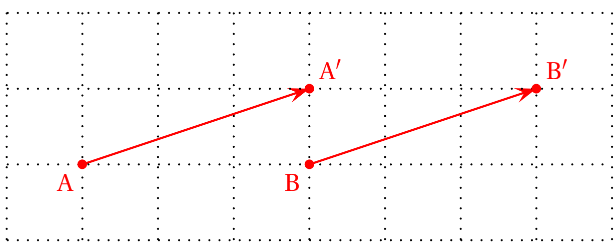
Les trois flèches $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$, $\overrightarrow{\mathrm{BB}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CC}'}$ sont en fait une seule et même flèche que l'on a déplacée. Elle est caractérisée par sa **direction**, son **sens** et sa **longueur**. Sur le dessin, la direction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$ est donnée par le quadrillage (trois carreaux vers la droite et un carreau vers le haut), le sens est donné par le bout de la flèche (on va de A vers A' et pas de A' vers A) et la longueur du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$ (on dit aussi la **norme** du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$) est $\sqrt{3^2+1^2}$ ou encore $\sqrt{10}$.

Le mot « direction » est piégeux car il n'a pas en sciences (mathématique ou physique), la signification usuelle de la vie courante : **la direction n'indique pas le sens**. Par exemple, quand on dit dans la vie courante qu'à Paris, on prend la direction de Lyon, on sous-entend qu'on parcourt l'autoroute Lyon-Paris dans le sens de Paris à Lyon. En sciences, ce n'est pas la signification qu'on veut donner au mot direction.

Historiquement, la direction est une ligne le long de laquelle on se déplace. Le mot « vertical » indique une direction avec une signification scientifique : quand on dit qu'on se déplace le long d'une verticale, on ne sait pas si on parcourt cette verticale de bas en haut ou de haut en bas.

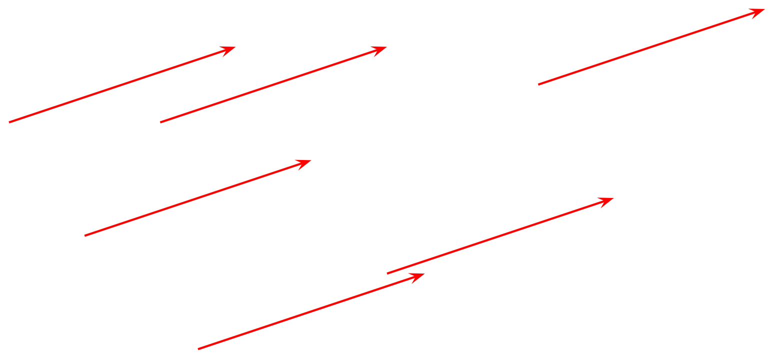
B Egalité de deux vecteurs

Dans la situation ci-dessous, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BB}'}$ ont la même longueur, la même direction et le même sens. Ils sont représentés par la même flèche que l'on a déplacée (sans tourner ni retourner). On dit qu'ils sont égaux et on écrit $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}=\overrightarrow{\mathrm{BB}'}$.



Quand des vecteurs sont égaux ($\overrightarrow{\mathrm{AA}'}=\overrightarrow{\mathrm{BB}'}=\overrightarrow{\mathrm{CC}'}=\ldots$), on décide de leur donner un nom commun qui n'utilise qu'une seule lettre, notation qui ne fait plus référence à l'origine et à l'extrémité du vecteur. Les lettres les plus courantes que l'on utilisera sont $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ ... ou aussi $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ ...

Quand on écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est le **vecteur de la translation** qui transforme à la fois A en A' et B en B' et C en C'. Ainsi, dans le dessin ci-dessous, les différentes flèches « sont un seul et même vecteur » et chaque flèche est un **représentant** de ce vecteur.



On analyse maintenant un cas particulier : le cas où on ne déplace pas les points. Quand $A = A'$, le vecteur de la translation qui transforme A en A' est appelé le **vecteur nul**. Il se note $\overrightarrow{0}$ (donc $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$).

On peut maintenant poser :

Définition 1

Soient A, B, C et D quatre points.

Si $A \neq B$ et $C \neq D$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont la même direction, le même sens et la même longueur.

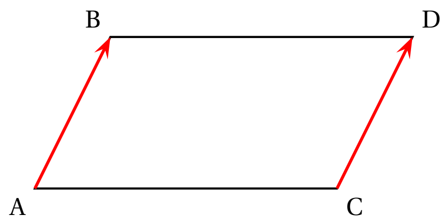
Si $A = B$ **ou** $C = D$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $A = B$ **et** $C = D$.

Au vu de la définition, on a immédiatement

Théoreme 1

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme (attention à l'ordre des points).

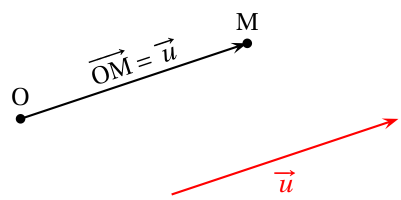


Signalons aussi une situation usuelle qui sera très utilisée par la suite :

Théoreme 2

Soient O un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. Il existe un point M du plan et un seul tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

Le point M du théorème précédent est l'image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.



C Norme d'un vecteur

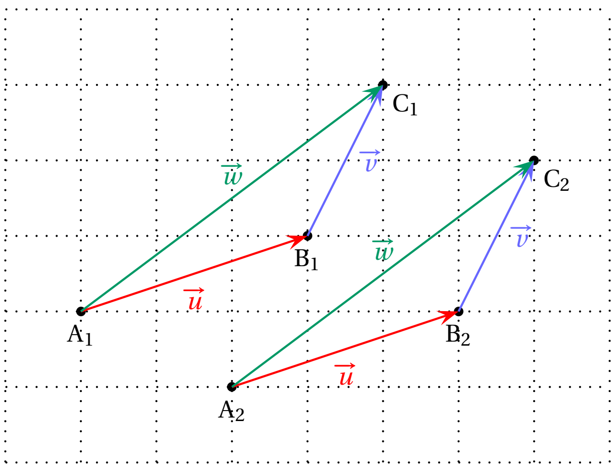
Définition 2

La **norme** d'un vecteur est sa longueur. La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ se note $\|\overrightarrow{u}\|$.

Ainsi, si A et B sont deux points, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \mathrm{AB}$. On note en particulier que $\left\|\overrightarrow{0}\right\| = 0$.

D Addition des vecteurs. Relation de CHASLES

Considérons maintenant deux translations : la translation t qui transforme A_1 en B_1 et A_2 en B_2 et la transformation t' qui transforme B_1 en C_1 et B_2 en C_2 (voir dessin ci-dessous). On note $\overrightarrow{u}$ le vecteur de la translation t et $\overrightarrow{v}$ le vecteur de la translation t'. On a donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1} = \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1} = \overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2}$.



On admet que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2}$ sont égaux. La transformation qui fait passer directement de A_1 à C_1 et de A_2 à C_2 est une translation dont on note $\overrightarrow{w}$ le vecteur.

La translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ est obtenue en enchainant la translation t de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis la translation t' de vecteur $\overrightarrow{v}$. On décide de noter $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ le vecteur $\overrightarrow{w}$ résultant de cet enchainement : $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

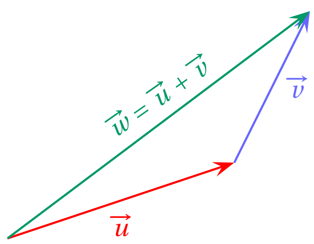
On vient ainsi de définir la **somme des deux vecteurs** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Le fait d'avoir utilisé le symbole + entre deux vecteurs $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ comme nous le faisons entre deux nombres $(2+3)$ vient de l'analogie des règles de calcul entre l'addition des vecteurs et l'addition des nombres.

Ces règles de calcul seront exposées plus loin dans le théorème 3.

On peut poser :

Définition 3

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. La **somme** de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{w}$ de la translation résultant de l'enchainement de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. On note alors $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.



