Planche n° 8. Petits systèmes d'équations linéaires. Corrigé

Exercice n° 1.

1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + y + 2z = 6 \\ x - 3y + z = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2x + 3y - 1 \\ 4x + y + 2(2x + 3y - 1) = 6 \\ x - 3y + (2x + 3y - 1) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2x + 3y - 1 \\ 8x + 7y = 8 \\ 3x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ 8 + 7y = 8 \\ z = 2x + 3y - 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $\{(1, 0, 1)\}$.

2) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \\ (2x + y + z) + (x + 2y + z) + (x + y + 2z) = 7 + 8 + 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \\ x + y + z = 6 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (2x + y + z) - (x + y + z) = 7 - 6 \\ (x + 2y + z) - (x + y + z) = 8 - 6 \\ (x + y + 2z) - (x + y + z) = 9 - 6 \\ x + y + z = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $\{(1, 2, 3)\}$.

3) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 3x - y = 1 \\ 4x + z = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 3x - 1 \\ z = -4x + 4 \\ x + (3x - 1) + (-4x + 4) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \times x = 5 \\ y = 3x - 1 \\ z = -4x + 4 \end{array}\right. .$$

Le système proposé n'a pas de solution.

4) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ -x - 3y + z = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -x + y + 2 \\ 3x + y + (-x + y + 2) = 0 \\ -x - 3y + (-x + y + 2) = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -x + y + 2 \\ 2x + 2y = -2 \\ -2x - 2y = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -x + y + 2 \\ x + y = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -1 - x \\ z = -x + (-1 - x) + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -1 - x \\ z = -2x + 1 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $\{(x, -1 - x, -2x + 1),\ x \in \mathbb{R}\}$.

5) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x + y = 0 \\ 3x + 4y = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x \\ 2x - x = 1 \\ 3x - 4x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x \\ x = 1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $\{(1, -1, z),\ z \in \mathbb{R}\}$.

6)

$$\left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=3\\x+y+z-t=3\\x-y-z-t=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x=2\quad(L_1\leftarrow L_1+L_3)\\x+y+z-t=3\\x-y-z-t=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\1+y+z-t=3\\1-y-z-t=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y+z-t=2\\-y-z-t=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\-2t=0\quad(L_2\leftarrow L_2+L_3)\\-y-z-t=-2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\t=0\\z=-y+2\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $\{(1,y,0,-y+2),\ y\in\mathbb{R}\}$.

Exercice n° 2.

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M\in\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+y+2z=1\\2x-y+z=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=-2x+y+2\\x+y+2(-2x+y+2)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-3x+3y=-3\\z=-2x+y+2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=x-1\\z=-2x+(x-1)+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=x-1\\z=-x+1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\y=\lambda-1\\z=-\lambda+1\end{array}\right..$$

$\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'$ est la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\y=\lambda-1\\z=-\lambda+1\end{array}\right.$, $\lambda\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite passant par le point A de coordonnées $(0,-1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1,1,-1)$. Il revient au même de dire que l'ensemble des solutions du système $\left\{\begin{array}{l}x+y+2z=1\\2x-y+z=2\end{array}\right.$ est $\{(x,x-1,-x+1),\ x\in\mathbb{R}\}$.

Exercice n° 3. m est un paramètre réel.

1) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l}2x+3y+z=4\\-x+my+2z=5\\7x+3y+(m-5)z=7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=4-2x-3y\\-x+my+2(4-2x-3y)=5\\7x+3y+(m-5)(4-2x-3y)=7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=4-2x-3y\\-5x+(m-6)y=-3\\(-2m+17)x+(-3m+18)y=-4m+27\end{array}\right..$$

Le déterminant du système formé par les deux dernières équations est

$$\begin{aligned}\Delta&=\left|\begin{array}{cc}-5&m-6\\-2m+17&-3m+18\end{array}\right|=-5(-3m+18)-(-2m+17)(m-6)=(m-6)(15-(-2m+17))\\&=2(m-1)(m-6).\end{aligned}$$

Le système formé par les deux dernières équations est de Cramer si et seulement si $m\notin\{1,6\}$.

• Si $m\notin\{1,6\}$, les formules de Cramer fournissent alors :

$$\left\{\begin{array}{l}-5x+(m-6)y=-3\\(-2m+17)x+(-3m+18)y=-4m+27\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix}-3 & m-6\\-4m+27 & -3m+18\end{vmatrix}\\[2ex] y=\dfrac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix}-5 & -3\\-2m+17 & -4m+27\end{vmatrix}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{4m^2-42m+108}{2(m-1)(m-6)}\\ y=\dfrac{14m-84}{2(m-1)(m-6)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{2(2m-9)(m-6)}{2(m-1)(m-6)}\\ y=\dfrac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{2m-9}{m-1}\\ y=\dfrac{7}{m-1}\end{array}\right..$$

Mais alors,

$$\left\{\begin{array}{l}2x+3y+z=4\\-x+my+2z=5\\7x+3y+(m-5)z=7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{2m-9}{m-1}\\ y=\dfrac{7}{m-1}\\ z=4-2\times\dfrac{2m-9}{m-1}-3\times\dfrac{7}{m-1}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{2m-9}{m-1}\\ y=\dfrac{7}{m-1}\\ z=-\dfrac{21}{m-1}\end{array}\right.$$

Si $m\notin\{1,6\}$, l'ensemble des solutions du système proposé est $\left\{\left(\dfrac{2m-9}{m-1},\dfrac{7}{m-1},-\dfrac{21}{m-1}\right)\right\}$.

