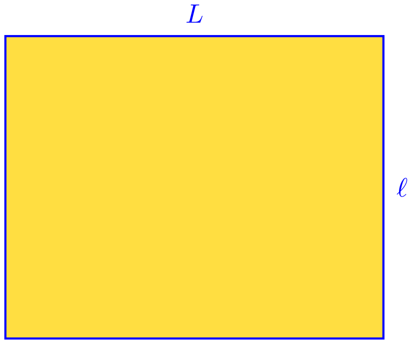
Chapitre 8. Intégration
(rappels et compléments)

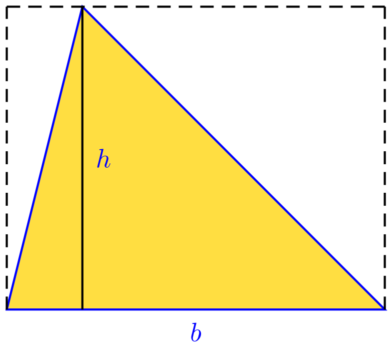
I. Découverte de la notion d'intégrale

On sait calculer l'aire d'un rectangle :



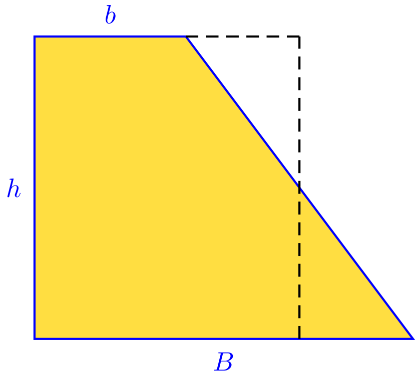
aire= $L \times \ell$

l'aire d'un triangle



aire= $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{b \times h}{2}$

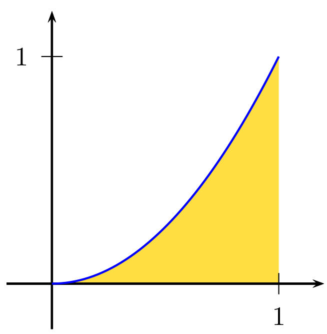
l'aire d'un trapèze rectangle



aire= $\dfrac{(\text{petite base} + \text{grande base})}{2} \times \text{hauteur}$

$= \dfrac{(b+B)}{2} \times h$

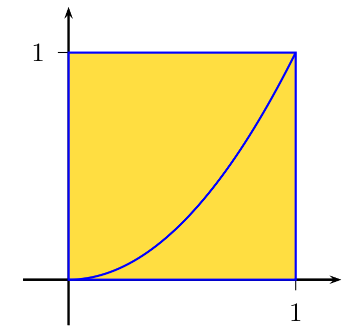
Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on se propose de calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ et la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$. Ainsi, on cherche à déterminer l'aire d'un domaine où au moins un des bords « est courbe ».



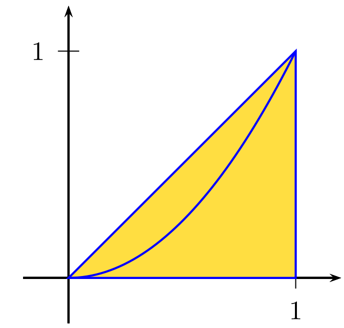
aire= ?

L'unité dans laquelle sera mesurée cette aire est l'**unité d'aire**, c'est-à-dire l'aire du carré de sommets de coordonnées $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$. L'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$ est certainement inférieure à une unité d'aire

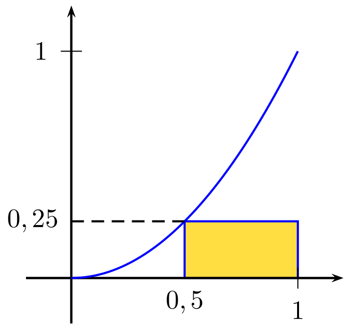
© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.



