Chapitre 8. Compléments sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Plan du chapitre

1 Opérations sur les fonctions

Si f et g sont deux fonctions définies sur un même domaine non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut définir un certain nombre d'opérations sur les deux fonctions f et g.

Addition de fonctions. La somme de f et de g est la fonction, notée $f+g$, définie par

$$\forall x \in D,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Multiplication d'une fonction par un nombre. Si λ est un nombre (réel ou complexe), le produit de la fonction f par le nombre λ est la fonction, noté λf, définie par

$$\forall x \in D,\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Combinaison linéaire de fonctions. Si λ et μ sont deux nombres (réels ou complexes), la combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$, est la fonction définie par

$$\forall x \in D,\ (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x).$$

⇨ **Commentaire** .

◇ *La définition précédente se généralise à un nombre quelconque (fini) de fonctions. Par exemple, une combinaison linéaire des fonctions* f, g *et* h *est* $\lambda f + \mu g + \nu h$ ...

◇ *Une combinaison linéaire est le résultat d'une opération complexe construite à partir des deux opérations élémentaires « somme » et « multiplication par un nombre ».*

◇ *Avec le vocabulaire ainsi défini, on peut par exemple dire que tout polynôme est une combinaison linéaire de monômes.*

Produit de fonctions. Le produit de f et de g est la fonction, notée $f \times g$, définie par

$$\forall x \in D,\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

Quotient de fonctions. Si de plus la fonction g ne s'annule pas sur D, le quotient de f par g est la fonction, notée $\frac{f}{g}$, définie par

$$\forall x \in D,\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

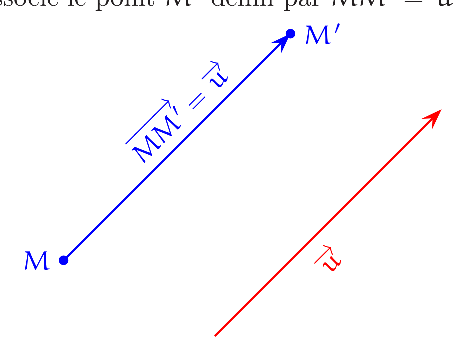
2 Quelques transformations d'un graphe

Le but de cette section est de faire subir au graphe $\mathcal{C}_f$ d'une certaine fonction f (définie sur un domaine D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$), un certain nombre de transformations géométriques simples du plan. On définit d'abord ces transformations.

2.1 Quelques transformations géométriques dans le plan

2.1.1 Translations

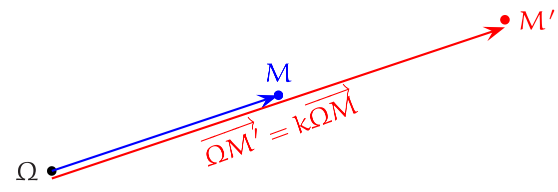
On se donne un vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan. On rappelle que la **translation** de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application du plan dans lui-même, notée $t_{\overrightarrow{u}}$, qui à un point M du plan associe le point M' défini par $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.



On a les résultats immédiats suivants :
- pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$.
- pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $t_{\overrightarrow{u}}$ est une bijection du plan sur lui-même et $(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$.
- Si $\overrightarrow{u}(a,b)$, $M(x,y)$ et $M'(x',y')$, alors $\left\{\begin{array}{l} x' = x + a \\ y' = y + b \end{array}\right.$ (expression analytique d'une translation).

2.1.2 Homothéties

On se donne un point du plan Ω et un réel k. L'**homothétie** de centre Ω et de rapport k est l'application du plan dans lui-même, notée $h_{\Omega,k}$, qui à un point M du plan associe le point M' défini par $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.



On a les résultats immédiats suivants :

- pour tout point Ω et tous réels k et k', $h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k'} = h_{\Omega,kk'} = h_{\Omega,k'} \circ h_{\Omega,k}$.
- si $k \neq 0$, $h_{\Omega,k}$ est une bijection du plan sur lui-même et $(h_{\Omega,k})^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}$.
- Si $\Omega(a,b)$, $M(x,y)$ et $M'(x',y')$, alors $\left\{\begin{array}{l} x' = a + k(x-a) \\ y' = b + k(y-b) \end{array}\right.$ (expression analytique d'une homothétie).

2.1.3 Symétries centrales

Commençons par déterminer le symétrique d'un réel par rapport à un autre sur l'axe réel. Soient a et x deux réels. Le symétrique de x par rapport à a est le réel x' tel que $\dfrac{x+x'}{2} = a$ ou encore tel que $x' = 2a - x$. On doit retenir :

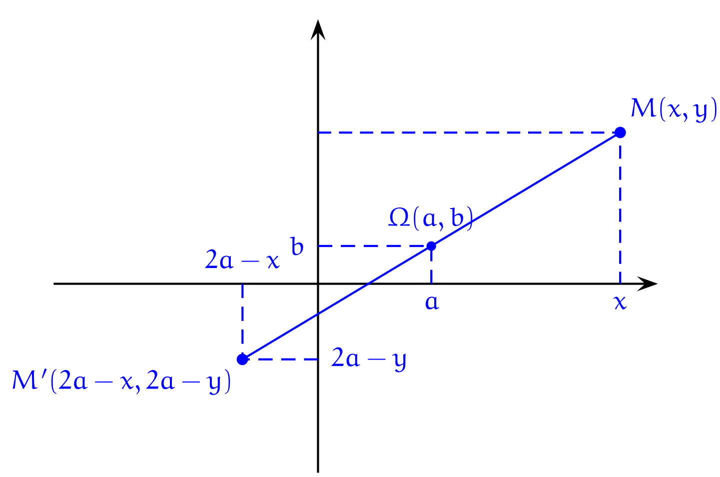
$$\boxed{\text{le symétrique du réel } x \text{ par rapport au réel } a \text{ est le réel } 2a - x,}$$

Par exemple, le symétrique de 17 par rapport à 41 et $2 \times 41 - 17 = 65$ ou aussi le symétrique de $\dfrac{\pi}{4}$ par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$ est $2 \times \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Soit alors $\Omega(a,b)$ un point du plan. La **symétrie centrale** de centre Ω est l'application du plan dans lui-même, notée s_Ω, qui à un point M du plan associe le point M' défini par $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$.

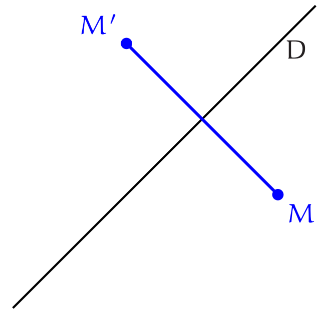
On a immédiatement

- la symétrie centrale de centre Ω est aussi l'homothétie de centre Ω et de rapport -1.
- l'égalité $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$ est équivalente au fait que Ω est le milieu du segment $[MM']$.
- La symétrie centrale de centre Ω est une bijection du plan sur-lui même car la symétrie centrale de centre Ω est involutive : $(s_\Omega)^{-1} = s_\Omega$.
- Si $\Omega(a,b)$, $M(x,y)$ et $M'(x',y')$, alors $\left\{\begin{array}{l} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{array}\right.$ (expression analytique d'une symétrie centrale).



2.1.4 Symétries orthogonales par rapport à une droite

On se donne une droite D. La **symétrie orthogonale** d'axe D (ou la **réflexion** d'axe D) est l'application du plan dans lui-même, notée s_D, qui à un point M du plan associe le point M' tel que : si $M \in D$, alors $M' = M$ et si $M \notin D$, alors la droite D est la médiatrice du segment $[M, M']$.



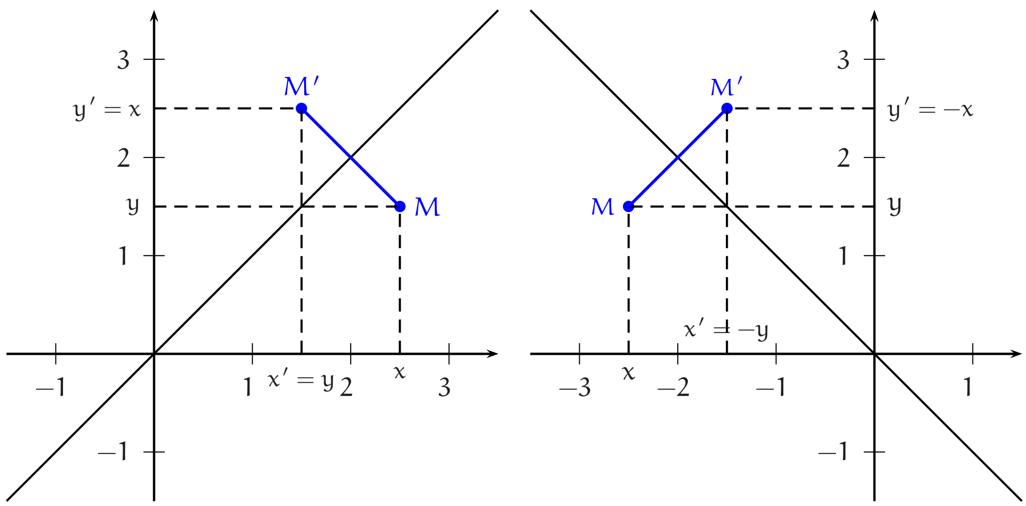
On a immédiatement

- La réflexion d'axe D est une bijection du plan sur-lui même car la réflexion d'axe D est involutive : $(s_D)^{-1} = s_D$.

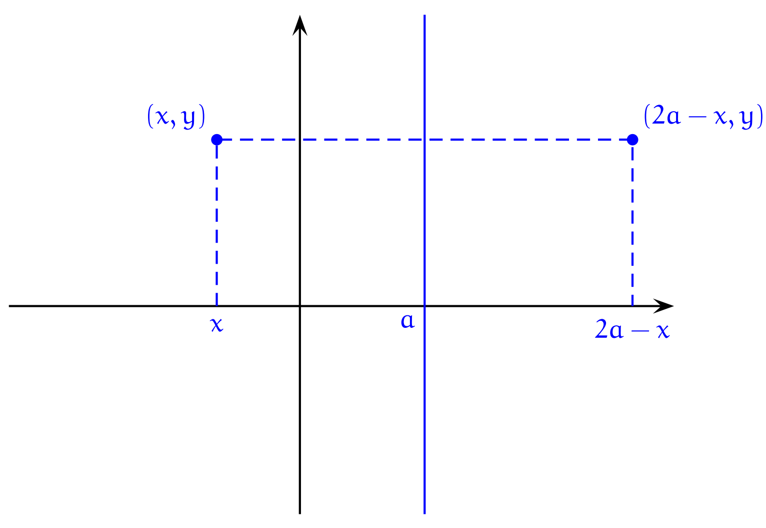
Nous ne chercherons pas ici à exprimer les coordonnées du point M' en fonction de celles du point M dans le cas général. Nous nous contenterons de trois cas particuliers immédiats.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

- L'image du point $M(x, y)$ par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ a pour coordonnées (y, x).
- L'image du point $M(x, y)$ par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = -x$ a pour coordonnées $(-y, -x)$.