• Si $m=1$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l}2x+3y+z=4\\-x+y+2z=5\\7x+3y-4z=7\end{array}\right.$ ou aussi $\left\{\begin{array}{l}z=4-2x-3y\\-5x-5y=-3\\15x+15y=23\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l}z=4-2x-3y\\x+y=\dfrac{3}{5}\\x+y=\dfrac{23}{15}.\end{array}\right.$. Dans ce cas, le système n'a pas de solution.

• Si $m=6$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l}z=4-2x-3y\\-5x=-3\\5x=3\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{5}\\z=4-2\times\dfrac{3}{5}-3y\end{array}\right.$ ou enfin $\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{5}\\z=\dfrac{14}{5}-3y\end{array}\right.$.

Si $m=6$, l'ensemble des solutions est $\left\{\left(\dfrac{3}{5},y,\dfrac{14}{5}-3y\right),\ y\in\mathbb{R}\right\}$.

2) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l}2x+my+z=3m\\x-(2m+1)y+2z=4\\5x-y+4z=3m-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=(2m+1)y-2z+4\\2((2m+1)y-2z+4)+my+z=3m\\5((2m+1)y-2z+4)-y+4z=3m-2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=(2m+1)y-2z+4\\(5m+2)y-3z=3m-8\\(10m+4)y-6z=3m-22\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=(2m+1)y-2z+4\\(5m+2)y-3z=3m-8\\(5m+2)y-3z=\dfrac{3}{2}m-11.\end{array}\right.$$

Ensuite,

$$3m-8=\frac{3}{2}m-11 \Leftrightarrow \frac{3}{2}m=-3 \Leftrightarrow m=-2.$$

• Si $m \neq -2$, le système n'a pas de solution.

• Si $m=-2$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x=-3y-2z+4 \\ -8y-3z=-14 \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{14-8y}{3} \\ x=-3y-2\dfrac{14-8y}{3}+4 \end{array}\right.$ ou enfin $\left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{14-8y}{3} \\ x=\dfrac{-16+7y}{3} \end{array}\right.$.

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\left\{\left(\dfrac{-16+7y}{3}, y, \dfrac{14-8y}{3}\right),\ y \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice n° 4.

1) Soient a, b et c trois réels. Pour tout réel x, posons $P(x)=ax^2+bx+c$.

$$\left\{\begin{array}{l} P(1)=1 \\ P'(1)=1 \\ P(-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+c=1 \\ 2a+b=1 \\ a-b+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-2a+1 \\ a+(-2a+1)+c=1 \\ a-(-2a+1)+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-2a+1 \\ -a+c=0 \\ 3a+c=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-2a+1 \\ c=a \\ 3a+a=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{4} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2.$$

Il existe un et un seul polynôme P de degré 2 tels que $P(1)=1$, $P'(1)=1$ et $P(-1)=0$ à savoir le polynôme $x \mapsto \dfrac{1}{4}(x+1)^2$.

2) Soient a, b, c et d quatre réels. Pour tout réel x, posons $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

$$\left\{\begin{array}{l} P(-1)=1 \\ P(1)=0 \\ P(2)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -a+b-c+d=1 \\ a+b+c+d=0 \\ 8a+4b+2c+d=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d=-a-b-c \\ -a+b-c+(-a-b-c)=1 \\ 8a+4b+2c+(-a-b-c)=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d=-a-b-c \\ -2a-2c=1 \\ 7a+3b+c=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d=-a-b-c \\ c=-a-\dfrac{1}{2} \\ 7a+3b+\left(-a-\dfrac{1}{2}\right)=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=-a-\dfrac{1}{2} \\ b=-2a+\dfrac{1}{2} \\ d=2a \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x)=ax^3+\left(-2a+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-a-\frac{1}{2}\right)x+2a.$$

De plus un tel polynôme est de degré 3 si et seulement si $a \neq 0$. Les polynômes P de degré 3 tels que $P(-1)=1$, $P(1)=0$ et $P(2)=1$ sont les polynômes de la forme

$$x \mapsto ax^3+\left(-2a+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-a-\frac{1}{2}\right)x+2a, \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

On note que $a=0$ fournit le polynôme de degré 2 $x \mapsto \dfrac{x^2-x}{2}$.

Exercice n° 5.

1) Soit M un point du plan dont les coordonnées sont notées (x, y).

$$\begin{aligned}\forall m \in \mathbb{R},\ M \in (\mathscr{D}_m) &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ (3m-1)x+(m+1)y = m-5\\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ m(3x+y-1)+(-x+y+5)=0\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y-1=0\\ -x+y+5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3/2\\ y=-7/2\end{array}\right.\end{aligned}$$

Toutes les droites $(\mathscr{D}_m)$, $m \in \mathbb{R}$, passent par le point A de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{7}{2}\right)$.

2) $(\mathscr{D}_{-1})$ est la droite parallèle à (Oy) passant par A. Pour $m \neq -1$, $(\mathscr{D}_m)$ est la droite passant par A de coefficient directeur $\dfrac{-3m+1}{m+1}$.

« On sait » que la fonction homographique $x \mapsto \dfrac{-3x+1}{x+1}$ est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Donc, quand m décrit $\mathbb{R}$, on obtient toutes les droites passant par A, à l'exception de la droite de coefficient directeur -3.

On peut alors décider conventionnellement que la droite passant par A, de coefficient directeur -3, est la droite $(\mathscr{D}_\infty)$, obtenue quand m tend vers $\pm\infty$.