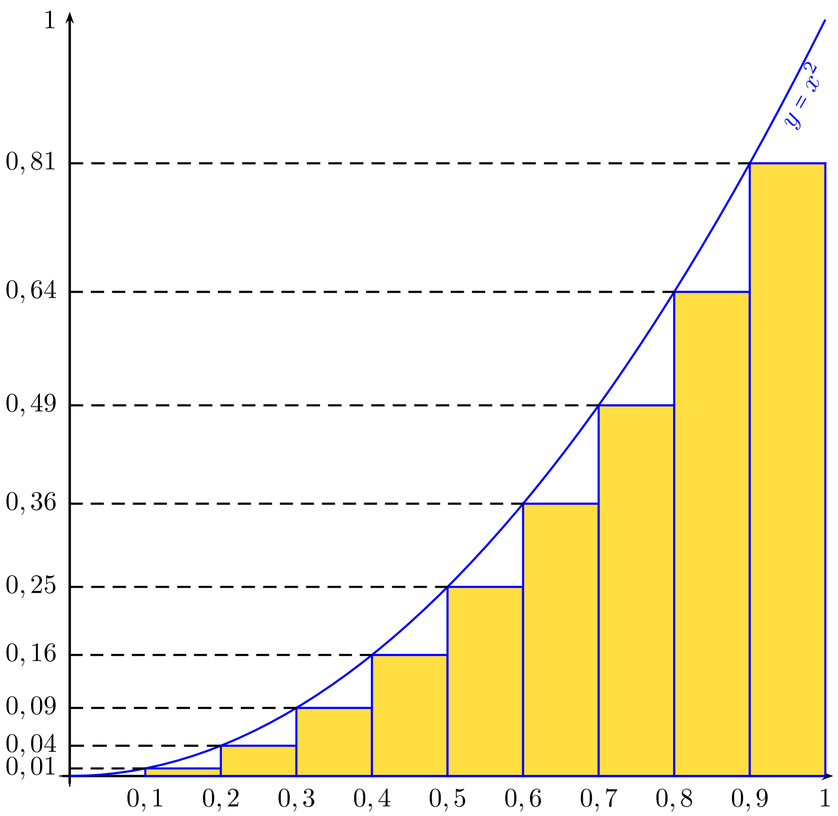
ou même à une demie unité d'aire



et est par exemple supérieure à $0,5 \times 0,25 = 0,125$.

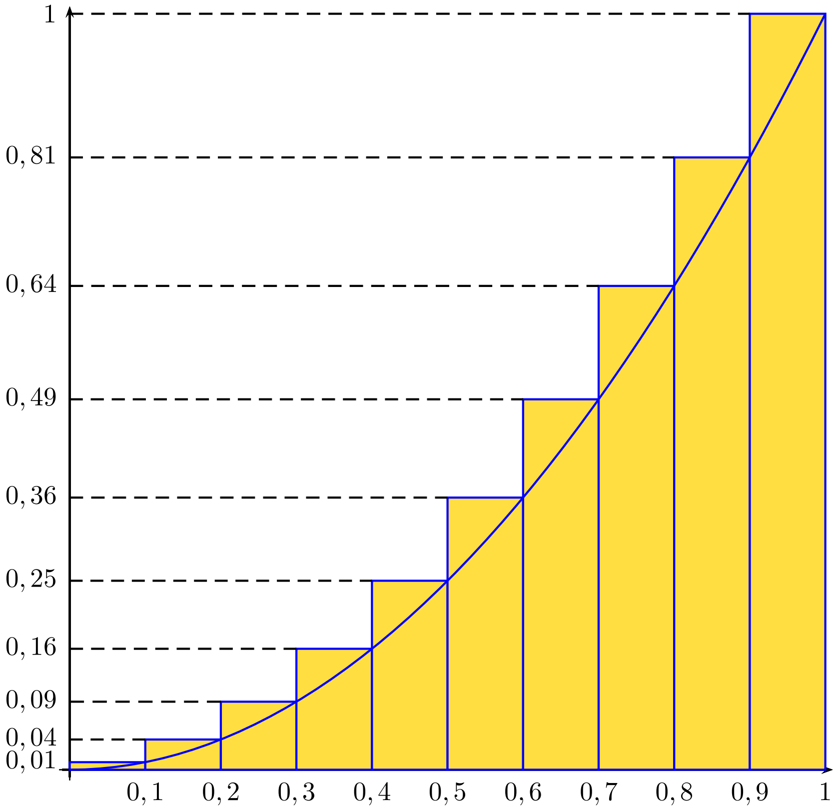


Ainsi, $0,125 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 0,5$. On veut faire bien mieux que cela. On veut la valeur exacte de $\mathscr{A}$. On peut améliorer les idées précédentes dont le but est d'encadrer $\mathscr{A}$. On note $\mathscr{A}_1$ la somme des aires des rectangles ci-dessous.