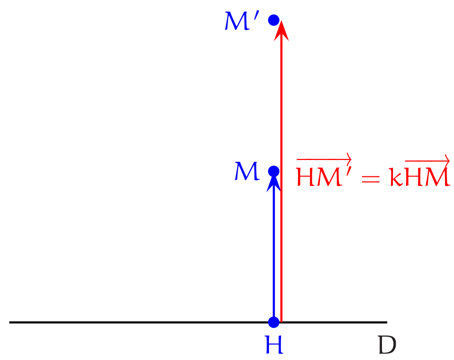


- Soit a un réel. Les coordonnées du symétrique $M'(x', y')$ du point $M(x, y)$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = a$ a pour coordonnées $(2a - x, y)$.



2.1.5 Affinités orthogonales

On se donne une droite D et un nombre k. L'**affinité orthogonale** d'axe D et de rapport k est l'application du plan dans lui-même, notée $a_{D,k}$ ou $\text{aff}_{D,k}$, qui à un point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur la droite D.



Nous ne chercherons pas non plus à exprimer les coordonnées du point M' en fonction de celles du point M dans le cas général. Nous nous contenterons de deux cas particuliers immédiats :

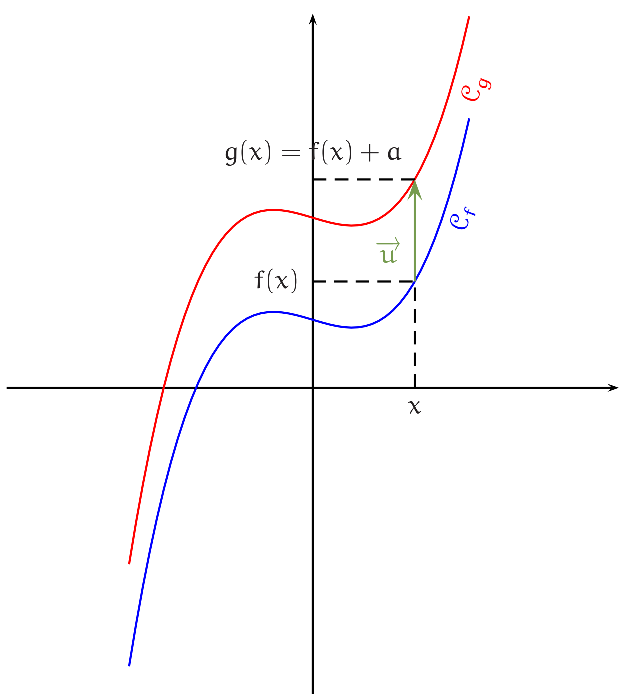
- Si D est l'axe (Ox) et si M a pour coordonnées (x, y), le point M' a pour coordonnées (x, ky).
- Si D est l'axe (Oy) et si M a pour coordonnées (x, y), le point M' a pour coordonnées (kx, y).

2.2 Quelques transformations d'un graphe

2.2.1 Graphe de $x \mapsto f(x) + a$

On se donne $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On se donne ensuite un réel a et on considère la fonction $g : x \mapsto f(x) + a$.

Soient $x \in D$ puis M le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x. Les coordonnées de M sont $(x, g(x)) = (x, f(x) + a)$. Ce point est le translaté du point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x, f(x))$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(0, a)$.



Ensuite, $\mathcal{C}_f$ est $\{(x, f(x)),\ x \in D\}$ puis $\mathcal{C}_g = \{(x, g(x)),\ x \in D\} = \{(x, f(x) + a),\ x \in D\} = \{t_{\overrightarrow{u}}(x, f(x)),\ x \in D\} = t_{\overrightarrow{u}}(\mathcal{C}_f)$. Donc,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{le graphe de la fonction } x \mapsto f(x) + a \text{ est le translaté du graphe de la fonction } x \mapsto f(x) \\ \text{dans la translation de vecteur } \overrightarrow{u}(0, a).\end{array}}$$

2.2.2 Graphe de $x \mapsto f(x+a)$

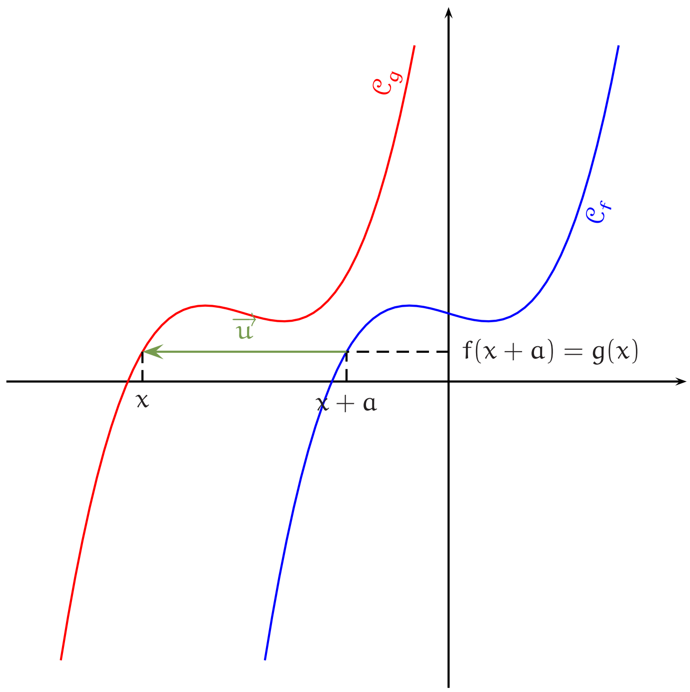
On se donne $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On se donne ensuite un réel a et on considère la fonction $g : x \mapsto f(x+a)$. La fonction g est définie sur $D - a = \{x - a,\ x \in D\}$.

Soient $x \in D - a$ puis M le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x. Les coordonnées de M sont $(x, g(x)) = (x, f(x+a))$. Ce point est le translaté du point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x+a, f(x+a))$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(-a, 0)$. Notons qu'il revient au même de dire que pour tout x de D, le translaté du point de coordonnées $(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ est le point de coordonnées $(x - a, f(x)) = (x - a, g(x - a))$ de $\mathcal{C}_g$.
Par suite,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_g &= \{(x, g(x)),\ x \in D - a\} = \{(x, f(x+a)),\ x \in D - a\} = \{t_{\overrightarrow{u}}(x+a, f(x+a)),\ x \in D - a\} \\ &= \{t_{\overrightarrow{u}}(x', f(x')),\ x' \in D\} = t_{\overrightarrow{u}}\left(\mathcal{C}_f\right).\end{aligned}$$

Au passage, on a utilisé le fait que l'application $x \mapsto x + a$ est une bijection de $D - a$ sur D et donc x décrit $D - a$ si et seulement si $x' = x + a$ décrit D.

> Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x+a)$ est le translaté du graphe de la fonction $x \mapsto f(x)$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(-a, 0)$.

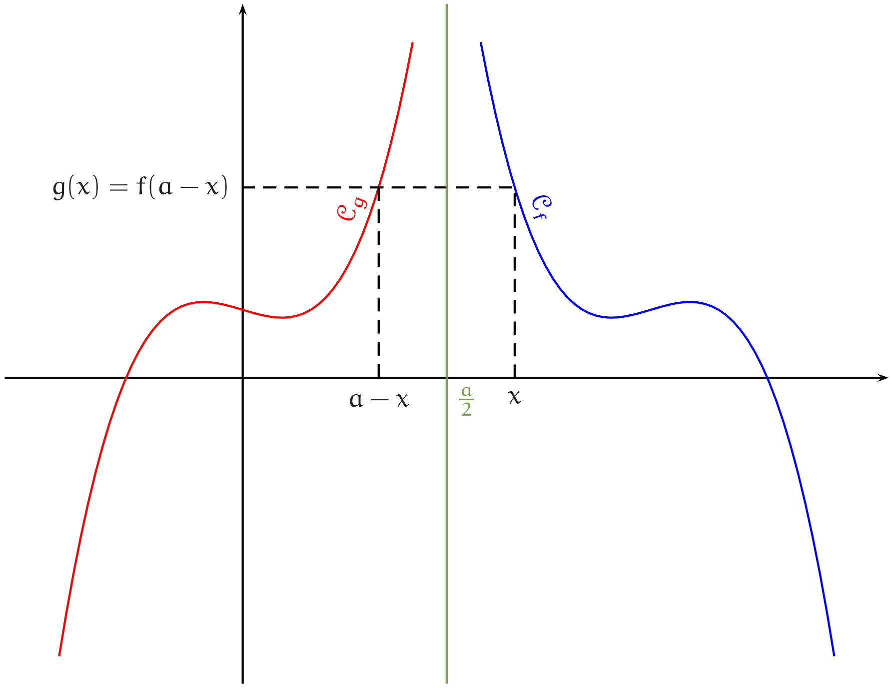


2.2.3 Graphe de $x \mapsto f(a-x)$

On se donne $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On se donne ensuite un réel a et on considère la fonction $g : x \mapsto f(a-x)$. La fonction g est définie sur $D' = \{a - x,\ x \in D\}$ (le domaine D' est le symétrique du domaine D par rapport au réel $\dfrac{a}{2}$). En notant Δ la droite d'équation $x = \dfrac{a}{2}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_g &= \{(x, g(x)),\ x \in D'\} = \{(x, f(a-x)),\ x \in D'\} = \{s_\Delta(a-x, f(a-x)),\ x \in D\} \\ &= s_\Delta\left(\mathcal{C}_f\right).\end{aligned}$$

> Le graphe de la fonction $x \mapsto f(a-x)$ est le symétrique du graphe de la fonction $x \mapsto f(x)$ par la réflexion d'axe la droite d'équation $x = \dfrac{a}{2}$.