Les règles de calcul usuelles sont :

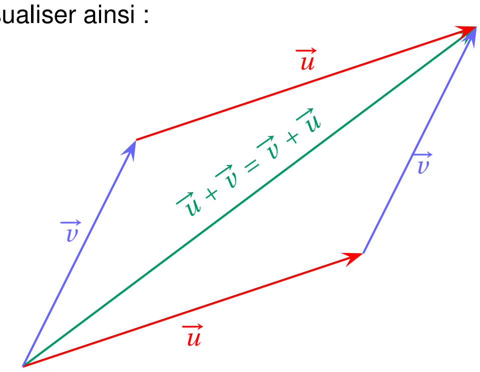
Théoreme 3

1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

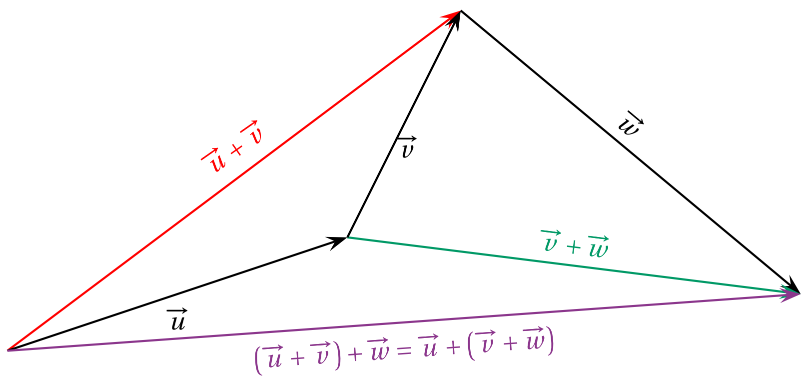
2) Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$.

3) Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.

L'égalité $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ peut se visualiser ainsi :



L'égalité $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$ est un peu plus délicate à visualiser :



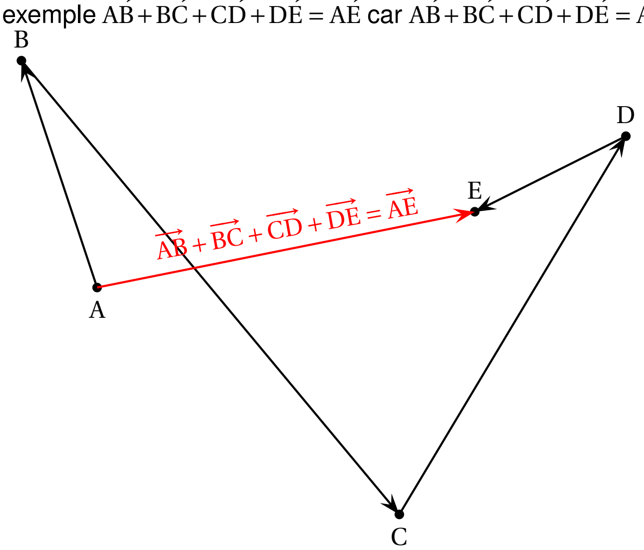
Cette règle de calcul (dite associativité de l'addition) permet d'écrire des expressions sans parenthèses du type $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, ce qui signifie au choix $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}$ ou aussi $\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$.

Si maintenant on pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ (l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant aussi l'origine du vecteur $\overrightarrow{BC}$), on obtient une égalité portant le nom de **relation de CHASLES** :

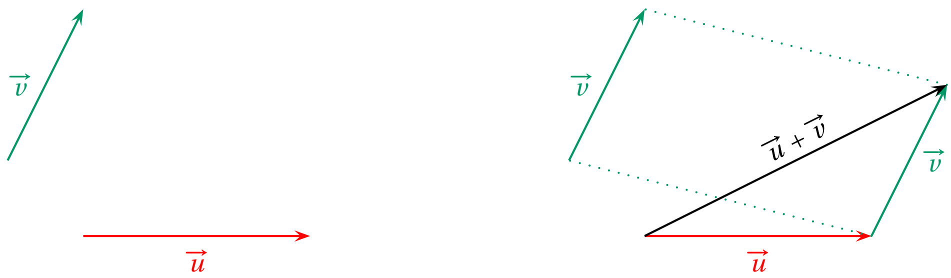
Théoreme 4

Pour tous points A, B et C, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

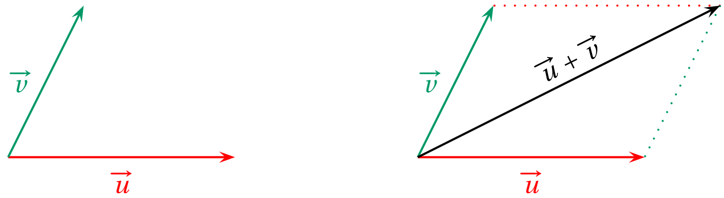
Plus généralement, on a par exemple $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$ car $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.



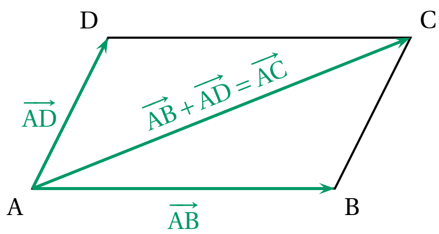
Quand on veut construire la somme de deux vecteurs, on a deux situations types. La première des situations est celle qui a été envisagée depuis le début de ce paragraphe. On déplace si besoin les flèches représentant les vecteurs pour que l'extrémité de la première flèche soit l'origine de la deuxième :



Mais on doit savoir aussi construire immédiatement la somme quand les flèches représentant les deux vecteurs ont la même origine. La somme est alors la diagonale (orientée) du parallélogramme bâti sur les deux vecteurs :

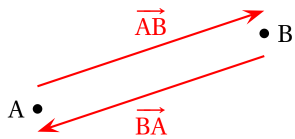


Ainsi, dans un parallélogramme ABCD, on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.



E Opposé d'un vecteur. Différence de deux vecteurs

Soient A et B deux points distincts. On pose $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de la translation qui transforme A en B. Le vecteur de la translation qui transforme B en A, à savoir le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, a la même direction que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (c'est-à-dire la direction de la droite (AB)), la même longueur $(\mathrm{BA}=\mathrm{AB})$ mais un sens opposé. Si on applique à A la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, on obtient B puis si on applique à B la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, on revient à A : « on remet A à sa place après l'avoir déplacé ».



D'autre part, si $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\overrightarrow{0}$ et le vecteur qui « remet A à sa place » est le vecteur nul $\overrightarrow{0}$. Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 4

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul. L'**opposé** de $\overrightarrow{u}$, noté $-\overrightarrow{u}$, est le vecteur qui a même direction que $\overrightarrow{u}$, même longueur et sens opposé.

D'autre part, l'opposé du vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est le vecteur nul lui-même : $-\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$.

Ainsi, par définition, on a

Théoreme 5

Soient A et B deux points. Alors, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Et presque par définition, on a

Théoreme 6

Soit $\vec{u}$ un vecteur. Pour tout vecteur $\vec{v}$, l'égalité $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{v} = -\vec{u}$.

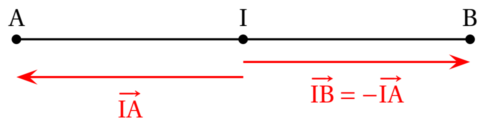
Donc, pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Avec la notion d'opposé d'un vecteur, on peut donner une caractérisation vectorielle du milieu d'un segment :

Théoreme 7

Soient A et B deux points. Soit I un point du plan.

I est le milieu du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
I est le milieu du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. .



Définition 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. La différence $\vec{u} - \vec{v}$ est la somme de $\vec{u}$ et de $-\vec{v}$:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Théoreme 8

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. L'égalité $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ équivaut à l'égalité $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$.

Démonstration : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

Si $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, alors $\vec{u} + \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{w} + (-\vec{v})$ puis $\vec{u} + \vec{0} = \vec{w} - \vec{v}$ et finalement $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$.

Si $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$, alors $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} + (-\vec{v}) + \vec{v}$ puis $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} + \vec{0}$ et finalement $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.

On a montré que l'égalité $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ équivaut à l'égalité $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$.

■

On vient ainsi d'apprendre à faire passer un vecteur de l'autre côté du signe = pour l'addition.

F Multiplication d'un vecteur par un réel

Dans ce paragraphe, on va définir des expressions comme $2\vec{u}$ ou $-3\vec{u}$ ou $1{,}7\vec{u}$ ou même $0\vec{u}$.

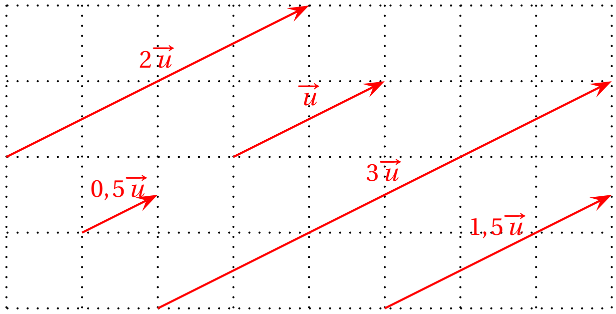
Définition 6

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.