On a

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &\geqslant \mathscr{A}_1\\
&= 0,1\times 0 + 0,1\times 0,01 + 0,1\times 0,04 + 0,1\times 0,09 + 0,1\times 0,16 + 0,1\times 0,25 + 0,1\times 0,36 + 0,1\times 0,49\\
&+ 0,1\times 0,64 + 0,1\times 0,81\\
&= 0,1(0 + 0,01 + 0,04 + 0,09 + 0,16 + 0,25 + 0,36 + 0,49 + 0,64 + 0,81)\\
&= 0,1\times 2,49 = 0,249.
\end{aligned}$$

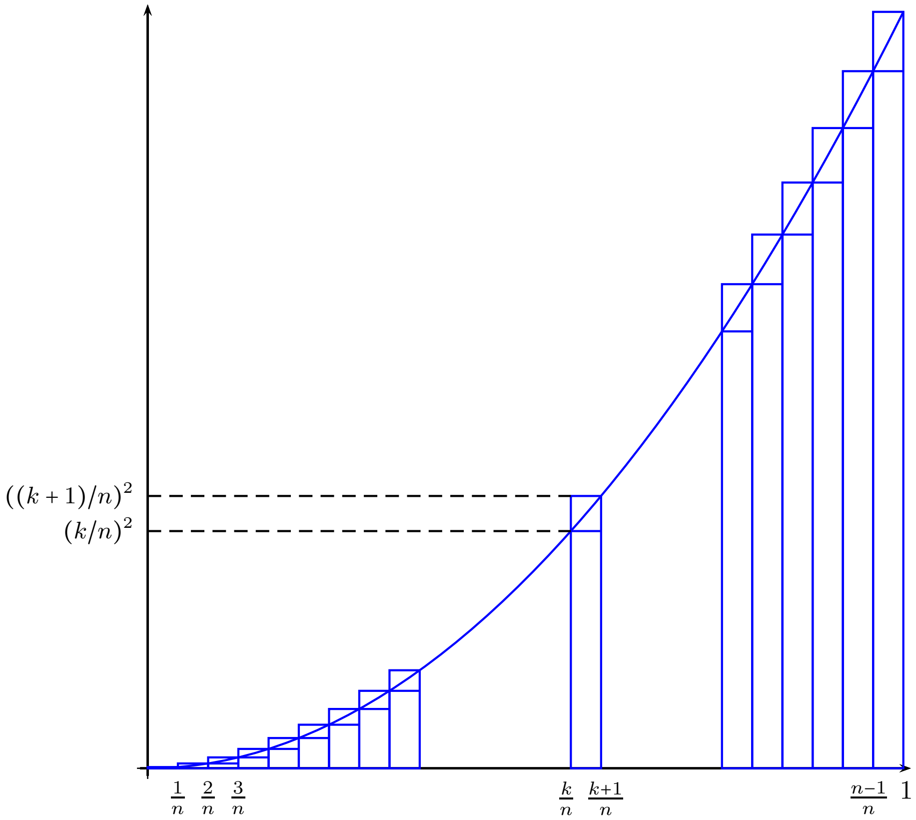


En notant $\mathscr{A}_2$ la somme des aires des rectangles ci-dessus, on a aussi

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &\leqslant \mathscr{A}_2\\
&= 0,1\times 0,01 + 0,1\times 0,04 + 0,1\times 0,09 + 0,1\times 0,16 + 0,1\times 0,25 + 0,1\times 0,36 + 0,1\times 0,49 + 0,1\times 0,64\\
&+ 0,1\times 0,81 + 0.1\times 1\\
&= \mathscr{A}_1 - 0,1\times 0 + 0.1\times 1 = \mathscr{A}_1 + 0,1\\
&= 0,349.
\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu $0,249 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 0,349$. Il faut encore améliorer en donnant aux rectangles ci-dessus des largeurs aussi petites que l'on veut. On découpe l'intervalle $[0,1]$ non plus en 10 parties égales mais en n parties égales où n est un entier naturel non nul que l'on fera ensuite tendre vers $+\infty$.