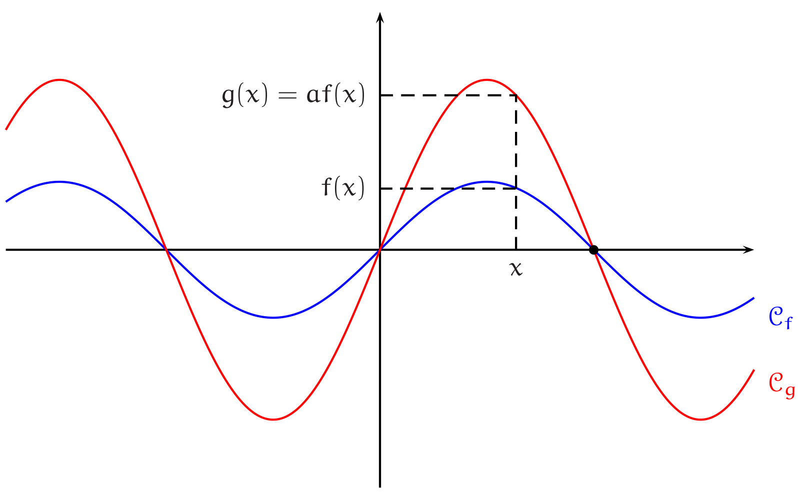


2.2.4 Graphe de $x \mapsto af(x)$ $(a \neq 0)$

On se donne $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On se donne ensuite un réel non nul a et on considère la fonction $g : x \mapsto af(x)$. La fonction g est définie sur D puis

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_g &= \{(x, g(x)),\ x \in D\} = \{(x, af(x)),\ x \in D\} = \left\{\mathrm{aff}_{(Ox),a}(x, f(x)),\ x \in D\right\} \\ &= \mathrm{aff}_{(Ox),a}\left(\mathcal{C}_f\right).\end{aligned}$$

Le graphe de la fonction $x \mapsto af(x)$ est l'image du graphe de la fonction $x \mapsto f(x)$ par l'affinité d'axe (Ox) et de rapport a.

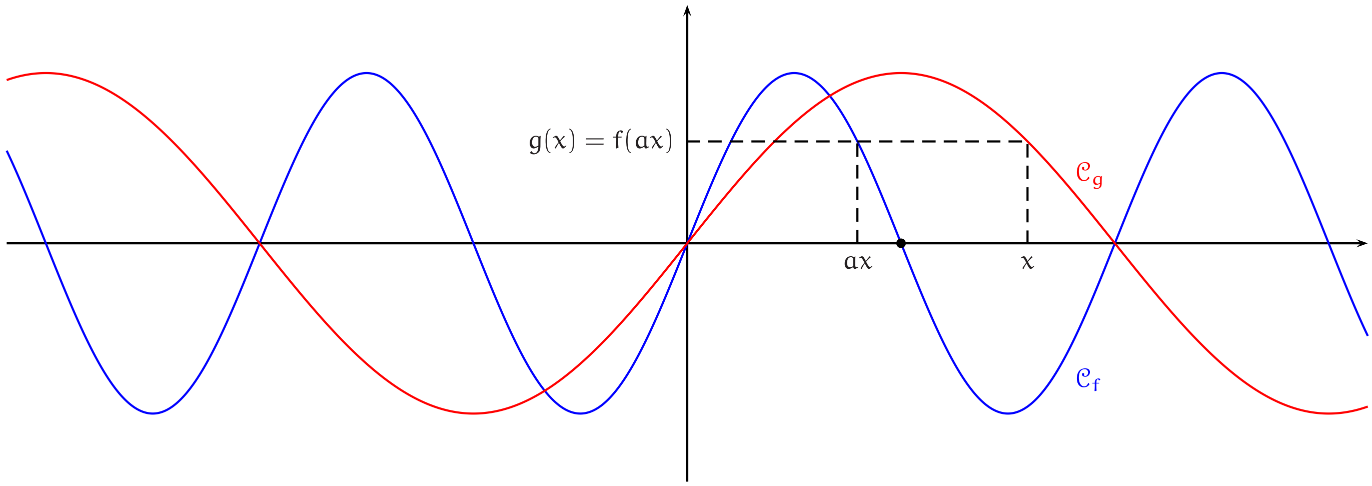


2.2.5 Graphe de $x \mapsto f(ax)$ $(a \neq 0)$

On se donne $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On se donne ensuite un réel non nul a et on considère la fonction $g : x \mapsto f(ax)$. La fonction g est définie sur $D' = \left\{\dfrac{x}{a},\ x \in D\right\}$ puis

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_g &= \{(x, g(x)),\ x \in D'\} = \{(x, f(ax)),\ x \in D'\} = \left\{\mathrm{aff}_{(Oy),\frac{1}{a}}(ax, f(ax)),\ x \in D'\right\} = \left\{\mathrm{aff}_{(Oy),\frac{1}{a}}(x', f(x')),\ x' \in D\right\} \\ &= \mathrm{aff}_{(Oy),\frac{1}{a}}\left(\mathcal{C}_f\right).\end{aligned}$$

Le graphe de la fonction $x \mapsto f(ax)$ est l'image du graphe de la fonction $x \mapsto f(x)$ par l'affinité d'axe (Oy) et de rapport $\dfrac{1}{a}$.



3 Fonctions paires, impaires. Symétries des graphes

3.1 Fonctions paires, impaires

Définition 1. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. D est symétrique par rapport à 0 si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \in D \Leftrightarrow -x \in D).$$

Par exemple, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ ou $]-1,1[$ sont symétriques par rapport à 0 mais $]-1,1]$ ou $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ne le sont pas.

Définition 2. Soit f une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

f est **paire** si et seulement si $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$.
f est **impaire** si et seulement si $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.

Exemples.
• La fonction $f\ :\ x \mapsto x^2$ est paire car définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Plus généralement, les fonctions $x \mapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$ (exposant pair), sont des fonctions paires. La notion de « fonction paire » fait référence à ces fonctions de base.
• La fonction $f\ :\ x \mapsto x^3$ est impaire car définie sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Plus généralement, les fonctions $x \mapsto x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$ (exposant impair), sont des fonctions impaires. La notion de « fonction impaire » fait référence à ces fonctions de base.
• La fonction $f\ :\ x \mapsto x^3+x+1$ n'est ni paire, ni impaire car $f(1) = 3$, $f(-1) = -1$ et donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$. On démontrera plus tard qu'un polynôme est pair (resp. impair) si et seulement si ce polynôme « ne contient » que des exposants pairs (resp. impairs).
• La fonction nulle (définie sur $\mathbb{R}$) est une fonction qui est à la fois paire et impaire. Démontrons que c'est la seule fonction à la fois paire et impaire.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à la fois paire et impaire. Alors, pour tout réel x, $f(x) = f(-x) = -f(x)$ puis $2f(x) = 0$ et donc $f(x) = 0$. Ainsi, seule la fonction nulle est à la fois paire et impaire. ❏

Exercice 1. Etudier la parité de la fonction $f\ :\ x \mapsto \ln\left|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right|$.

Solution 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^x+1 > 0$ et en particulier $e^x+1 \neq 0$. D'autre part part, $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Donc, pour $x \neq 0$, $\left|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right| > 0$ et pour $x = 0$, $\left|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right| = 0$. Ainsi, $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$. La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R}^*$ qui est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in D$.

$$f(-x)=\ln\left|\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right|=\ln\left|\frac{\dfrac{1}{e^x}-1}{\dfrac{1}{e^x}+1}\right|=\ln\left|\frac{1-e^x}{1+e^x}\right|=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|=f(x).$$

On a montré que la fonction f est paire.

Théorème 1. Si f est une fonction impaire et si f est définie en 0, alors $f(0)=0$.

Démonstration . Si f est impaire et définie en 0, alors $f(0)=f(-0)=-f(0)$ puis $2f(0)=0$ et finalement $f(0)=0$.

❑

Théorème 2. Soient f et g deux fonctions définies sur un domaine non vide D de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0 à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f et g sont paires (resp. impaires), toute combinaison linéaire de f et g est paire (resp. impaire).

Ainsi, toute combinaison linéaire de fonctions paires (resp. impaires) est paire (resp. impaire). Par exemple, toute combinaison linéaire de monômes pairs (resp. impairs) est un polynôme pair (resp. impair). Ainsi, le polynôme $P\ :\ x\mapsto 5x^6-4x^2+3$ est pair et le polynôme $Q\ :\ x\mapsto -x^7+5x^3+x$ est impair. On peut noter qu'une fonction constante non nulle est une fonction paire (et on rappelle que la fonction nulle est à la fois paire et impaire).

Démonstration . Soient λ et μ deux nombres (réels ou complexes). Supposons f et g paires. Alors, pour tout x de D,

$$(\lambda f+\mu g)(-x)=\lambda f(-x)+\mu g(-x)=\lambda f(x)+\mu g(x)=(\lambda f+\mu g)(x).$$

Donc, la fonction $\lambda f+\mu g$ est paire. La démonstration est analogue si f et g sont impaires.

❑

Théorème 3. Soient f et g deux fonctions définies sur un domaine non vide D de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0 à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f et g sont toutes deux paires ou toutes deux impaires, la fonction $f\times g$ est paire.
Si une des deux fonctions f ou g est paire et l'autre impaire, la fonction $f\times g$ est impaire.

Démonstration .

Supposons f et g paires. Alors, pour tout x de D, $(f\times g)(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=(f\times g)(x)$. Donc, $f\times g$ est paire.
Supposons f et g impaires. Alors, pour tout x de D, $(f\times g)(-x)=f(-x)g(-x)=(-f(x))(-g(x))=f(x)g(x)=(f\times g)(x)$. Donc, $f\times g$ est paire.
Supposons f paire et g impaire. Alors, pour tout x de D, $(f\times g)(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)(-g(x))=-f(x)g(x)=-(f\times g)(x)$. Donc, $f\times g$ est impaire.

❑

⇨ **Commentaire** .