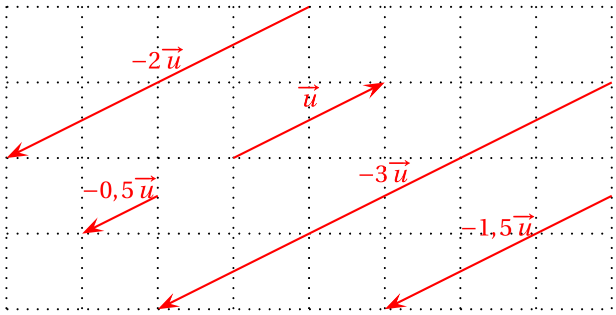
- si $k > 0$, $k\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction et même sens que $\vec{u}$ et dont la longueur est k fois la longueur de $\vec{u}$.
- si $k < 0$, $k\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction que $\vec{u}$, un sens contraire à $\vec{u}$ et dont la longueur est $-k$ fois la longueur de $\vec{u}$.

Enfin, on pose pour tout vecteur $\vec{u}$, $0\vec{u} = \vec{0}$ et pour tout réel k, $k\vec{0} = \vec{0}$.

Ci-dessous, on donne des exemples avec $k > 0$. Les vecteurs $0{,}5\vec{u}$, $2\vec{u}$, $2{,}5\vec{u}$ et $3\vec{u}$ ont tous la même direction et le même sens que le vecteur $\vec{u}$. Leurs normes sont respectivement $0{,}5$ fois, 2 fois, $2{,}5$ fois et 3 fois la norme de $\vec{u}$.



Quand $k < 0$, alors $-k > 0$. Les vecteurs $-0,5\overrightarrow{u}$, $-2\overrightarrow{u}$, $-2,5\overrightarrow{u}$ et $-3\overrightarrow{u}$ ont tous la même direction que $\overrightarrow{u}$, un sens contraire à celui du vecteur $\overrightarrow{u}$. Leurs normes sont respectivement $0,5$ fois, 2 fois, $2,5$ fois et 3 fois la norme de $\overrightarrow{u}$ (si $k = -2$, alors $-k = 2$, si $k = -2,5$, alors $-k = 2,5$, ...).



Par définition de la norme du vecteur $k\overrightarrow{u}$, on a presque immédiatement :

Théoreme 9

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout réel k, $\left\|k\overrightarrow{u}\right\| = |k| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$.

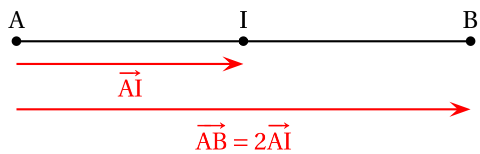
Pour tous points A et B et tout réel k, $\left\|k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = |k| \times \mathrm{AB}$.

Avec la notion de multiplication d'un vecteur par un réel, on peut donner une caractérisation vectorielle du milieu d'un segment :

Théoreme 10

Soient A et B deux points. Soit I un point du plan.

I est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}$.
I est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. .



On énonce maintenant les différentes règles de calcul concernant l'addition des vecteurs et la multiplication des vecteurs par un réel. On constate que ces règles sont « les mêmes » que les règles de calcul concernant l'addition et la multiplication des nombres. En particulier, on a la possibilité de distribuer :

Théoreme 11

1) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tout réel k, $k\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$ et $k\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} - k\overrightarrow{v}$.

2) Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tous réels k et k', $(k+k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$ et $(k-k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} - k'\overrightarrow{u}$.

3) Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tous réels k et k', $k\left(k'\overrightarrow{u}\right) = (kk')\overrightarrow{u}$.

4) Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

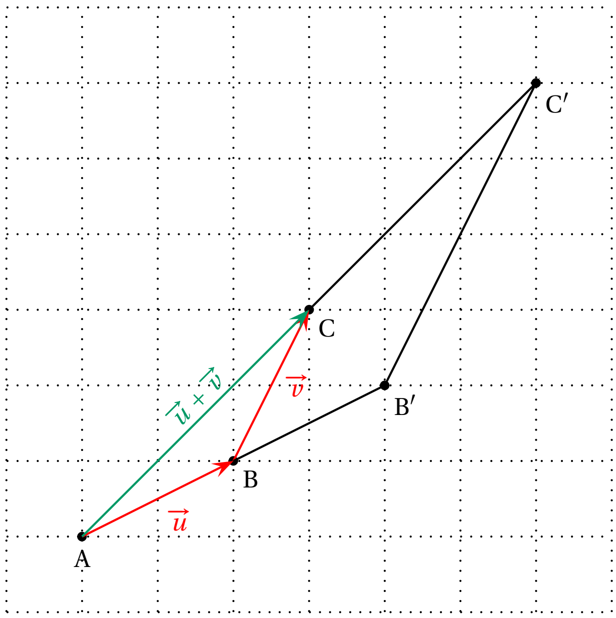
5) Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $(-1)\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.

Démonstration : Ce théorème est particulièrement fastidieux à démontrer, tant il y a de cas de figure à envisager, et pour une fois, nous vous demandons de faire globalement confiance. On va tout de même analyser quelques situations précises.

On commence par les deux dernières (4) et 5)). Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, le vecteur $1\overrightarrow{u}$ est par définition le vecteur qui a même direction, même sens et même norme que le vecteur $\overrightarrow{u}$: c'est effectivement le vecteur $\overrightarrow{u}$.
Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, le vecteur $(-1)\overrightarrow{u}$ est par définition le vecteur qui a même direction, même norme que le vecteur $\overrightarrow{u}$ et un sens contraire au sens du vecteur $\overrightarrow{u}$: c'est effectivement le vecteur $-\overrightarrow{u}$, opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$.
En énonçant les règles 4) et 5), il s'agissait d'énoncer explicitement des évidences tout en se convaincant que les différentes définitions fonctionnaient bien ensemble.

On analyse maintenant l'égalité $k\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$ dans le cas où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et n'ont pas la même direction et où $k = 2$.

On se donne A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$. On a donc $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$. On note B' et C' les points tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}'} = 2\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}'} = 2\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)$.

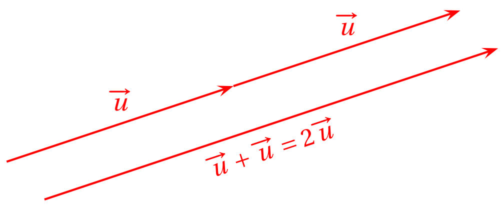


Le point B appartient au segment $[\mathrm{AB}']$ (car B est le milieu de $[\mathrm{AB}']$) et le point C appartient au segment $[\mathrm{AC}']$. De plus, $\dfrac{\mathrm{AB}'}{\mathrm{AB}} = 2 = \dfrac{\mathrm{AC}'}{\mathrm{AC}}$. D'après le théorème de THALES, la droite (BC) est parallèle à la droite $(\mathrm{B}'\mathrm{C}')$. Toujours d'après le théorème de THALES, $\dfrac{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}{\mathrm{BC}} = 2$ puis $\mathrm{B}'\mathrm{C}' = 2\mathrm{BC}$. Puisque d'autre part, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}$ ont même direction et même sens, on en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{C}'} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. Ainsi,

$$2\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{\mathrm{AC}'} = \overrightarrow{\mathrm{AB}'} + \overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{C}'} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}.$$

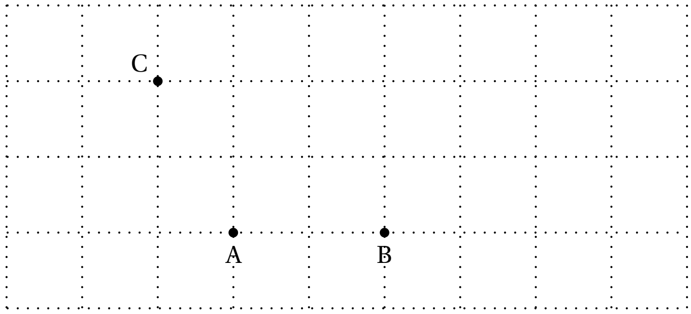
■

On doit enfin noter que $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{u}$, ..., ou aussi $-\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{u}$ ... Par exemple, le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}$ est un vecteur qui a même direction (si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$) et même sens que $\overrightarrow{u}$ et longueur double :