L'intervalle $[0,1]$ est découpé en les n intervalles $\left[0,\frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]$, $\left[\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right]$, $\left[\frac{3}{n},\frac{4}{n}\right]$, $\ldots$, $\left[\frac{n-3}{n},\frac{n-2}{n}\right]$, $\left[\frac{n-2}{n},\frac{n-1}{n}\right]$, $\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}\right] = \left[1-\frac{1}{n},1\right]$. De manière générale, l'intervalle $[0,1]$ a été décomposé en la réunion des n intervalles de la forme $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ où k est un entier naturel tel que $0\leqslant k\leqslant n-1$.



Chaque intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ a une longueur égale à la **différence** $\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$. Quand nous ferons tendre n vers $+\infty$, la longueur de l'« intervalle » obtenu sera notée dx (différence infinitésimale de valeurs de la variable x).

Sur l'intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, l'aire sous la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ est comprise entre l'aire du petit rectangle $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2$ et l'aire du grand rectangle $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \left(\frac{k+1}{n}\right)^2$. Ainsi,

- sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, l'aire sous le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ est comprise entre $\frac{1}{n} \times f(0)$ et $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right)$,
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, l'aire sous le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ est comprise entre $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{2}{n}\right)$,
- sur l'intervalle $\left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right]$, l'aire sous le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ est comprise entre $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{2}{n}\right)$ et $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{3}{n}\right)$,

$\vdots$

- sur l'intervalle $\left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right]$, l'aire sous le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ est comprise entre $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ et $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{n}{n}\right)$.

En additionnant toutes ces inégalités, on obtient

$$\mathscr{A} \geqslant \frac{1}{n}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-3}{n}\right) + f\left(\frac{n-2}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

et

$$\mathscr{A} \leqslant \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-2}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1)\right).$$

Les deux sommes ont beaucoup de termes en commun et donc la différence entre le majorant fourni et le minorant fourni est très simple. Elle est égale à

$$\frac{1}{n}(f(1) - f(0)) = \frac{1}{n}(1-0) = \frac{1}{n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on est en droit d'espérer que le minorant fourni et le majorant fourni aient une limite commune (ce que l'on va effectivement démontrer plus loin). Cette limite commune sera par définition l'aire $\mathscr{A}$. Cette aire sera ainsi obtenue comme une **somme** infinie d'aires de rectangles de largeurs infinitésimales **dx** (différence de valeurs de x) et de longueurs **f(x)** où x est un réel variant **de 0 à 1**. On a la notera

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x) \times dx = \int_0^1 x^2 \times dx = \int_0^1 x^2\, dx,$$

(le symbole $\int$ est donc la lettre s en majuscule, s étant l'initiale du mot somme).

Il nous reste à étudier la limite de chacun des deux membres de l'encadrement de $\mathscr{A}$ fourni plus haut.
Pour tout entier naturel non nul, on pose $u_n = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2}_{n \text{ termes}}$.

Ainsi, $u_1 = 1^2 = 1$, $u_2 = 1^2 + 2^2 = 5$, $u_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, $u_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 \ldots$

L'encadrement de $\mathscr{A}$ obtenu plus haut s'écrit maintenant pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{1}{n} \times \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 \ldots + (n-1)^2}{n^2} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{1}{n} \times \frac{1^2 + 2^2 \ldots + (n-1)^2 + n^2}{n^2}.$$

ou encore

$$\frac{u_n}{n^3} - \frac{1}{n} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{1}{n} \times \frac{u_n}{n^3}, \qquad (I)$$

(nous avons constaté plus haut que le premier membre de l'encadrement était $\frac{1}{n}$ au-dessous du second membre).