◇ *On dit parfois que la parité de* $f\times g$ *obéit à la « règle des signes ».*

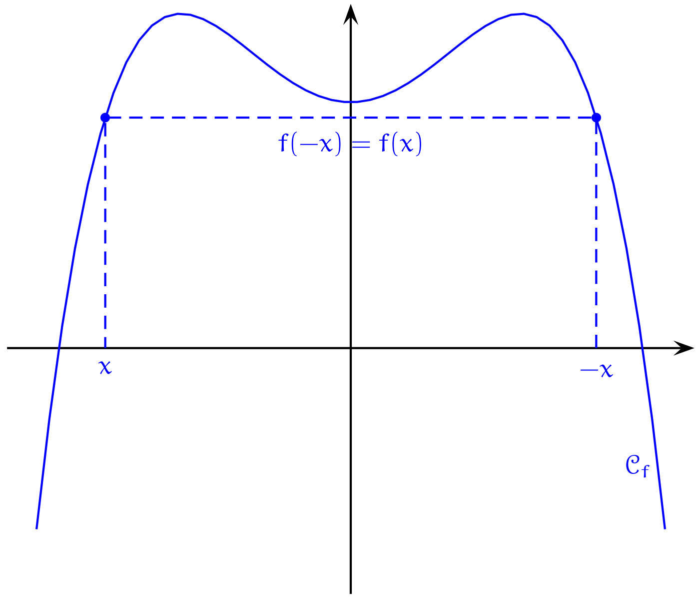
◇ *On a un théorème identique pour les quotients de fonctions.*

3.2 Axe de symétrie « vertical »

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. Soit f une fonction définie sur un domaine non vide D de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On sait que le graphe de la fonction $g\ :\ x\mapsto f(-x)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe (Oy).
Mais alors, f paire $\Leftrightarrow f=g\Leftrightarrow \mathcal{C}_f=\mathcal{C}_g$. Donc

Théorème 4. Soit f une fonction définie sur un domaine non vide D de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe (Oy).



Plus généralement,

Définition 3. Soient D une partie non vide de $\mathbb{R}$ et a un réel.

D est symétrique par rapport à a si et seulement si pour tout réel x, $(x \in D \Leftrightarrow 2a - x \in D)$.

⇨ **Commentaire** . *Dans la définition ci-dessus, l'équivalence* $(x \in D \Leftrightarrow 2a - x \in D)$ *peut être remplacée par l'implication* $(x \in D \Rightarrow 2a - x \in D)$ *car l'application* $x \mapsto 2a - x$ *est involutive (comme toute symétrie). En effet, si on suppose que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x \in D \Rightarrow 2a - x \in D)$ *alors, pour tout réel* x,

$$2a - x \in D \Rightarrow 2a - (2a - x) \in D \Rightarrow x \in D.$$

On sait que le graphe de la fonction $g : x \mapsto f(2a-x)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $x = a$. Donc,

Théorème 5. Soit f une fonction définie sur un domaine non vide D de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à un réel a, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si $\forall x \in D$, $f(2a - x) = f(x)$.

⇨ **Commentaire** . *Il revient au même de dire que la fonction* $x \mapsto f(x - a)$ *est paire.*

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Solution 2. Pour tout réel x,

$$f(2 \times 2 - x) = f(4 - x) = (4 - x)^2 - 4(4 - x) + 3 = x^2 - 4x + 3 = f(x).$$

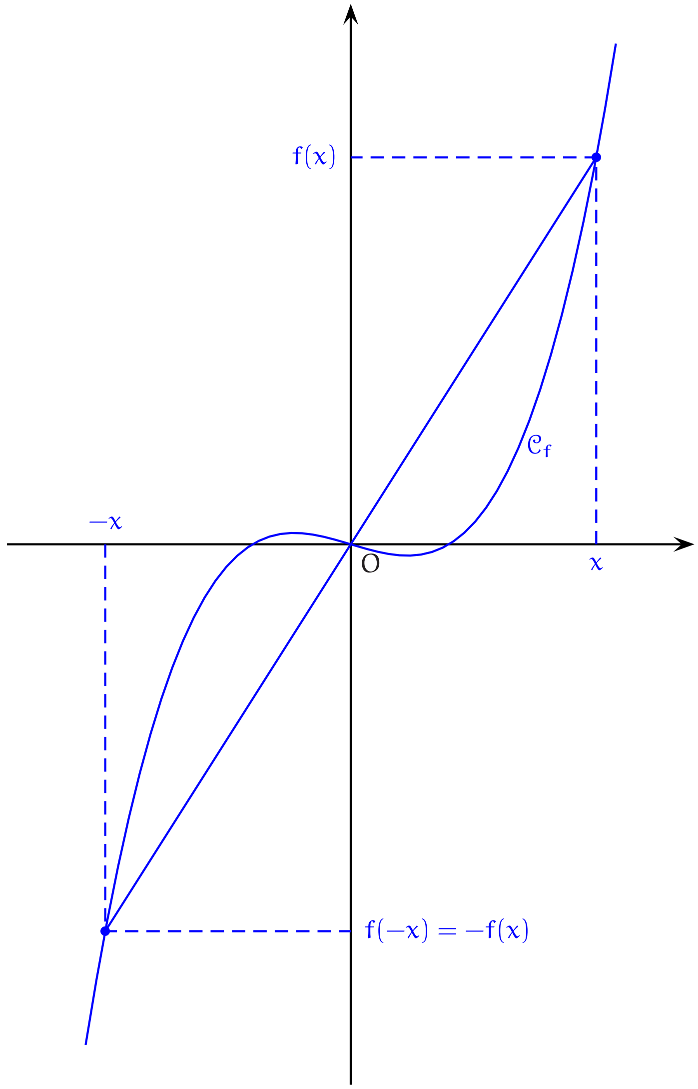
Donc, la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

3.3 Centre de symétrie

Soit f une fonction impaire, définie sur un domaine non vide D de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dire que f est impaire équivaut à dire que pour tout réel x de D, le point M' de coordonnées $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ est le symétrique du point $M(x, f(x))$ par rapport à l'origine $O(0, 0)$. Donc

Théorème 6. Soit f une fonction définie sur un domaine non vide D de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine O.



Plus généralement,

Théorème 7. Soit Ω un point du plan. Soit f une fonction définie sur un domaine non vide D de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport au réel x_Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le graphe de f est symétrique par rapport au point Ω si et seulement si $\forall x \in D$, $f(2x_\Omega - x) + f(x) = 2y_\Omega$.

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$.

Montrer que le point $\Omega\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de f notée $\mathcal{C}_f$.

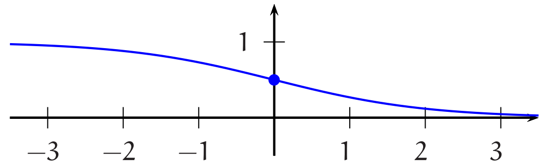
Solution 3. f est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel x, $e^x + 1 > 1$ et en particulier, $e^x + 1 \neq 0$. Pour tout réel x,

$$f(2x_\Omega - x) = f(-x) = \frac{1}{e^{-x}+1} = \frac{1}{\dfrac{1}{e^x}+1} = \frac{e^x}{e^x+1},$$

et donc

$$f(2x_\Omega - x) + f(x) = \frac{1}{e^x+1} + \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1 = 2y_\Omega.$$

Donc, le point $\Omega\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.



4 Fonctions périodiques

DÉFINITION 4. Soit T un réel. Une partie non vide D de $\mathbb{R}$ est invariante par T-translation si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \in D \Leftrightarrow x + T \in D).$$

⇨ **Commentaire** . *On prendra garde au fait que la définition ci-dessus contient une équivalence* ($x \in D \Leftrightarrow x+T \in D$) *et pas une implication* ($x \in D \Rightarrow x + T \in D$).
Par exemple, si $D = [0, +\infty[$*, alors si* $x \in D$*, on a effectivement* $x + 1 \in D$ *mais si* $x + 1 \in D$*, on n'a pas nécessairement* $x \in D$ *(par exemple, si* x *est le réel* -1*, alors* $x + 1 \in D$ *mais* $x \notin D$*). L'ensemble* D *n'est donc pas invariant par* 1*-translation.*
En revanche, l'ensemble $D = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ *est invariant par* 2π*-translation car* $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x + 2\pi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z})$.

DÉFINITION 5. Soit T un réel. Soit f une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$, invariante par T-translation, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

f est **T-périodique** si et seulement si

$$\forall x \in D,\ f(x + T) = f(x).$$

Dans ce cas, on dit que T est une **période** de f.

DÉFINITION 6. Soit f une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

f est **périodique** si et seulement si il existe un réel *non nul* T tel que D est invariant par T-translation et f est T-périodique.

⇨ **Commentaire** .

◇ *On note que toute fonction, périodique ou pas, est* 0*-périodique. Les fonctions périodiques sont les fonctions qui admettent au moins une période non nulle.*

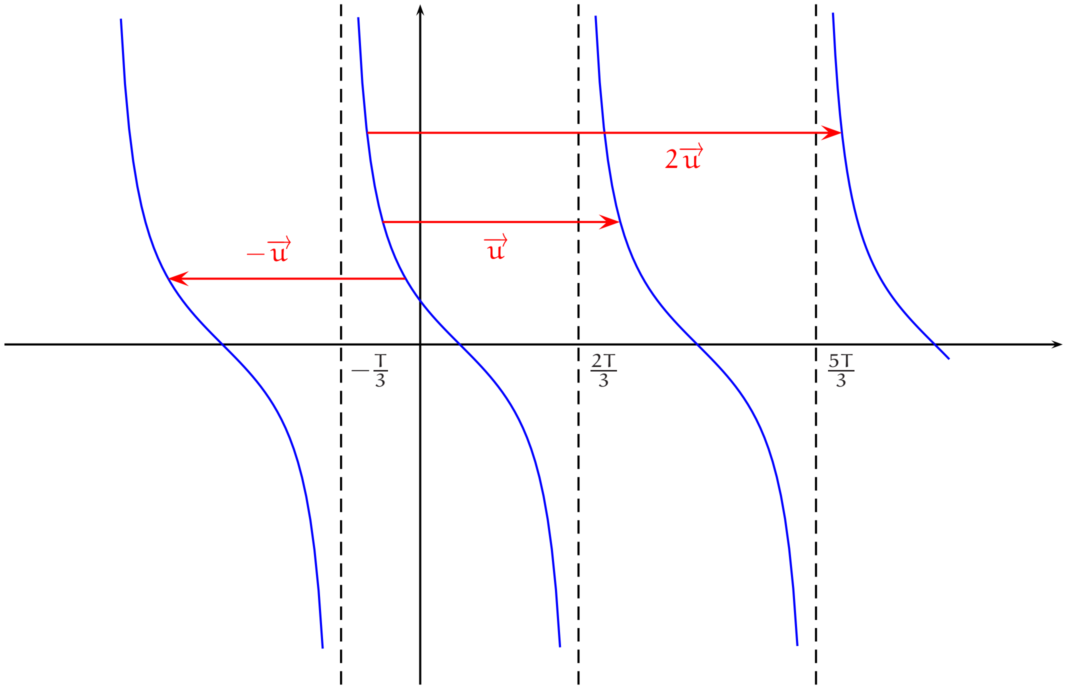
◇ *Si* f *est une fonction périodique, il n'y pas unicité de la période. Si* T *est une période non nulle de* f*, alors* $2T$ *est une autre période de* f *car pour tout* x *de* D, $f(x+2T) = f(x+T) = f(x)$. *Plus généralement, tous les nombres de la forme* kT, $k \in \mathbb{Z}$*, sont des périodes de* f*. On s'intéressera à la structure de l'ensemble des périodes d'une fonction périodique dans un chapitre ultérieur.*