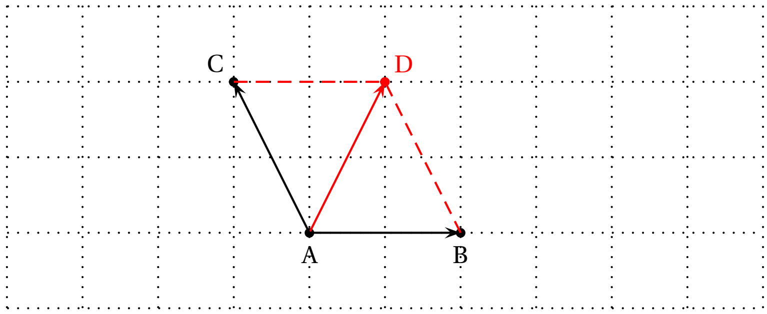


Exercice 1

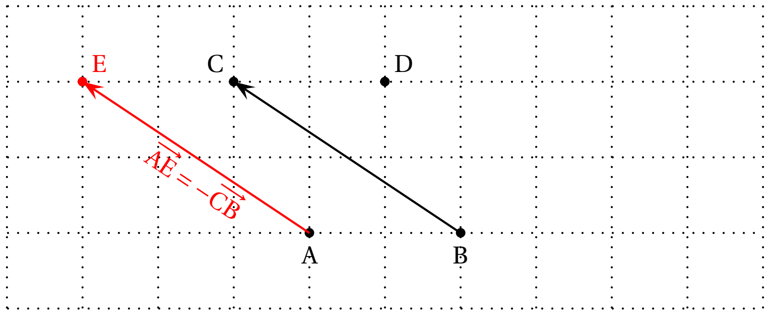
Reproduire la figure suivante puis placer les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}$.



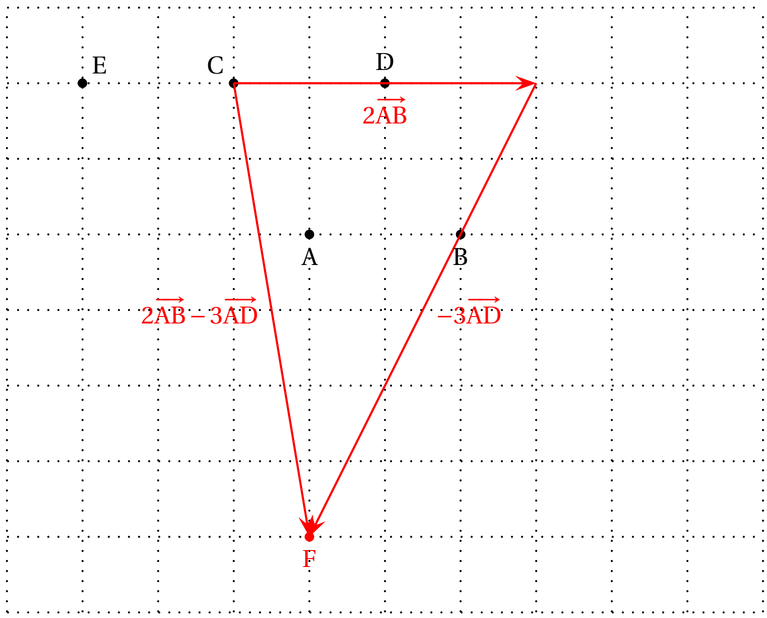
Solution 1 : Le point D est le point tel que ABDC est un parallélogramme :



Ensuite, $-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$ puis on place le vecteur $\overrightarrow{BC}$ pour qu'il ait pour origine le point A :



Enfin, on construit le vecteur $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}$ à partir du point C :



■

G Vecteurs colinéaires

Définition 7

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** (on dit aussi $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$) si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.

D'autre part, on adopte la convention que le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur. Ainsi, si $\vec{u}$ est un vecteur donné, un vecteur de la forme $k\vec{u}$ (k réel donné) est colinéaire à $\vec{u}$ et inversement, un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est un vecteur de la forme $k\vec{u}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{u}$. On adopte donc une nouvelle définition :

Définition 8

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou ($\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ et il existe un réel non nul k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$).

Puisque deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ces deux vecteurs ont la même direction, on vient d'obtenir un outil pour caractériser l'alignement de trois points :

Théoreme 12

Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.

On note que dans le théorème précédent, on n'a en fait pas besoin de supposer les points A, B et C sont deux à deux distincts car deux points sont toujours alignés.

La notion de colinéarité est aussi un outil pour caractériser le parallélisme de deux droites. On commence par définir la notion de vecteur directeur d'une droite :

Définition 9

Soit (D) une droite.

Un **vecteur directeur** de la droite (D) est un vecteur de la forme $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ où A et B sont deux points distincts de la droite (D).

On peut alors énoncer :

Théoreme 13

Soient (D) et (D') deux droites.

Les droites (D) et (D') sont parallèles si et seulement si il existe un vecteur directeur de (D) et un vecteur directeur de (D') qui sont colinéaires.

De plus, si les droites (D) et (D') sont parallèles, tout vecteur directeur de (D) est colinéaire à tout vecteur directeur de (D').

On termine cette séquence par un retour sur le point de concours des trois médianes d'un triangle.

Exercice 2

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts. On note I le milieu du segment $[\mathrm{BC}]$, J le milieu du segment $[\mathrm{CA}]$ et K le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$.

1) a) Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

b) En déduire qu'il existe un point et un seul, noté G, tel que $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$.

2) a) Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{GI}} = \vec{0}$. Enoncer deux autres égalités analogues

b) Montrer que G appartient que G appartient aux trois médianes du triangle ABC .

c) Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AI}}$.

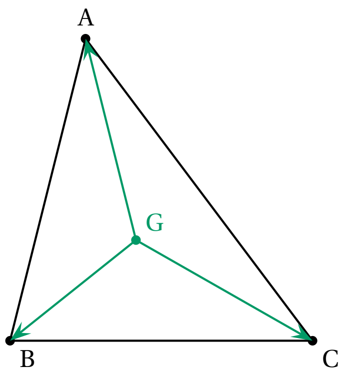
Solution 2 :

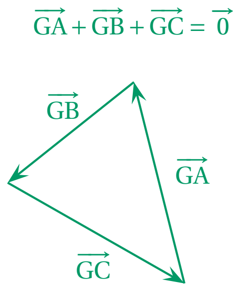
1) a) Soit M un point du plan. D'après la relation de CHASLES,

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$

b) Soit M un point du plan. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$ équivaut à $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$ puis à $3\overrightarrow{MA}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ puis à $-3\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ puis à $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et finalement à $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Soit $\overrightarrow{u}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. Il existe un point M et un seul tel que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{u}$. Ceci montre l'existence et l'unicité du point G.





2) a) D'après la relation de CHASLES, l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ fournit l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ puis $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{0}$ (car, I étant le milieu du segment $[BC]$, on a $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$).

Ainsi, $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{0}$. De même, $\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GJ}=\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{0}$.

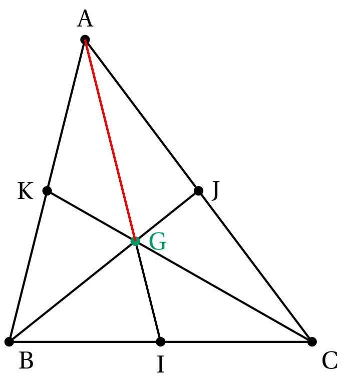
b) L'égalité $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{0}$ s'écrit encore $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GI}$. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires et on en déduit que les trois points A, G et I sont alignés.

On en déduit encore que le point G appartient à la médiane issue de A du triangle ABC. De même, le point G appartient à la médiane issue de B du triangle ABC et à la médiane issue de C du triangle ABC. On a redémontré que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

c) D'après la relation de CHASLES, l'égalité $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{0}$ s'écrit encore $\overrightarrow{GA}+2\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AI}\right)=\overrightarrow{0}$ puis $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{0}$ puis $-3\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{0}$ puis $-3\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AI}$ puis $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AI}$ et finalement

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

Le point G est donc « au deux tiers de chaque médiane ».



■

H Homothéties

Ce paragraphe est un approfondissement prévu par le programme officiel. On connaît déjà un premier type de transformation du plan : les translations.

Soient $\vec{u}$ un vecteur puis t la translation de vecteur $\vec{u}$. Soient M et M' deux points du plan. Dire que M' est le translaté de M par la translation t équivaut à $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \vec{u}$.