Nous allons maintenant donner u_n en fonction de n. Nous nous contenterons de démontrer une formule par récurrence sans expliquer comment nous avons deviné cette formule ou plutôt sans expliquer le calcul direct qui nous a permis de la découvrir.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

• $u_1 = 1^2 = 1$ et $\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{2 \times 3}{6} = 1$. Donc $u_1 = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6}$ et la formule à démontrer est vraie quand $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que $u_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = u_n + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) = (n+1) \times \frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} = (n+1) \times \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \\
&= (n+1) \times \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} = (n+1) \times \frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On peut maintenant déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$.
Pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned}
\frac{u_n}{n^3} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{2n^2}{6n^2} + \frac{3n}{6n^2} + \frac{1}{6n^2} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.
\end{aligned}$$

L'encadrement (I) s'écrit alors pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{n} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

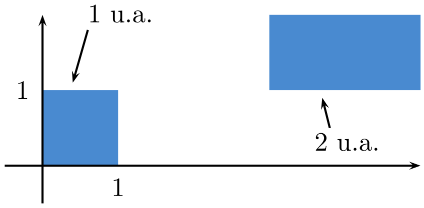
Quand n tend vers $+\infty$, le membre de gauche et le membre de droite de l'encadrement ci-dessus tendent tous deux vers $\frac{1}{3}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\frac{1}{3} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{1}{3}$ et on a donc montré que

$$\mathscr{A} = \int_0^1 x^2 \times dx = \frac{1}{3}.$$

II. Définition et propriétés de l'intégrale d'une fonction continue et positive

1) Intégrale d'une fonction continue et positive

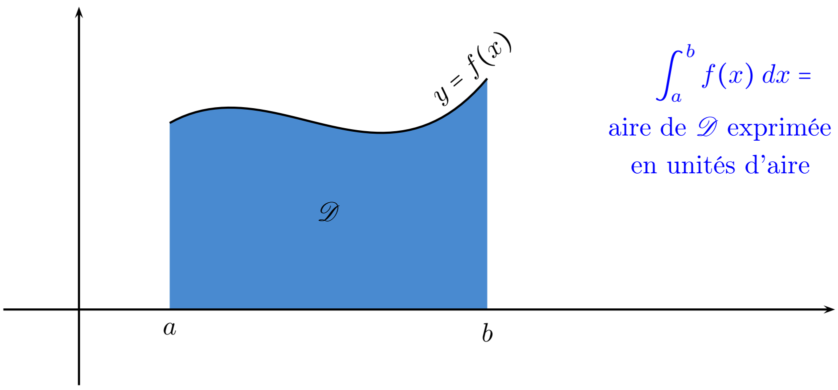
Définition 1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
L'**unité** d'aire est l'aire du carré de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$. Elle se note en abrégé **u.a.**.



Par exemple, si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont une longueur égale à 2 cm, la formule de conversion u.a. $\leftrightarrow$ cm^2 est

$$1 \text{ u.a.} = 4 \text{ cm}^2.$$

Définition 2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ où a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$.
L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aires, du domaine $\mathscr{D}$ du plan délimité par les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.



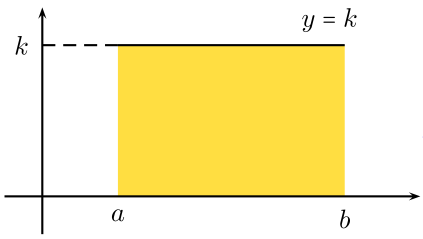
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$
aire de $\mathscr{D}$ exprimée
en unités d'aire

Elle se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ce qui se lit « somme de a à b de $f(x)\,dx$ » ou « intégrale de la fonction f sur $[a,b]$ » ou « intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ ».

Commentaire 1. Le mot « intégrale » est là pour dire que l'on a additionné la totalité des valeurs de f et que l'on a obtenu un nombre représentant la fonction f sur $[a,b]$ dans son intégralité.

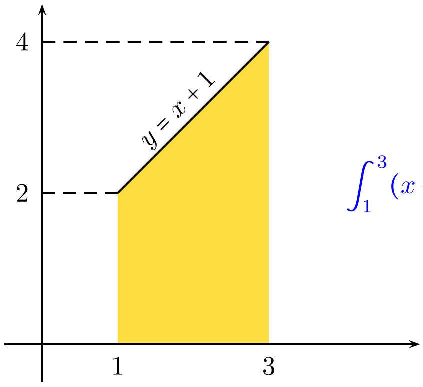
Commentaire 2. $f(x)\,dx$ est une multiplication et peut être lu plus exhaustivement $f(x)$ fois dx.