◇ *Les fonctions constantes admettent tout réel pour période.*

Soient f une fonction périodique puis T une période non nulle de f. Supposons avoir construit le graphe de f sur l'intersection d'un intervalle fermé de longueur T avec le domaine D comme $[0, T] \cap D$ par exemple. Le graphe de f sur $[T, 2T] \cap D$ est

$$\{(x, f(x)),\ x \in [T, 2T] \cap D\} = \{(x, f(x-T)),\ x \in [T, 2T] \cap D\} = \{(x' + T, f(x')),\ x' \in [0, T] \cap D\} = t_{\overrightarrow{u}}(\{(x, f(x)),\ x \in [0, T] \cap D\})$$

où $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(T, 0)$. Le graphe de f sur $[T, 2T] \cap D$ est donc le translaté du graphe de f sur $[0, T] \cap D$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(T, 0)$. Plus généralement, quand on a construit le graphe de f sur l'intersection d'un intervalle fermé de longueur T avec le domaine D, on obtient le graphe complet par translations de vecteurs $(kT, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Exercice 4. Après avoir étudié la parité et la périodicité de la fonction $f\ :\ x \mapsto \sqrt{\dfrac{\cos x + 1}{2\cos x - 1}}$, déterminer le domaine de définition de la fonction f.

Solution 4. Notons D le domaine de définition de la fonction f.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$ (car pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos x$). Soit alors $x \in D$.

$$f(-x) = \sqrt{\frac{\cos(-x) + 1}{2\cos(-x) - 1}} = \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2\cos x - 1}} = f(x).$$

f est paire.
• Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D \Leftrightarrow x + 2\pi \in D$. Soit alors $x \in D$.

$$f(x + 2\pi) = \sqrt{\frac{\cos(x + 2\pi) + 1}{2\cos(x + 2\pi) - 1}} = \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2\cos x - 1}} = f(x).$$

f est 2π-périodique.
• Puisque f est 2π-périodique, il suffit de déterminer l'intersection de D et d'un intervalle fermé de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$ par exemple. De plus, f est paire et il suffit de déterminer l'intersection de D et de $[0, \pi]$.
• Soit $x \in [0, \pi]$. $\cos x + 1 \geqslant 0$ et donc

$$x \in D \Leftrightarrow 2\cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right[.$$

Donc, $D \cap [0, \pi] = \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right[$. Par parité, $D \cap [-\pi, \pi] = \left]-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right[$ puis par 2π-périodicité

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[.$$

⇨ **Commentaire** . *On a étudié la parité et la périodicité **avant** de déterminer le domaine de définition de* f*. Pour écrire l'équivalence,* $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$*, nous n'avions pas besoin de connaître* D*. Cette chronologie nous a permis de simplifier la recherche du domaine de définition.*

5 Inégalités. Sens de variation d'une fonction réelle

5.1 Fonctions majorées, minorées, bornées.

DÉFINITION 7. Soit f définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

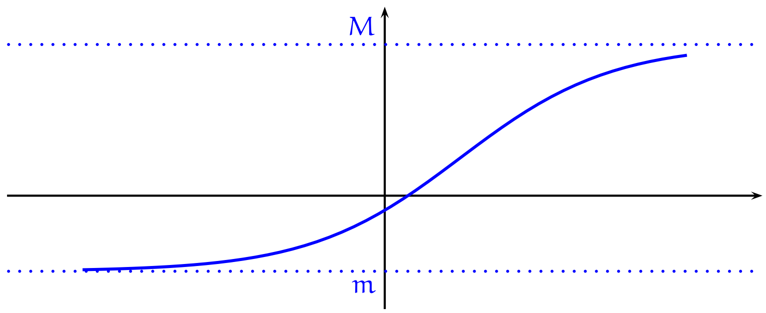
f est **majorée** sur D si et seulement si il existe un réel M tel que, pour tout x de D, $f(x) \leqslant M$. Un tel réel M s'appelle alors **un majorant** de f sur D.

f est **minorée** sur D si et seulement si il existe un réel m tel que, pour tout x de D, $f(x) \geqslant m$. Un tel réel m s'appelle alors **un minorant** de f sur D.

f est **bornée** sur D si et seulement si f est majorée et minorée sur D.

⇨ **Commentaire**. *Dans la définition ci-dessus, il est essentiel de comprendre que le nombre M (ou m) fourni est **indépendant de** la variable x. Quand on écrit « pour tout x réel, $x \leqslant x+1$ », on n'a pas majoré la fonction $x \mapsto x$ au sens de la définition ci-dessus.*

Dire que f est minorée par m et majorée par M revient à dire que son graphe est situé entre les droites d'équations respectives $y = m$ et $y = M$:



Théorème 8. Soit f une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est bornée sur D si et seulement si $|f|$ est majorée sur D.

DÉMONSTRATION. Si $|f|$ est majorée sur D, il existe un réel M tel que, pour tout x de D, $|f(x)| \leqslant M$. Mais alors, pour tout x de D, $-M \leqslant f(x) \leqslant M$ et donc f est bornée sur D.

Réciproquement, supposons f bornée sur D. Il existe deux réels m et M tels que, pour tout x de D, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Pour $x \in D$ (en notant $\text{Max}\{|m|, |M|\}$ le plus grand des deux nombres $|m|$ et $|M|$),

$$-\text{Max}\{|m|, |M|\} \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant |M| \leqslant \text{Max}\{|m|, |M|\}.$$

On en déduit que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leqslant \text{Max}\{|m|, |M|\}$. En particulier, $|f|$ est majorée sur D.

❑

Exemple. On veut montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Un réflexe technique est : pour $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant \ldots$ Plus précisément, pour tout réel x, on a $(|x|-1)^2 \geqslant 0$ et donc $x^2+1 \geqslant 2|x|$ puis $|f(x)| = \dfrac{2|x|}{x^2+1} \leqslant 1$.
Ceci montre que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$. ❑

DÉFINITION 8. Soit f définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

La fonction f est **bornée** sur D si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée sur D.

Par exemple, pour tout réel x, $\left|1+e^{ix}\right| \leqslant |1| + \left|e^{ix}\right| \leqslant 2$. Donc, la fonction $x \mapsto 1+e^{ix}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Théorème 9. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

Si f et g sont bornées sur D, alors pour tous réels (resp. complexes) λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est bornée sur D.

DÉMONSTRATION. Soit M (resp. M') un majorant de la fonction $|f|$ (resp. $|g|$) sur D. Alors, pour tout réel x de D,

$$|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leqslant |\lambda||f(x)| + |\mu||g(x)| \leqslant |\lambda|M + |\mu|M'.$$

Donc, la fonction $|\lambda f + \mu g|$ est majorée sur D par le réel $|\lambda|M + |\mu|M'$ ou encore la fonction $\lambda f + \mu g$ est bornée sur D.

❑

Ainsi, toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée. De même, tout produit de fonctions bornées est borné :

Théorème 10. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f et g sont bornées sur D, alors la fonction $f \times g$ est bornée sur D.

Démonstration . Soient M (resp. M') un majorant de la fonction $|f|$ (resp. $|g|$) sur D. Alors, pour tout réel x de D,

$$|f(x) \times g(x)| = |f(x)| \times |g(x)| \leqslant M \times M'.$$

Donc, la fonction $|f \times g|$ est majorée sur D par le réel MM' ou encore la fonction $f \times g$ est bornée sur D.

❏

5.2 Sens de variation d'une fonction.

Définition 9. Soit f définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est **croissante** sur D si et seulement si $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$.
f est **décroissante** sur D si et seulement si $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b))$.

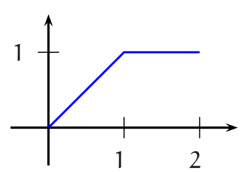
f est **strictement croissante** sur D si et seulement si $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a < b \Rightarrow f(a) < f(b))$.
f est **strictement décroissante** sur D si et seulement si $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a < b \Rightarrow f(a) > f(b))$.

f est **monotone** sur D si et seulement si, ou bien f est croissante sur D, ou bien f est décroissante sur D.
f est **strictement monotone** sur D si et seulement si, ou bien f est strictement croissante sur D, ou bien f est strictement décroissante sur D.

⇨ **Commentaire** . *La définition d'une fonction croissante contient une implication* $(a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$. *Cette implication ne peut pas être remplacée par une équivalence. Considérons par exemple la fonction* f *définie sur* $[0, 2]$ *par :*

$$\forall x \in [0, 2],\ f(x) = \left\{ \begin{array}{l} x \text{ si } x \in [0, 1] \\ 1 \text{ si } x \in [1, 2] \end{array} \right. .$$

La fonction f *est croissante sur* $[0, 2]$ *mais n'est pas strictement croissante.*



Les réels $a = 2$ *et* $b = 1$ *vérifient* $f(a) \leqslant f(b)$ *(car* $f(a) = f(b)$*) mais* $a > b$. *Donc, la proposition* $\forall (a, b) \in [0, 2]^2,\ (f(a) \leqslant f(b) \Rightarrow a \leqslant b)$ *est fausse.*

Théorème 11. Soit f une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est strictement croissante sur D si et seulement si $\forall (a, b) \in D^2,\ (a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b))$.
f est strictement décroissante sur D si et seulement si $\forall (a, b) \in D^2,\ (a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b))$.

f est strictement croissante sur D si et seulement si $\forall (a, b) \in D^2,\ (a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b))$.
f est strictement décroissante sur D si et seulement si $\forall (a, b) \in D^2,\ (a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \geqslant f(b))$.