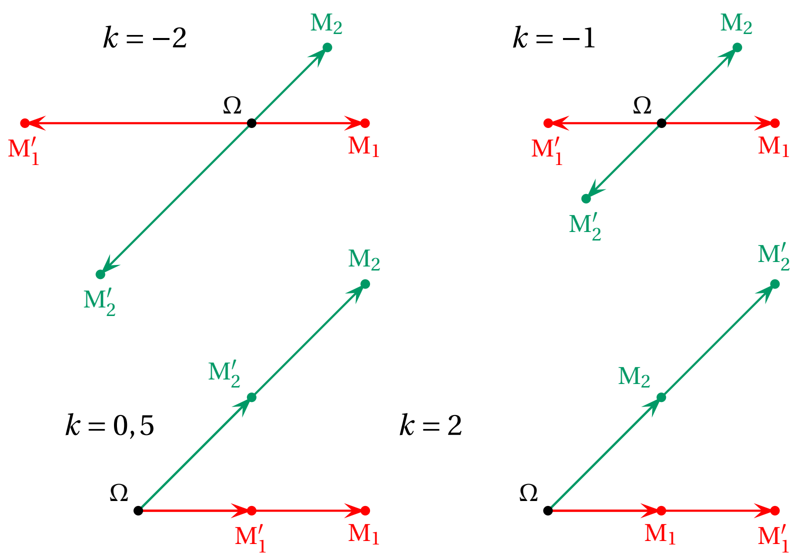
On va maintenant analyser un autre type de transformation : les **homothéties**.

Définition 10

Soient Ω un point du plan et k un réel.

L'**homothétie** h **de centre** Ω **et de rapport** k est définie par : pour tous points M et M' du plan, M' est l'image de M par h équivaut à $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'} = k\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$.

On visualise l'effet d'une homothétie sur quelques exemples quand k est l'un des réels -2, -1, $0,5$ et 2 :



On peut noter que l'homothétie de centre Ω de rapport -1 est aussi la symétrie centrale de centre Ω.

II Repérage. Coordonnées

A Bases orthonormées du plan. Repères orthonormés du plan

Définition 11

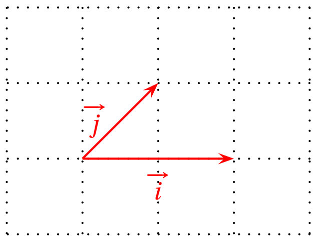
Une **base** du plan est un couple de deux vecteurs $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ où les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

La base $\mathscr{B}$ est **orthonormée** (ou orthonormale) si et seulement si les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires et ont chacun une norme égale à 1.

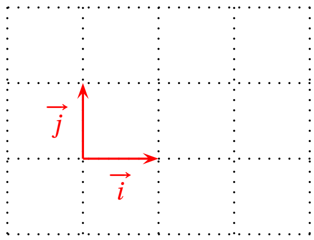
Un **repère** du plan est un triplet $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où O est un point donné du plan et $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une base du plan.

Le repère $\mathscr{R}$ est **orthonormé** (ou orthonormal) si et seulement si la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est orthonormée.

$\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base du plan



$\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base orthonormée du plan



B Coordonnées dans un repère (ou une base) orthonormé(e)

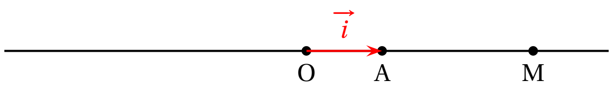
Les différents théorèmes qui suivent, préparent la définition des coordonnées d'un point dans un repère orthonormé ou d'un vecteur dans une base orthonormée.

Théoreme 14

Soient O un point du plan et $\overrightarrow{i}$ un vecteur du plan de norme 1. Soit A le point du plan tel que $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{i}$.

Pour tout point M de la droite (OA), il existe un réel x tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\overrightarrow{i}$.

Démonstration : Puisque le point M appartient à la droite (OA), les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ sont colinéaires. Puisque $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \overrightarrow{0}$, il existe donc un réel x tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ou encore $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\overrightarrow{i}$.



On note que si $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$ et les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{i}$ sont de mêmes sens, alors $x = \mathrm{OM}$ convient, si $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$ et les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{i}$ sont de sens contraires, alors $x = -\mathrm{OM}$ convient et si $\mathrm{M} = \mathrm{O}$, alors $x = 0$ convient. ∎

Théoreme 15

Soit $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Pour tout point M, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

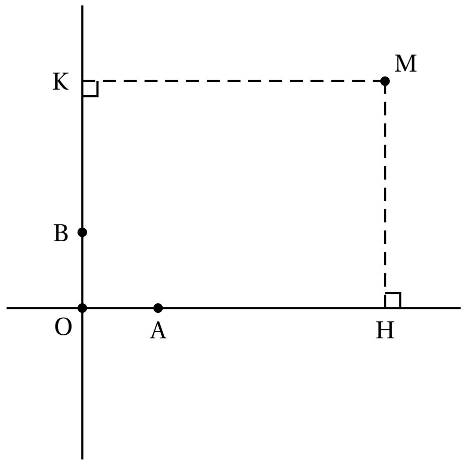
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

Démonstration : Soient A et B les points du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{j}$. Donc, $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$ (et en particulier $\mathrm{O} \neq \mathrm{A}$ et $\mathrm{O} \neq \mathrm{B}$) et de plus les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

Soit M un point du plan. On note H le projeté orthogonal de M sur la droite (OA) et K le projeté orthogonal de M sur la droite (OB). D'après le théorème précédent, il existe un réel x et un réel y tels que $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OK}} = y\overrightarrow{j}$.

Vérifions alors que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ sont égaux.

Si M n'appartient à aucune des deux droites (OA) et (OB), les quatre points O, H, M et K sont deux à deux distincts. Les droites (OH) et (MK) sont perpendiculaires à la droite (OK) et donc les droites (OH) et (MK) sont parallèles. De même, les droites (OK) et (HM) sont perpendiculaires à la droite (OB) et donc les droites (OK) et (HM) sont parallèles. On en déduit que le quadrilatère (OHMK) est un parallélogramme puis que $\overrightarrow{\mathrm{HM}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}}$.



Si M appartient à la droite (OA), alors $\mathrm{H}=\mathrm{M}$ et $\mathrm{K}=\mathrm{O}$ puis $\overrightarrow{\mathrm{HM}}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\vec{0}$. Donc, $\overrightarrow{\mathrm{HM}}=\overrightarrow{\mathrm{OK}}$.

Si M appartient à la droite (OB), alors $\mathrm{K}=\mathrm{M}$ et $\mathrm{H}=\mathrm{O}$ et encore une fois $\overrightarrow{\mathrm{HM}}=\overrightarrow{\mathrm{OK}}$.

Dans tous les cas, $\overrightarrow{\mathrm{HM}}=\overrightarrow{\mathrm{OK}}$. On en déduit que

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HM}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OK}}=x\vec{i}+y\vec{j}.$$

Ainsi, pour tout point M du plan, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Ensuite, si $\vec{u}$ est un vecteur du plan, on note M le point du plan tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{u}$. D'après ce qui précède, il existe deux réels x et y tels que

$$\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}=x\vec{i}+\vec{j}.$$

■

Le théorème qui suit montre l'unicité des deux réels x et y.

Théoreme 16

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.

Pour tous réels x, y, x' et y', l'égalité $x\vec{i}+y\vec{j}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ équivaut à $x=x'$ et $y=y'$.

Démonstration : Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan. Soient x, y, x' et y' quatre réels.

• Si $x=x'$ et $y=y'$, on a bien sûr $x\vec{i}+y\vec{j}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$.

• Inversement, supposons que $x\vec{i}+y\vec{j}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$.

Supposons par l'absurde que $x\neq x'$ ou encore que $x-x'\neq 0$. L'égalité $x\vec{i}+y\vec{j}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ s'écrit encore $x\vec{i}-x'\vec{i}=y'\vec{j}-y\vec{j}$ ou encore $(x-x')\vec{i}=(y'-y)\vec{j}$ ou enfin $\vec{i}=\dfrac{y'-y}{x-x'}\vec{j}$ (après multiplication des deux membres par le réel $\dfrac{1}{x-x'}$ (en tenant compte de $x-x'\neq 0$)).
Mais alors, il existe un réel k tel que $\vec{i}=k\vec{j}$, ce qui contredit le fait que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires. Donc, $x=x'$.

