


FICHE n° 8. CALCULS AVEC DES PUISSANCES ET DES RACINES CARRÉES.

I Puissances

Définition 1

- 1) Pour tout réel a , pour tout entier naturel non nul n , $a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$.
- 2) Pour tout réel non nul a , $a^0 = 1$.
- 3) Pour tout réel a , pour tout entier naturel non nul n , $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

 0^n n'a pas de sens quand $n \leq 0$ (par exemple 0^0 et 0^{-1} ne veulent rien dire).

Théorème 1

Pour tout réel non nul a et tout entier relatif n , $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ et $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

Théorème 2

Pour tout nombre réel non nul a et tous entiers relatifs n et p ,

- 1) $a^n \times a^p = a^{n+p}$.
- 2) $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- 3) $(a^n)^p = a^{n \times p}$.

Par exemple, $\frac{7^{-2} \times 7^7}{7^8 \times 7^{-3}} = 7^{-2+7-8+3} = 7^0 = 1$.

Théorème 3

Pour tous nombres réels non nuls a et b et tout entier relatif n , $(ab)^n = a^n b^n$.

Par exemple, $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3$. Attention $2 \times 5^3 \neq (2 \times 5)^3$ car $2 \times 5^3 = 2 \times 125 = 250$.

II Racines carrées.

Définition 2

Soit a un réel **positif**. La **racine carrée** de a , notée \sqrt{a} , est le réel positif dont le carré vaut a . Donc,

$$\text{pour tout réel } a, (\sqrt{a})^2 = a.$$

Théorème 4

Pour tout réel a , $\sqrt{a^2} = |a|$. Plus explicitement,

$$\text{pour tout réel } a, \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}.$$

Par exemple, $\sqrt{4^2} = 4$ et $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$ car $1-\sqrt{2} < 0$.

Théorème 5

- 1) Pour tous réels positifs a et b , $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- 2) Pour tout réel positif a et tout réel strictement positif b , $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Par exemple, $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$ et $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$.

Théorème 6

Pour tous réels strictement positifs a et b , $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Par exemple, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.