Démonstration .

• Supposons par exemple f strictement croissante sur D. Soient a et b deux réels de D tels que $f(a) < f(b)$.
Si $a = b$, alors $f(a) = f(b)$ ce qui n'est pas et si $a > b$ car alors $f(a) > f(b)$ ce qui n'est pas. Donc, $a < b$.
Ainsi, si f est strictement croissante sur D, alors $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b))$. La réciproque est claire.

• Supposons par exemple f strictement croissante sur D. Soient a et b deux réels de D tels que $f(a) \leqslant f(b)$.
Si $a > b$, alors $f(a) > f(b)$ ce qui n'est pas. Donc, $a \leqslant b$.
Inversement, supposons que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b))$. Soit $(a, b) \in D^2$ tel que $a < b$. Si $f(a) \geqslant f(b)$, alors $a \geqslant b$ ce qui n'est pas. Donc $f(a) < f(b)$. Ainsi, f est strictement croissante sur D.

❏

Théorème 12. Soit f une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f est strictement monotone sur D alors f est injective sur D.
Si f est strictement monotone sur D alors f réalise une bijection de D sur $f(D)$.

Démonstration . Soient a et b deux réels distincts de D, a étant le plus petit des deux réels. Donc $a < b$.

Puisque f est strictement monotone sur D, on a ou bien $f(a) < f(b)$, ou bien $f(a) > f(b)$, et dans tous les cas, $f(a) \neq f(b)$.

On a montré que : $\forall (a, b) \in D^2,\ (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$. Donc, f est injective. Enfin, puisque f est injective sur D, f réalise une bijection de D sur $f(D)$.

❑

Ainsi, quand on écrit $e^x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 3$, l'équivalence est due à la stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$ et non pas seulement à sa croissance, et ceci malgré l'inégalité large.

Théorème 13. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f et g sont croissantes sur D alors $f + g$ est croissante sur D.
Si f et g sont décroissantes sur D alors $f + g$ est décroissante sur D.

Si f est strictement croissante sur D et g est croissante sur D alors $f + g$ est strictement croissante sur D.
Si f est strictement décroissante sur D et g est croissante sur D alors $f + g$ est strictement croissante sur D.

Démonstration .

• Supposons par exemple f et g croissantes sur D. Soient a et b deux réels de D tels que $a \leqslant b$. Alors $f(a) \leqslant f(b)$ et $g(a) \leqslant g(b)$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $f(a) + g(a) \leqslant f(b) + g(b)$.
On a montré que : $\forall (a, b) \in D^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow (f+g)(a) \leqslant (f+g)(b))$. Donc, $f + g$ est croissante sur D. La démarche est analogue si f et g sont décroissantes.

• Supposons par exemple f strictement croissante sur D et g croissante sur D. Soient a et b deux réels de D tels que $a < b$. Alors $f(a) < f(b)$ et $g(a) \leqslant g(b)$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$.
On a montré que : $\forall (a, b) \in D^2,\ (a < b \Rightarrow (f+g)(a) < (f+g)(b))$. Donc, $f + g$ est strictement croissante sur D.

❑

Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2 + x$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions strictement croissantes sur $[0, +\infty[$ ou la fonction $x \mapsto \cos x + \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0, \pi]$ en tant que somme de fonctions strictement décroissantes sur $]0, \pi]$.

Théorème 14. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f et g sont positives et croissantes sur D alors $f \times g$ est croissante sur D.
Si f et g sont positives décroissantes sur D alors $f \times g$ est décroissante sur D.

Si f et g sont strictement positives et strictement croissantes sur D alors $f \times g$ est strictement croissante sur D.
Si f et g sont strictement positives et strictement décroissantes sur D alors $f \times g$ est strictement décroissante sur D.

Démonstration .

• Supposons par exemple f et g croissantes et positives sur D. Soient a et b deux réels de D tels que $a \leqslant b$. Alors $0 \leqslant f(a) \leqslant f(b)$ et $0 \leqslant g(a) \leqslant g(b)$. En multipliant membre à membre ces inégalités entre réels positifs, on obtient $f(a) \times g(a) \leqslant f(b) \times g(b)$.
On a montré que : $\forall (a, b) \in D^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow (f \times g)(a) \leqslant (f \times g)(b))$. Donc, $f \times g$ est croissante sur D.

• Supposons par exemple f et g strictement croissantes et strictement positives sur D. Soient a et b deux réels de D tels que $a < b$. Alors $0 < f(a) < f(b)$ et $0 < g(a) < g(b)$. En multipliant membre à membre ces inégalités strictes entre réels strictement positifs, on obtient $f(a) \times g(a) < f(b) \times g(b)$.
On a montré que : $\forall (a, b) \in D^2,\ (a < b \Rightarrow (f \times g)(a) < (f \times g)(b))$. Donc, $f \times g$ est strictement croissante sur D.

❑

⇨ **Commentaire** . *Il existe de nombreuses situations non envisagées par le théorème précédent dans lesquelles on peut conclure. Par exemple,*

- le produit d'une fonction strictement croissante et strictement positive et d'une fonction croissante et strictement positive est une fonction strictement croissante

- le produit de deux fonctions croissantes négatives est une fonction croissante (car $fg = (-f)(-g)$*) ...*

Il existe néanmoins des situations où l'on ne peut rien conclure. Par exemple, la fonction $f\ :\ x \mapsto x \ln x$ *est le produit de deux fonctions croissantes sur* $]0, 1]$*. Mais l'une des deux, la fonction* $x \mapsto x$*, est positive sur* $]0, 1]$ *et l'autre, la fonction* $x \mapsto \ln x$*, est négative sur* $]0, 1]$*. La dérivée de* f *est la fonction* $f'\ :\ x \mapsto \ln x + 1$*.* f' *est strictement négative sur* $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ *et strictement positive sur* $\left]\dfrac{1}{e}, 1\right]$*. La fonction* f *est donc strictement décroissante sur* $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$ *et strictement croissante sur* $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$*.*
On ne peut donc donner aucun résultat général sur un produit de fonctions croissantes.

Théorème 15. Soit f une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans une partie D' de $\mathbb{R}$ et soit g une fonction définie sur D' à valeurs dans $\mathbb{R}$

Si f est croissante sur D et g est croissante sur D' alors $g \circ f$ est croissante sur D.
Si f est croissante sur D et g est décroissante sur D' alors $g \circ f$ est décroissante sur D.
Si f est décroissante sur D et g est croissante sur D' alors $g \circ f$ est décroissante sur D.
Si f est décroissante sur D et g est décroissante sur D' alors $g \circ f$ est croissante sur D.

Démonstration. Soient a et b deux réels de D tels que $a \leqslant b$.

• Supposons f croissante sur D et g croissante sur D'. Alors $f(a) \leqslant f(b)$. Puisque $f(a)$ et $f(b)$ sont dans D' et que g est croissante sur D', on en déduit $g(f(a)) \leqslant g(f(b))$.
On a montré que : $\forall (a,b) \in D^2$, $(a \leqslant b \Rightarrow (g \circ f)(a) \leqslant (g \circ f)(b))$. Donc, $g \circ f$ est croissante sur D.

• Supposons f décroissante sur D et g décroissante sur D'. Alors $f(a) \geqslant f(b)$. Puisque $f(a)$ et $f(b)$ sont dans D' et que g est décroissante sur D', on en déduit $g(f(a)) \leqslant g(f(b))$.
On a montré que : $\forall (a,b) \in D^2$, $(a \leqslant b \Rightarrow (g \circ f)(a) \leqslant (g \circ f)(b))$. Donc, $g \circ f$ est croissante sur D.

• Supposons f croissante sur D et g décroissante sur D'. Alors $f(a) \leqslant f(b)$. Puisque $f(a)$ et $f(b)$ sont dans D' et que g est décroissante sur D', on en déduit $g(f(a)) \geqslant g(f(b))$.
On a montré que : $\forall (a,b) \in D^2$, $(a \leqslant b \Rightarrow (g \circ f)(a) \geqslant (g \circ f)(b))$. Donc, $g \circ f$ est décroissante sur D.

• Supposons f décroissante sur D et g croissante sur D'. Alors $f(a) \geqslant f(b)$. Puisque $f(a)$ et $f(b)$ sont dans D' et que g est croissante sur D', on en déduit $g(f(a)) \geqslant g(f(b))$.
On a montré que : $\forall (a,b) \in D^2$, $(a \leqslant b \Rightarrow (g \circ f)(a) \geqslant (g \circ f)(b))$. Donc, $g \circ f$ est décroissante sur D. ❏

⇨ **Commentaire** .

◇ *On dit parfois que le sens de variation d'une composée obéit à la « règle des signes ».*

◇ *On a des résultats analogues pour des fonctions strictement monotones.*

Par exemple, soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{3x+1}{x+1} = 3 - \dfrac{2}{x+1}$. Pour $x \in]-1,+\infty[$, posons $g(x) = x+1$ puis pour $y \in]0,+\infty[$, posons $h(y) = \dfrac{1}{y}$ puis pour $z \in \mathbb{R}$, posons $k(z) = 3 - 2z$.
Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a $f(x) = k(h(g(x)))$ ou encore $f = k \circ h \circ g$. La fonction g est croissante sur $]-1,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$, la fonction h est décroissante sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction k est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $f = k \circ h \circ g$ est croissante sur $]-1,+\infty[$.

De manière générale, ce type de raisonnement s'applique aux fonctions où la variable x **n'apparaît qu'une seule fois**. Ces fonctions s'interprètent alors comme composée de fonctions de référence, fonctions dont le sens de variation est supposé connu.

6 Rappels et compléments sur la dérivation

6.1 Fonction dérivée d'une fonction à valeurs réelles

Définition 10 (et théorème). Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit x_0 un réel de D.

f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite quand x tend vers x_0. Dans ce cas, cette limite s'appelle le **nombre dérivé** de la fonction f en x_0 et se note $f'(x_0)$ ou aussi $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ (différence infinitésimale de valeurs de f sur différence infinitésimale de valeurs de x en x_0.