Il reste $x\vec{i}+y\vec{j}=x\vec{i}+y'\vec{j}$ puis $0\vec{i}+(y-y')\vec{j}=\vec{0}$ puis $(y-y')\vec{j}=\vec{0}$. Supposons encore une fois par l'absurde que $y\neq y'$ ou encore $y'-y\neq 0$. En multipliant les deux membres de l'égalité $(y-y')\vec{j}=\vec{0}$ par le nombre $\dfrac{1}{y-y'}$, on obtient $\vec{j}=\vec{0}$ ce qui contredit le fait que $\vec{j}$ est de norme 1. Donc, $y-y'=0$ puis $y=y'$.

■

On peut maintenant définir les coordonnées d'un point d'un point dans un repère orthonormé ou d'un vecteur dans une base orthonormée (en classe de seconde, les repères que l'on utilise sont toujours orthonormés) :

Définition 12

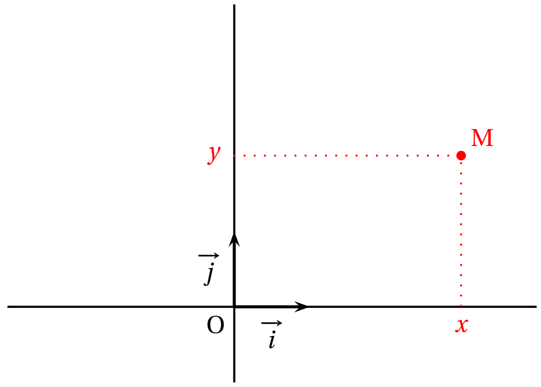
Soit $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

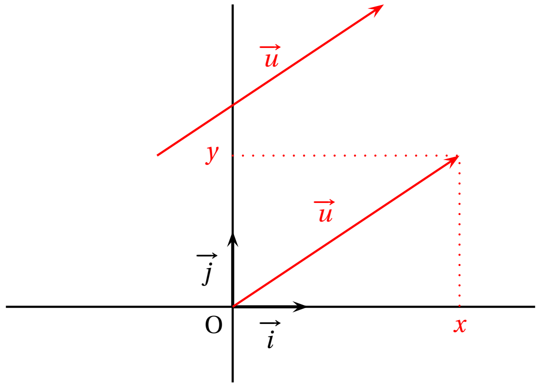
Soit M un point du plan. Le **couple de coordonnées** du point M dans le repère $\mathscr{R}$ est le couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. x est l'**abscisse** du point M et y est l'**ordonnée** du point M dans le repère $\mathscr{R}$.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. Le **couple de coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est le couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. x est l'**abscisse** du vecteur $\overrightarrow{u}$ et y est l'**ordonnée** du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathscr{B}$.

En notant A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{j}$, la droite (OA) s'appelle l'**axe des abscisses** et la droite (OB) s'appelle l'**axe des ordonnées**. Les droites (OA) et (OB) sont les **axes de coordonnées**. L'axe des abscisses se note (Ox) et l'axe des ordonnées se note (Oy).

Pour écrire qu'un point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$, on écrit $M(x, y)$ ou aussi $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Pour écrire qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$, on écrit $\overrightarrow{u}(x, y)$ ou aussi $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

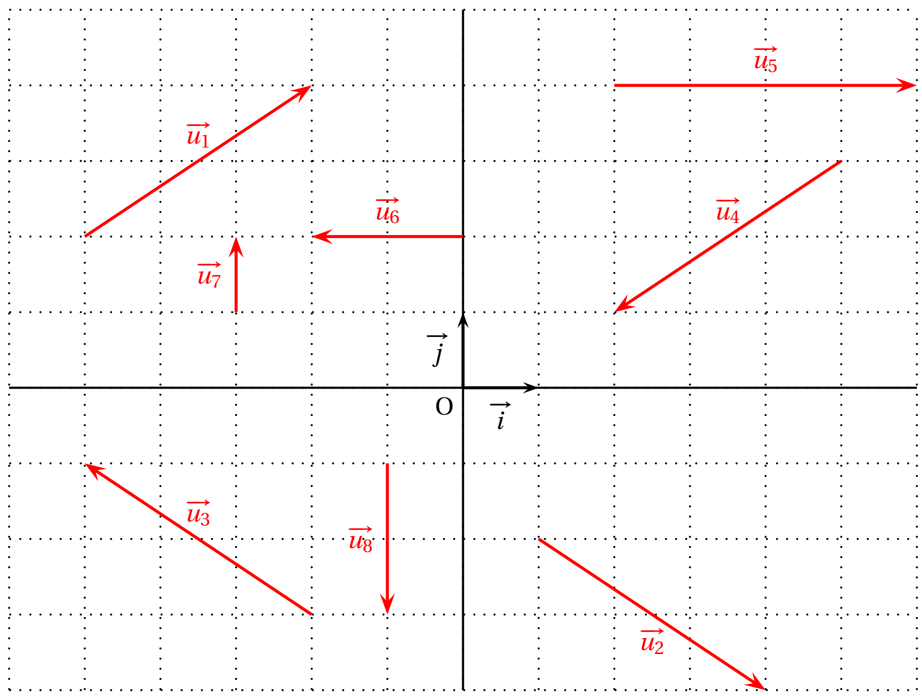




Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. En vous servant d'un quadrillage, construire les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_4}$, $\overrightarrow{u_5}$, $\overrightarrow{u_6}$, $\overrightarrow{u_7}$ et $\overrightarrow{u_8}$ de coordonnées respectives $(3, 2)$, $(3, -2)$, $(-3, 2)$, $(-3, -2)$, $(4, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, -2)$.

Solution 3 :



Pour $\overrightarrow{u_1}$, on part de n'importe où puis on avance de 3 carreaux vers la droite puis on avance de 2 carreaux vers le haut.

Pour $\overrightarrow{u_2}$, on part de n'importe où puis on avance de 3 carreaux vers la droite puis on avance de 2 carreaux vers le bas.

Pour $\overrightarrow{u_3}$, on part de n'importe où puis on avance de 3 carreaux vers la gauche puis on avance de 2 carreaux vers le haut.

Pour $\overrightarrow{u_4}$, on part de n'importe où puis on avance de 3 carreaux vers la gauche puis on avance de 2 carreaux vers le bas.

Pour $\overrightarrow{u_5}$, on part de n'importe où puis on avance de 4 carreaux vers la droite et c'est tout.

Pour $\overrightarrow{u_6}$, on part de n'importe où puis on avance de 2 carreaux vers la gauche et c'est tout.

Pour $\overrightarrow{u_7}$, on part de n'importe où puis on avance de 1 carreaux vers le haut et c'est tout.

Pour $\overrightarrow{u_8}$, on part de n'importe où puis on avance de 2 carreaux vers le bas et c'est tout.

■

C Formulaire

Théoreme 17

Soit $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. Soient A et B deux points du plan dont les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ sont notées $\left(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}\right)$ et $\left(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}\right)$ respectivement.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ dans la base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont $\left(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}, y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}\right)$. En abrégé, cela donne

$$x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} \qquad \text{et} \qquad y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}.$$

Démonstration : D'après la relation de CHASLES,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \left(x_\mathrm{B}\overrightarrow{i} + y_\mathrm{B}\overrightarrow{j}\right) - \left(x_\mathrm{A}\overrightarrow{i} + y_\mathrm{A}\overrightarrow{j}\right) = x_\mathrm{B}\overrightarrow{i} - x_\mathrm{A}\overrightarrow{i} + y_\mathrm{B}\overrightarrow{j} - y_\mathrm{A}\overrightarrow{j} \\ &= \left(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}\right)\overrightarrow{i} + \left(y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}\right)\overrightarrow{j}.\end{aligned}$$

Donc, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont $\left(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}, y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}\right)$.

■

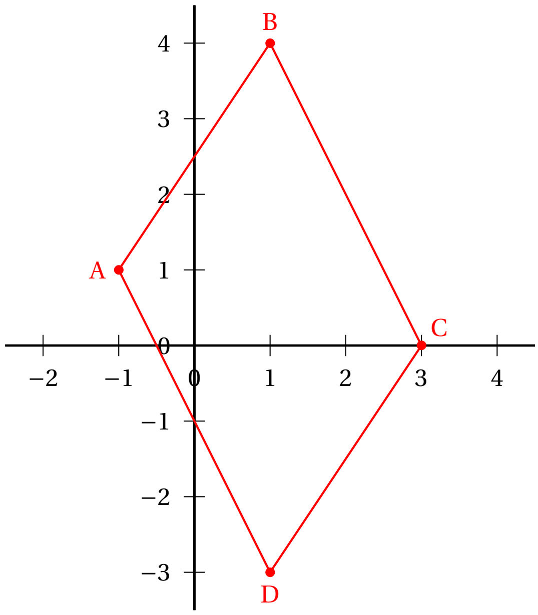
Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On donne les points $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(1,4)$ et $\mathrm{C}(3,0)$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme.

