

# Planche n° 8. Topologie

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

## Exercice n° 1 (\*\*)

Montrer que toute boule, fermée ou ouverte, d'un espace vectoriel normé est un convexe de cet espace.

## Exercice n° 2 (\*\*\*) I

1) Inégalités de HÖLDER et de MINKOWSKI. Soit  $(p, q) \in ]0, +\infty[^2$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

a) Montrer que pour  $(x, y) \in [0, +\infty[^2$ ,  $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ .

b) En déduire que  $\forall ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$ ,  $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}$ .

c) En déduire que  $\forall ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$ ,  $\left( \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}$ .

2) Soit  $\alpha$  un réel strictement positif. Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on définit  $N_\alpha(x) = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^\alpha \right)^{1/\alpha}$ .

a) Montrer que  $\forall \alpha \geq 1$ ,  $N_\alpha$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

b) Dessiner les « boules unités » de  $\mathbb{R}^2$  dans le cas où  $\alpha \in \left\{ \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, +\infty \right\}$ .

c) Montrer que, pour  $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$  fixé,  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_\alpha(x) = \text{Max}\{|x_k|, 1 \leq k \leq n\} = N_\infty(x)$ .

d) Montrer que si  $0 < \alpha < 1$ ,  $N_\alpha$  n'est pas une norme sur  $\mathbb{R}^n$  (si  $n \geq 2$ ).

## Exercice n° 3 (\*\* I)

Soit  $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $f$  élément de  $E$ , on pose  $N(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$ ,  $N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$  et

$N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(t)| dt$ . Montrer que  $N$ ,  $N'$  et  $N''$  sont des normes et les comparer.

## Exercice n° 4 (\*\*\*) I (topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ )

1) Montrer que  $GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

2) Montrer que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$  est fermé mais non compact (pour  $n \geq 2$ ).

3) Montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  est compact.  $O_n(\mathbb{R})$  est-il convexe ?

4) Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est fermé.

5) Soit  $p \in [0, n]$ . Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à  $p$  ( $p < n$ ) est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

6) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Peut-on remplacer  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

7) Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $\forall (i, j) \in [1, n]^2$ ,  $a_{i,j} \geq 0$  et  $\forall i \in [1, n]$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ ) est un compact convexe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

8) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de  $M_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.

## Exercice n° 5 (\*\*)

Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel (ou encore montrer que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ ).

## Exercice n° 6 (\*\*)

Soient  $A$  et  $B$  des parties d'un espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que

1)  $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$  et  $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$ .

2)  $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$  et  $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .

3)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  et  $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \overset{\circ}{\cap} \overset{\circ}{B}$ .

4)  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$  et  $A \overset{\circ}{\cup} B \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ . Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

5)  $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}$ .

6)  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$  et  $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ .

### Exercice n° 7 (\*\*)

Trouver une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  telle que les sept ensembles  $A, \overline{A}, \overset{\circ}{A}, \overline{\overline{A}}, \overset{\circ}{\overline{A}}, \overline{\overset{\circ}{A}}$  et  $\overset{\circ}{\overline{\overline{A}}}$  soient deux à deux distincts.

### Exercice n° 8 (\*\*)

Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On munit  $E$  de  $\| \cdot \|_{\infty}$ .

$D$  est la partie de  $E$  constituée des applications dérivables et  $P$  est la partie de  $E$  constituée des fonctions polynomiales.

Déterminer l'intérieur de  $D$  et l'intérieur de  $P$ .

### Exercice n° 9 (\*\* I) (Distance d'un point à une partie)

Soit  $A$  une partie non vide d'un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$ .

Pour  $x \in E$ , on pose  $d_A(x) = d(x, A)$  où  $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$ .

1) Justifier l'existence de  $d_A(x)$  pour chaque  $x$  de  $E$ .

2) a) Montrer que si  $A$  est fermée,  $\forall x \in E, d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$ .

b) Montrer que si  $A$  est fermée et  $E$  est de dimension finie,  $\forall x \in E, \exists a \in A / d_A(x) = \|x - a\|$ .

3) Si  $A$  est quelconque, comparer  $d_A(x)$  et  $d_{\overline{A}}(x)$ .

4) Montrer  $d_A$  est continue sur  $E$ .

5) A chaque partie fermée non vide  $A$ , on associe l'application  $d_A$  définie ci-dessus. Montrer que l'application  $A \mapsto d_A$  est injective.

6) Dans l'espace des applications continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme de la convergence uniforme, on considère  $A = \left\{ f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$ . Calculer  $d_A(0)$ .

### Exercice n° 10 (\*\*)

1) Soient  $(E, N_E)$  et  $(F, N_F)$  deux espaces vectoriels normés. Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues sur  $E$  à valeurs dans  $F$ . Soit  $D$  une partie de  $E$  dense dans  $E$ . Montrer que si  $f|_D = g|_D$  alors  $f = g$ .

2) Déterminer tous les morphismes continus de  $(\mathbb{R}, +)$  dans lui-même.

### Exercice n° 11 (\*\*\*)

Soit  $u$  une suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie ayant une unique valeur d'adhérence. Montrer que la suite  $u$  converge.

### Exercice n° 12 (\*\*\*)

Calculer  $\inf_{\alpha \in ]0, \pi[} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\}$ .

### Exercice n° 13 (\*\*\*) I)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a|x| + b$ .

### Exercice n° 14 (\*\*\*) I) :

Donner un développement à la précision  $\frac{1}{n^2}$  de la  $n$ -ième racine positive  $x_n$  de l'équation  $\tan x = x$ .

### Exercice n° 15 (\*\*\*) I)

Soit  $z$  un nombre complexe. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n$ .

### Exercice n° 16 (\*\*\*) I)

Soit  $(E, \| \cdot \|)$  un espace vectoriel normé et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

1) Montrer que si  $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ , alors  $F = E$ .

2) Montrer que  $\bar{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Exercice n° 17 (\*\*\*)**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $C$  un convexe de  $E$ .

1) Montrer que  $\bar{C}$  est convexe.

2) a) Montrer que pour tout  $(x, y) \in E^2$  et tout  $(r, r') \in ]0, +\infty[^2$ ,  $B_o(x, r) + B_o(y, r') = B_o(x + y, r + r')$  et que pour tout  $x \in E$  et tout  $\lambda \in ]0, +\infty[$ ,  $\lambda B_o(x, r) = B_o(\lambda x, \lambda r)$ .

b) Montrer que  $\overset{\circ}{C}$  est convexe.

**Exercice n° 18 (\*\*\*)**

On pose  $K_0 = [0, 1]$ ,  $K_1 = K_0 \setminus \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[ = \left[ 0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}, 1 \right]$ ,  $K_2 = K_1 \setminus \left( \left[ \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right] \cup \left[ \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right] \right) = \left[ 0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[ \frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[ \frac{8}{9}, 1 \right]$ ,  
... (on retire à chaque étape les « tiers médians ouverts »). Soit alors  $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

Montrer que  $K$  est un compact d'intérieur vide ( $K$  est l'ensemble de CANTOR).