En cas d'existence, la courbe représentative de f admet une tangente au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, non parallèle à l'axe des ordonnées. Le coefficient directeur de cette tangente est $f'(x_0)$ et donc une équation de cette tangente est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Définition 11. Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur D si et seulement f est dérivable en chaque réel x de D. La fonction dérivée de la fonction f est la fonction de D dans $\mathbb{R}$, notée f' ou $\dfrac{df}{dx}$, qui à chaque réel x associe $f'(x)$ le nombre dérivé de la fonction f en le réel x.

On rappelle brièvement les théorèmes généraux sur la dérivation (qui seront réénoncés et démontrés dans le chapitre dérivation) :

- si f et g sont dérivables sur D, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur D (une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur D est une fonction dérivable sur D) et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- si f et g sont dérivables sur D, alors $f \times g$ est dérivable sur D (un produit de fonctions dérivables sur D est une fonction dérivable sur D) et $(f \times g)' = f'g + fg'$.
- si f et g sont dérivables sur D et si g ne s'annule pas sur D, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur D (un quotient de fonctions dérivables sur D dont le dénominateur ne s'annule pas sur D est une fonction dérivable sur D) et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.
- si f est dérivable sur D, alors pour tout entier n supérieur ou égal à 2, f^n est dérivable sur D et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$. Si de plus, f ne s'annule pas sur D, la formule reste vraie pour les exposants n strictement négatifs.

Quand f est une fonction de deux variables : $(x, y) \mapsto f(x, y)$, on peut dériver les fonctions d'une seule variable $g : x \mapsto f(x, y)$, y étant fixé et $h : y \mapsto f(x, y)$, x étant fixé. Si x_0 et y_0 sont deux réels donnés, y étant fixé égal à y_0, la dérivée de la fonction g en x_0 s'appelle la **dérivée partielle** de f en (x_0, y_0) par rapport à sa première variable et se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ (dérivée partielle de f par rapport à x en (x_0, y_0)). Donc,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) \text{ pour pour tout } x,\ g(x) = f(x, y_0).$$

De même, la **dérivée partielle** de f en (x_0, y_0) par rapport à sa deuxième variable se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ (dérivée partielle de f par rapport à y en (x_0, y_0)) et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(y_0) \text{ pour pour tout } y,\ h(y) = f(x_0, y).$$

Par exemple, si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \dfrac{\sin\left(x^2 + 2y^2\right)}{y^2 + 1}$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y^2 + 1} \times (2x) \times \cos\left(x^2 + 2y^2\right) = \frac{2x\cos\left(x^2 + 2y^2\right)}{y^2 + 1},$$

(on a dérivé la fonction de x, y étant fixé) et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{4y\cos\left(x^2 + 2y^2\right)\left(y^2 + 1\right) - 2y\sin\left(x^2 + y^2\right)}{\left(y^2 + 1\right)^2},$$

(on a dérivé la fonction de y, x étant fixé).

6.2 Dérivée d'une composée

On admet momentanément le résultat suivant qui sera démontré ultérieurement dans le cours d'analyse.

Théorème 16. Soit f une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans une partie D$'$ de $\mathbb{R}$ et soit g une fonction définie sur D$'$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout x_0 de D, si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0)).$$

Si f est dérivable sur D et g est dérivable sur $f(D) (\subset D')$, alors $g \circ f$ est dérivable sur D et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Ainsi, « la dérivée de $g \circ f$ est le produit des dérivées de f et de g ». A ce stade, on peut donner une « démonstration » brève de ce résultat dans le cas particulier où f est injective (la démonstration n'est donc pas valable pour des fonctions aussi simples que les fonctions constantes par exemple). Pour $x \neq x_0$, on a $f(x) \neq f(x_0)$ puis

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \underset{x \to x_0}{\to} f'(x_0) \times g'(f(x_0)).$$

Dérivons par exemple la fonction $f : x \mapsto \cos\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si on pose $g\ :\ x \mapsto x^2+1$ puis $h\ :\ y \mapsto \sqrt{y}$ puis $k\ :\ z \mapsto \cos z$, on a $f = k \circ h \circ g$. La dérivée de f est le produit des trois dérivées g', h' et k' exprimées respectivement en x, $y = x^2+1$ et $z = \sqrt{x^2+1}$. Cela donne pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times -\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right) = -\frac{x\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

6.3 Application à l'étude des variations d'une fonction

On admet momentanément les théorèmes suivants :

Théorème 17. Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est croissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.

⇨ **Commentaire**. *Dans le théorème 17, deux mots sont en caractère gras, les mots « dérivable » et « intervalle ». Ces deux mots sont essentiels. Considérons la fonction* $f\ :\ x \mapsto \frac{1}{x}$. *Cette fonction est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et sa dérivée, à savoir la fonction* $f'\ :\ x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, *est négative sur* $\mathbb{R}^*$. *Pourtant, cette fonction n'est pas décroissante sur* $\mathbb{R}^*$. *En effet,* $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$ *avec* $-1 < 1$. *Mais* $\mathbb{R}^*$ *n'est pas un intervalle ...*

Dans de nombreux cas, on a besoin de plus de précision. On doit savoir si la fonction proposée est strictement monotone. Les différents théorèmes ci-dessous répondent à la question.

Théorème 18. Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

On note que nous n'avons plus une équivalence comme dans le théorème 17. Par exemple, montrons que la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels distincts.

$$\frac{b^3-a^3}{b-a} = a^2+ab+b^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geqslant 0$$

avec égalité si et seulement si $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{3b^2}{4} = 0$ ce qui équivaut à $a = b = 0$. Donc, si $a \neq b$, $\frac{b^3-a^3}{b-a} > 0$. Ainsi, la fonction $f\ :\ x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pourtant sa dérivée, à savoir la fonction $f'\ :\ x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0 et n'est donc pas strictement positive sur $\mathbb{R}$. Le théorème suivant règle le problème.

Théorème 19. Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $f'(x) > 0$ pour tout réel x de I sauf peut-être en un nombre fini de réels de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
Si $f'(x) < 0$ pour tout réel x de I sauf peut-être en un nombre fini de réels de I où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Ainsi, la fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est strictement sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Donc, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème 20. Soit f une fonction définie et **continue** sur un **intervalle** de la forme $[a, b]$, a et b réels, ou $[a, +\infty[$, a réel, de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f est dérivable sur $]a, b]$ ou $]a, +\infty[$.

Si $f'(x) > 0$ pour tout réel x de $]a, b]$ ou $]a, +\infty[$ sauf peut-être en un nombre fini de réels de de $]a, b]$ ou $]a, +\infty[$ où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$.
Si $f'(x) < 0$ pour tout réel x de $]a, b]$ ou $]a, +\infty[$ sauf peut-être en un nombre fini de réels de de $]a, b]$ ou $]a, +\infty[$ où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$.

Ce théorème s'applique directement à la fonction $f\ :\ x \mapsto \sqrt{x}$. La fonction f est définie est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$. Donc, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

On donne enfin la caractérisation usuelle des fonctions constantes sur un intervalle, théorème très utilisé par exemple dans les calculs de primitives :

Théorème 21. Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est constante sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Encore une fois, les hypothèses sont essentielles. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ et n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$ puisque $f(-1) \neq f(1)$. Mais $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle ...

6.4 Application à la recherche d'extrema d'une fonction à valeurs réelles

Définition 12. Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit x_0 un réel de I.

f admet un maximum global en x_0 si et seulement si $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
f admet un minimum global en x_0 si et seulement si $\forall x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
f admet un extremum global en x_0 si et seulement si f admet un minimum global ou un maximum global en x_0.

f admet un maximum (global) strict en x_0 si et seulement si $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $f(x) < f(x_0)$.
f admet un minimum (global) strict en x_0 si et seulement si $\forall x \in I$, $f(x) > f(x_0)$.
f admet un extremum (global) strict en x_0 si et seulement si f admet un minimum global strict ou un maximum global strict en x_0.

f admet un maximum local en x_0 si et seulement si $\exists r > 0 / \ \forall x \in I \cap [x_0 - r, x_0 + r]$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
f admet un minimum local en x_0 si et seulement si $\exists r > 0 / \ \forall x \in I \cap [x_0 - r, x_0 + r]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
f admet un extremum local en x_0 si et seulement si f admet un minimum local ou un maximum local en x_0.

f admet un maximum local strict en x_0 si et seulement si $\exists r > 0 / \ \forall x \in (I \cap [x_0 - r, x_0 + r]) \setminus \{x_0\}$, $f(x) < f(x_0)$.
f admet un minimum local en x_0 si et seulement si $\exists r > 0 / \ \forall x \in (I \cap [x_0 - r, x_0 + r]) \setminus \{x_0\}$, $f(x) > f(x_0)$.
f admet un extremum local strict en x_0 si et seulement si f admet un minimum local strict ou un maximum local strict en x_0.

On va maintenant utiliser les dérivées pour déterminer d'éventuels extrema de fonctions à valeurs réelles dérivables. On doit commencer par noter chacune des deux implications « f admet un extremum local en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ » et « $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ admet un extremum local en x_0 » est fausse :
- la fonction $f : x \mapsto x^2$ admet sur $[0, 1]$ un maximum atteint en 1 et égal à $f(1) = 1$. Pourtant, $f'(1) = 1 \neq 0$.
- la fonction $f : x \mapsto x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ et pourtant, f n'admet pas d'extremum local en 0.

Les théorèmes précis sont les suivants (encore une fois, ces théorèmes seront réénoncés et démontrés dans le chapitre « dérivation ») :

Théorème 22. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f admet un extremum local en réel x_0 de I **qui n'est pas une borne de** I (ou encore si x_0 est intérieur à I ou aussi si I est un intervalle ouvert), alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème 23. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si la dérivée f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum local x_0.

6.5 Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Les fonctions $x \mapsto e^{ix}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1 + ix}$ sont des exemples de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Ci-dessous, on définit la dérivée d'une telle fonction quand cette fonction est dérivable. Pour cela, on définit d'abord les parties réelle et imaginaire d'une telle fonction.