Solution 4 : Notons (x, y) les coordonnées du point D. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ (attention à l'ordre des lettres). Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ sont $((-1) - 1, 1 - 4)$ ou encore $(-2, -3)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont $(x - 3, y - 0)$ ou encore $(x - 3, y)$.

Ensuite, $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ équivaut à $x - 3 = -2$ et $y = -3$ ou encore à $x = 1$ et $y = -3$. Les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme sont $(1, -3)$.



■

Théoreme 18

Soit $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base orthonormée du plan.

1) Soient $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ deux vecteurs. Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y')$.

2) Soient $\overrightarrow{u}(x, y)$ un vecteur et k un réel. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (kx, ky).

Démonstration :

1) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} = (x + x')\overrightarrow{i} + (y + y')\overrightarrow{j}$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y')$ dans la base $\mathscr{B}$.

2) $k\overrightarrow{u} = k\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}\right) = kx\overrightarrow{i} + ky\overrightarrow{j}$. Donc, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (kx, ky) dans la base $\mathscr{B}$.

■

Théoreme 19

Soit $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. Soient A et B deux points du plan dont les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ sont notées $\left(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}\right)$ et $\left(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}\right)$ respectivement.

Les coordonnées du milieu I du segment [AB] dans le repère $\mathscr{R}$ sont $\left(\dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2}, \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2}\right)$. En abrégé, cela donne

$$x_{\mathrm{I}} = \frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2} \quad \text{et} \quad y_{\mathrm{I}} = \frac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2}.$$

Démonstration : Notons $\left(x_{\mathrm{I}}, y_{\mathrm{I}}\right)$ les coordonnées du point I dans le repère $\mathscr{R}$. On sait que $\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}} = \overrightarrow{0}$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IA}}$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $\left(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{I}}, y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{I}}\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IB}}$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $\left(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{I}}, y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{I}}\right)$. Donc, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $\left(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{I}} + x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{I}}, y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{I}} + y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{I}}\right)$ ou encore $\left(x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}} - 2x_{\mathrm{I}}, y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}} - 2y_{\mathrm{I}}\right)$.

D'aoutre part, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{0}$ sont $(0, 0)$. On en déduit que $x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}} - 2x_{\mathrm{I}} = 0$ ou encore $x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}} = 2x_{\mathrm{I}}$ ou encore $\dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2} = x_{\mathrm{I}}$ ou enfin $x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2}$. De même, $y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2}$.

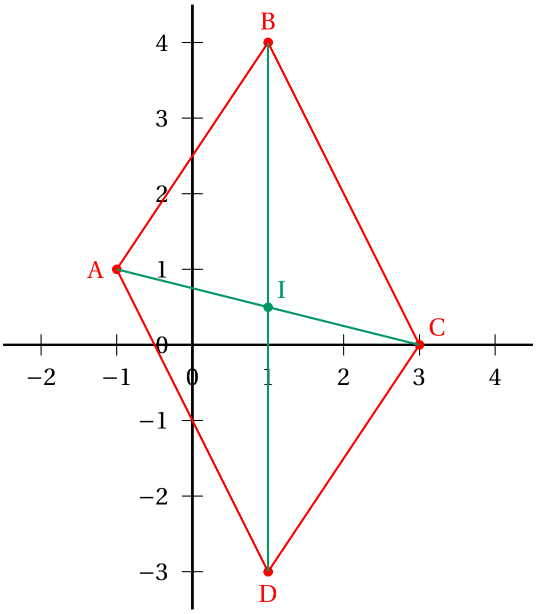
■

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On reprend les points de l'exercice n° 4 : $\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(1, 4)$ et $\mathrm{C}(3, 0)$ et $\mathrm{D}(1, -3)$.

Déterminer les coordonnées du centre I du parallélogramme ABCD.

Solution 5 : Le point I est le milieu du segment $[AC]$. Ses coordonnées sont $\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$ ou encore $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+0}{2}\right)$ ou enfin $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.



■

D Norme d'un vecteur. Distance entre deux points

Théoreme 20

Soit $\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

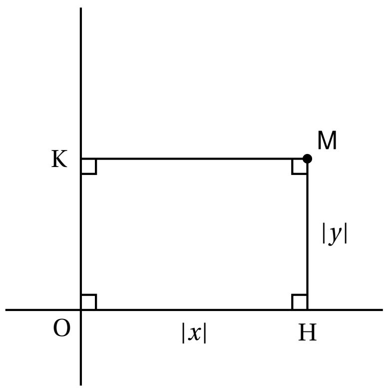
1) Soit $\vec{u}(x, y)$ un vecteur du plan. Alors, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2) Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Alors, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Démonstration :

1) Soient $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y) dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ puis M le point du plan tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Soient H et K les projetés orthogonaux du point M sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées respectivement.

Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, le quadrilatère OHMK est un vrai rectangle dont les côtés ont pour longueur $|x|$ et $|y|$.



Dans le triangle OHM, rectangle en H, on a d'après le théorème de PYTHAGORE :

$$OM^2 = OH^2 + HM^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

et donc $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{x^2+y^2}$.

Si $y=0$ et x est quelconque, $\|\vec{u}\| = \|x\vec{i}\| = |x|\|\vec{i}\| = |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2+y^2}$.
Si $x=0$ et y est quelconque, $\|\vec{u}\| = \|y\vec{j}\| = |y|\|\vec{j}\| = |y| = \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2+y^2}$.

On a montré dans tous les cas que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

2) Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (x_B-x_A, y_B-y_A) et donc

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

■

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note A, B et C les points de coordonnées respectives $(2,3)$, $(1,1)$ et $(5,1)$.

1) a) Déterminer les distances BC, CA et AB.

b) Le triangle ABC est-il rectangle en A ?

2) a) Préciser les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) puis déterminer AH.

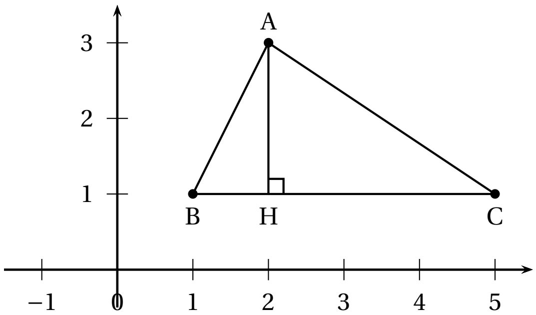
b) Déterminer l'aire du triangle ABC.

c) Déterminer une valeur approchée arrondie à 10^{-2} des angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{HAC}$. En déduire une valeur approchée à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{BAC}$.

3) On rappelle la formule d'AL-KASHI : si on pose $BC=a$, $CA=b$ et $AB=c$, alors $a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\widehat{A})$.

Déterminer la valeur exacte de $\cos(\widehat{A})$ puis donner une valeur approchée arrondie à 10^{-1} de l'angle $\widehat{BAC}$.

Solution 6 :



1) a) $BC = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(5-1)^2+(1-1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$.
$CA = \sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2} = \sqrt{(2-5)^2+(3-1)^2} = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}$.
$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(1-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$.

b) $BC^2 = 16$ et d'autre part, $AB^2+AC^2 = (\sqrt{5})^2+(\sqrt{13})^2 = 5+13 = 18$. Ainsi, $BC^2 \neq AB^2+AC^2$.
D'après le théorème de PYTHAGORE, le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

2) a) La droite (BC) est parallèle à l'axe des abscisses. Donc, le point H a même abscisse que A et même ordonnée que B. Les coordonnées de H sont donc $(2,1)$.

$AH = \sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2} = \sqrt{(2-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{(-2)^2} = 2$.

b) L'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est :

$$\mathscr{A} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{2\times 4}{2} = 4.$$

c) Dans le triangle AHB rectangle en H, $\cos(\widehat{BAH}) = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. La calculatrice fournit alors $\widehat{BAH} = 26,565\ldots°$ ou encore $\widehat{BAH} = 26,57°$ arrondi à 10^{-2}.

Dans le triangle AHC rectangle en H, $\cos\left(\widehat{\mathrm{HAC}}\right) = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$. La calculatrice fournit alors $\widehat{\mathrm{HAC}} = 56,309\ldots°$ ou encore $\widehat{\mathrm{BAH}} = 56,31°$ arrondi à 10^{-2}.

Enfin, $\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{BAH}} + \widehat{\mathrm{HAC}} = 82,8°$ à 10^{-1} près.

3) D'après la formule d'AL-KASHI $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\times \mathrm{AB}\times \mathrm{AC}\times\cos\left(\widehat{\mathrm{A}}\right)$ puis $16 = 13+5-2\times\sqrt{13}\times\sqrt{5}\times\cos\left(\widehat{\mathrm{A}}\right)$ puis $2\sqrt{65}\cos\left(\widehat{\mathrm{A}}\right) = 2$ et finalement, $\cos\left(\widehat{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{65}}$.

La calculatrice fournit alors $\widehat{\mathrm{BAC}} = 82,87\ldots°$ puis $\widehat{\mathrm{BAC}} = 82,9°$ arrondi à 10^{-1}.

■

E Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs

Définition 13

Soit $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base orthonormée du plan.

Soient $\vec{u}\,(x,y)$ et $\vec{v}\,(x',y')$ deux vecteurs du plan. Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) est le nombre, noté $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)$, défini par :

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = xy' - yx'.$$

☞ *Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est d'abord présenté dans un tableau avant de le calculer :* $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$. *En première colonne, on a placé les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ et en deuxième colonne, on a placé les coordonnées du vecteur $\vec{v}$. On le calcule ensuite en partant d'en haut à gauche et « en suivant la croix » :*

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Théoreme 21

Soit $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base orthonormée du plan. Soient $\vec{u}\,(x,y)$ et $\vec{v}\,(x',y')$ deux vecteurs du plan.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 0$.

Démonstration : (au programme)

• Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.

Si $\vec{u} = \vec{0}$, les coordonnées de $\vec{u}$ sont $(0,0)$ et donc $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} 0 & x' \\ 0 & y' \end{vmatrix} = 0\times y' - 0\times x' = 0$. De même, si $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 0$.

Supposons maintenant $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Le vecteur $\vec{v}$ a donc pour coordonnées (kx, ky) puis

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x & kx \\ y & ky \end{vmatrix} = x\times(ky) - y\times(kx) = kxy - kxy = 0.$$

On a montré que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 0$.

• Supposons $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 0$. Si $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Sinon, $\vec{u} \neq \vec{0}$ puis l'une des coordonnées de $\vec{u}$ au moins est non nulle.

Supposons $x \neq 0$. Soit $k = \dfrac{x'}{x}$. Puisque $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 0$, on a $xy' - yx' = 0$ puis $xy' = yx'$ puis $y' = \dfrac{x'}{x}\times y = ky$. Ainsi, les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont (kx, ky) et donc $\vec{v} = k\vec{u}$. On en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Le cas où $y \neq 0$ est analogue : on prend $k = \dfrac{y'}{y}$ et on obtient de nouveau $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ puis les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

On a montré que si $\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

∎

Le théorème 21 fournit un théorème pratique pour vérifier l'alignement ou le non-alignement de trois points : on rappelle que trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (y compris dans les cas où les points ne sont pas deux à deux distincts).

Exercice 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Dans chacun des cas, suivants, déterminer si les points A, B et C sont alignés.

1) $A(-1, 1)$, $B(1, 2)$ et $C(-7, -2)$.

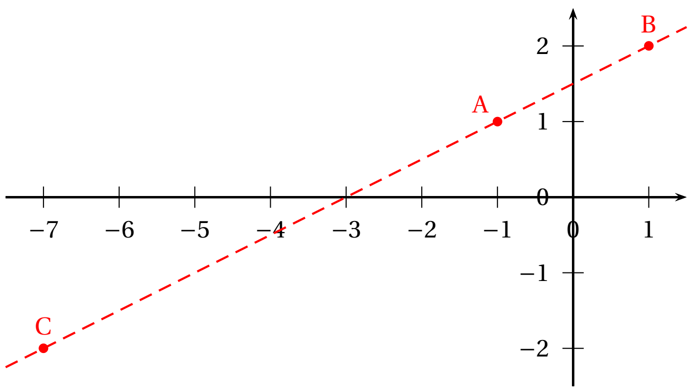
2) $A(-5, 4)$, $B(0, 2)$ et $C(8, -1)$.

Solution 7 :

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(1-(-1), 2-1)$ ou encore $(2, 1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-7-(-1), -2-1)$ ou encore $(-6, -3)$. Ensuite,

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - (-6) \times 1 = -6 + 6 = 0.$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et donc que les points A, B et C sont alignés.

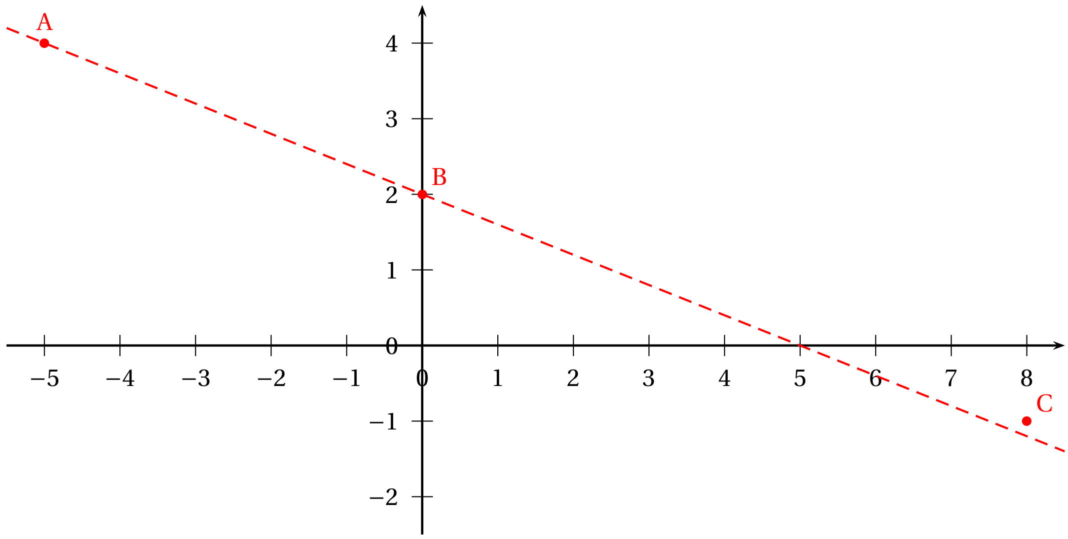


Remarque. On pouvait aussi constater directement que $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$.

2) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(0-(-5), 2-4)$ ou encore $(5, -2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(8-(-5), -1-4)$ ou encore $(13, -5)$. Ensuite,

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 5 \times (-5) - (-2) \times 13 = -25 + 26 = 1,$$

et en particulier $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \neq 0$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc que les points A, B et C ne sont pas alignés.



■

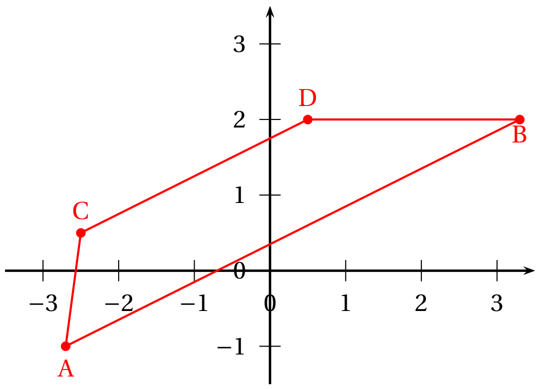
Le théorème 21 fournit également un procédé pratique pour savoir si deux droites sont parallèles ou non. On rappelle que deux droites sont parallèles si et seulement si ces deux droites admettent des vecteurs directeurs colinéaires.

Exercice 8

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On donne les points $A(-2,7;-1)$, $B(3,3;2)$, $C(-2,5;0,5)$ et $D(0,5;2)$.

Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze.

Solution 8 : Il s'agit de vérifier que les droites (AB) et (CD) sont parallèles (suggéré par le dessin ci-dessous).



Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(3,3-(-2,7);2-(-1))$ ou encore $(6;3)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont $(0,5-(-2,5);2-0,5)$ ou encore $(3;1,5)$. Ensuite,

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1,5 \end{vmatrix} = 6 \times 1,5 - 3 \times 3 = 9 - 9 = 0.$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Ainsi, les droites (AB) et (CD) admettent des vecteurs directeurs colinéaires et donc le quadrilatère ABDC est un trapèze.

■