Définition 13. Soit f une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La **partie réelle** (resp. **partie imaginaire**) de f, notée $\mathrm{Re}(f)$ (resp. $\mathrm{Im}(f)$), est la fonction définie sur D par :

$$\forall x \in D, \ (\mathrm{Re}(f))(x) = \mathrm{Re}(f(x)) \ (\text{resp. } (\mathrm{Im}(f))(x) = \mathrm{Im}(f(x))).$$

De même, la **conjuguée** (resp. le **module**) de f, noté $\overline{f}$ (resp. $|f|$), est la fonction définie sur D par :

$$\forall x \in D, \ \overline{f}(x) = \overline{f(x)} \ (\text{resp. } |f|(x) = |f(x)|).$$

Définition 14. Soit f une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La fonction f est dérivable sur D si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur D et dans ce cas,

$$\forall x \in D,\ f'(x) = (\mathrm{Re}(f))'(x) + i(\mathrm{Im}(f))'(x).$$

⇨ **Commentaire**. *Le théorème ci-dessus dit implicitement que* $(\mathrm{Re}(f))' = \mathrm{Re}(f')$ *et* $(\mathrm{Im}(f))' = \mathrm{Im}(f')$

Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{ix} = \cos x + i \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\left(e^{ix}\right)' = -\sin x + i\cos x = i(\cos x + i \sin x) = ie^{ix}.$$

On montrera que les formules de dérivation usuelles restent valables dans cette situation plus générale :

- $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(f^n)' = nf'f^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\})$
- $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$ et plus généralement $\left(\dfrac{1}{f^n}\right)' = -\dfrac{nf'}{f^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ ...

Par exemple, la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+ix}$ ne se calcule pas en déterminant d'abord les parties réelle et imaginaire de cette fonction mais se calcule directement :

$$\left(\frac{1}{1+ix}\right)' = -\frac{i}{(1+ix)^2}.$$

Théorème 24. Soit φ une fonction définie et dérivable sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

La fonction e^{φ} est dérivable sur D et $(e^{\varphi})' = \varphi' e^{\varphi}$.

Démonstration. $e^{\varphi} = e^{\mathrm{Re}(\varphi)}e^{i\mathrm{Im}(\varphi)} = e^{\mathrm{Re}(\varphi)}(\cos(\mathrm{Im}(\varphi)) + i\sin(\mathrm{Im}(\varphi)))$. Puisque φ est dérivable sur I, il en est de même des fonctions $\mathrm{Re}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ puis

$$\begin{aligned}
(e^{\varphi})' &= \left(e^{\mathrm{Re}(\varphi)}\right)'(\cos(\mathrm{Im}(\varphi)) + i\sin(\mathrm{Im}(\varphi))) + e^{\mathrm{Re}(\varphi)}(\cos(\mathrm{Im}(\varphi)) + i\sin(\mathrm{Im}(\varphi)))' \\
&= (\mathrm{Re}(\varphi))'\left(e^{\mathrm{Re}(\varphi)}\right)(\cos(\mathrm{Im}(\varphi)) + i\sin(\mathrm{Im}(\varphi))) + e^{\mathrm{Re}(\varphi)}\left(-(\mathrm{Im}(\varphi))'\sin(\mathrm{Im}(\varphi)) + i(\mathrm{Im}(\varphi))'\cos(\mathrm{Im}(\varphi))\right) \\
&= \mathrm{Re}(\varphi')e^{\mathrm{Re}(\varphi)}(\cos(\mathrm{Im}(\varphi)) + i\sin(\mathrm{Im}(\varphi))) + ie^{\mathrm{Re}(\varphi)}\mathrm{Im}(\varphi')(\cos(\mathrm{Im}(\varphi)) + i\sin(\mathrm{Im}(\varphi))) \\
&= \left(\mathrm{Re}(\varphi') + i\mathrm{Im}(\varphi')\right)e^{\mathrm{Re}(\varphi)}e^{i\mathrm{Im}(\varphi)} \\
&= \varphi' e^{\varphi}.
\end{aligned}$$

❏

Ainsi, la fonction $x \mapsto e^{(1+i)x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée la fonction $x \mapsto (1+i)e^{(1+i)x}$. De même, la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est la fonction $x \mapsto 2ixe^{ix^2}$.

6.6 Compléments sur la réciproque d'une bijection

6.6.1 Rappels.

On rappelle que si f est une application d'un ensemble E vers un ensemble F,

$$\boxed{f \text{ est bijective} \Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists! x \in E/\ y = f(x).}$$

Dans ce cas, on peut définir la réciproque f^{-1} de f. Elle est entièrement caractérisée par

$$\boxed{\forall (x, y) \in E \times F,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).}$$

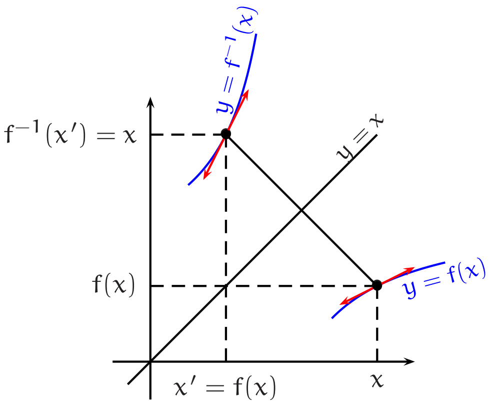
La réciproque de f est également entièrement caractérisée par les égalités

$$\boxed{f^{-1} \circ f = Id_E \text{ et } f \circ f^{-1} = Id_F,}$$

ce qui s'écrit encore

$$\boxed{\forall x \in E,\ (f^{-1}(f(x)) = x \text{ et } \forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y.}$$

6.6.2 Cas particulier des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$



Ci-contre, nous avons tracé le graphe d'une fonction f, réalisant une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J, et le graphe de sa réciproque.

Le graphe de f^{-1} est l'ensemble des points de coordonnées $(x', f^{-1}(x'))$ où x' décrit l'intervalle J (l'intervalle J est donc pensé sur l'axe des abscisses). On pose $x = f^{-1}(x')$ ou, ce qui revient au même, $x' = f(x)$, x étant lui un réel de l'intervalle I. On passe du point $(x, f(x)) = (f^{-1}(x'), x')$ au point $(x', f^{-1}(x'))$ en échangeant les deux coordonnées. Géométriquement, les deux points $(x, f(x))$ et $(x', f^{-1}(x'))$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$. Ainsi,

> le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f
> par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La majeure partie des résultats suivants sont momentanément admis et seront démontrés ultérieurement dans le cours d'analyse.

Théorème 25. Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f est continue et strictement monotone sur I, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ qui est un intervalle de même nature que I (ouvert, semi-ouvert, fermé).

Dans ce cas, f^{-1} est continue et strictement monotone sur J et a même sens de variation sur J que f sur I.

Démonstration . On démontre uniquement le fait que f^{-1} a « même sens de variation » que f. On suppose par exemple f strictement croissante sur D.

Soit $(a, b) \in J^2$ tel que $a < b$. Posons $c = f^{-1}(a)$ et $d = f^{-1}(b)$ de sorte que c et d sont dans I et $a = f(c)$ et $b = f(d)$. On a alors $f(c) < f(d)$. Puisque f est strictement croissante sur I, le théorème 11, page 15, permet d'affirmer que $c < d$ ou encore $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$.

Ceci montre que f^{-1} est strictement croissante sur D.

❏

Théorème 26. Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur I. Si la dérivée de f est strictement positive sur I (ou strictement négative sur I), alors f réalise une bijection de I sur $f(I) = J$ qui est un intervalle de même nature que I (ouvert, semi-ouvert, fermé). Sa réciproque f^{-1} est alors dérivable sur J et,

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

ou, ce qui revient au même,

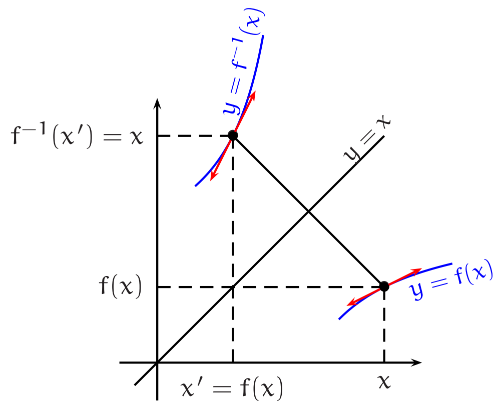
$$\forall x \in J,\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $I =]0, +\infty[$, à dérivée strictement positive sur I. Donc, f réalise une bijection de I sur $J = f(I) =]0, +\infty[$. Sa réciproque $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $J =]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

❏

Interprétons géométriquement l'égalité $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$: par symétrie, le coefficient directeur de la tangente au graphe de f^{-1} au point $(x', f^{-1}(x'))$ est l'inverse du coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$.



Ceci peut se comprendre à partir des coefficients directeurs de deux droites symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Soient $M(a, b)$ et $N(c, d)$ deux points distincts. Leurs symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ sont les points $M'(b, a)$ et $N'(d, c)$. Le coefficient directeur de la droite $(M'N')$ est

$$\frac{y_{N'} - y_{M'}}{x_{N'} - x_{M'}} = \frac{c-a}{d-b} = \left(\frac{d-b}{c-a}\right)^{-1} = \left(\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}\right)^{-1}.$$

Ainsi, le coefficient directeur de la droite $(M'N')$ est l'inverse du coefficient directeur de la droite (MN). Il ne reste plus qu'à passer à la limite quand le point N tend vers le point M, M et N étant deux points de $\mathcal{C}_f$ et M' et N' étant les points correspondants de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$...

6.7 Dérivées d'ordre supérieur

Soit $f : D \mapsto \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dérivable sur D. La fonction f' peut être ou ne pas être dérivable sur D. Si f' est une fonction dérivable sur D, on peut définir sa **dérivée seconde** par $f'' = (f')'$. Plus généralement, en cas d'existence, pour $n \geqslant 2$, on définit la **dérivée n-ème** de f par :

$$f^{(n)} = (\ldots((f')')')'$$

où on a dérivé n fois. Le nombre de fois que l'on a dérivé est placé en exposant entre parenthèses pour éviter la confusion avec $f^n = f \times f \times \ldots \times f$ (ou aussi, $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$).

On pose encore $f^{(1)} = f'$ et $f^{(0)} = f$. Dans la pratique, on écrit l'exposant de dérivation à la place des $'''$ à partir de $n = 3$: on écrit $f^{(3)}$ au lieu de f''' ou $f^{(5)}$ au lieu de f'''''.

L'ensemble des fonctions n fois dérivables sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$ se note $\mathcal{D}_n(D, \mathbb{K})$.

Quelques exemples :

- si pour tout réel x, $f(x) = e^x$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = e^x$.
- plus généralement, si a est un nombre complexe et pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}.$$

- pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.
- si a est un nombre complexe et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}.$$