Exemple 1. L'intégrale de la fonction constante $x \mapsto k$, où k est un réel positif, sur $[a,b]$ est l'aire d'un rectangle exprimée en unités d'aire :



$$\int_a^b k\,dx = k \times (b-a).$$

Exemple 2. L'intégrale de la fonction affine $x \mapsto x+1$ sur $[1,3]$ est l'aire d'un trapèze rectangle exprimée en unités d'aire :



$$\int_1^3 (x+1)\,dx = \frac{(2+4)\times(3-1)}{2} = 6.$$

Commentaire. Dans ces deux premiers exemples, le graphe de f est un segment de droite. Nous n'avons pas encore appris comment calculer une intégrale dans le cas où le graphe de f n'est pas une ligne droite.

Exemple 3. L'aire d'un segment est nulle. Donc, $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

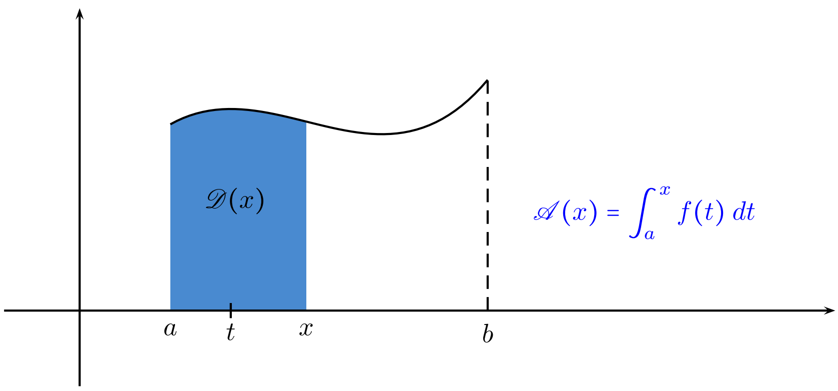
2) Primitives d'une fonction continue et positive

a) Définition de la « fonction aire »

On se donne une fonction f continue et positive sur un segment $[a,b]$. On définit la « fonction aire » associée à f : à chaque réel x de $[a,b]$, on associe l'aire de l'ensemble des points du plan dont l'abscisse est comprise entre a et x et situés entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f. On note $\mathscr{D}(x)$ cet ensemble de points.

On définit ainsi une fonction, la « fonction aire » que l'on note $\mathscr{A}$, qui à chaque réel x de $[a,b]$ associe l'aire $\mathscr{A}(x)$ du domaine $\mathscr{D}(x)$. Quand x est un réel donné, pour obtenir cette aire, on se donne un nombre variable de a à x (ce nombre variable ne peut donc pas s'appeler x) que l'on note t par exemple. On additionne alors les aires des rectangles de largeur infinitésimale dt et de longueur $f(t)$, t variant de a à x. On obtient

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [a,b],\ \mathscr{A}(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$



b) Dérivée de la « fonction aire »

Théorème 1. Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

La fonction $\mathscr{A}\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée est la fonction f.

Démonstration. Il est difficile de montrer ce résultat en terminale dans le cas général. Le programme officiel de Terminale S prévoit de démontrer ce résultat en supposant de plus la fonction f croissante sur $[a,b]$.

Soit donc f une fonction continue, positive et croissante sur $[a,b]$. Pour $x \in [a,b]$, on note $\mathscr{D}(x)$ l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f et dont l'abscisse est comprise entre a et x puis on note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du domaine $\mathscr{D}(x)$ exprimée en unités d'aire.

Soit h un réel non nul tel que $x_0 + h$ soit dans $[a,b]$. Pour déterminer la dérivée de $\mathscr{A}$ en x_0, on étudie la limite du taux

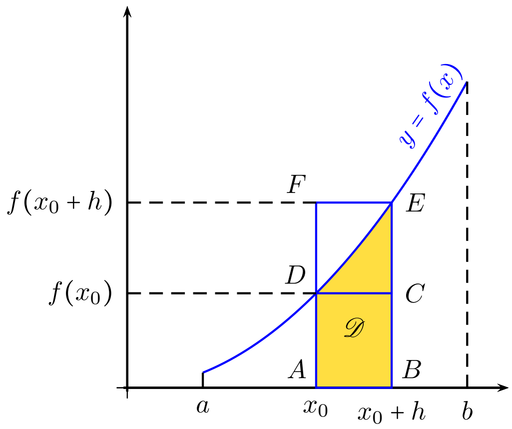
$$T(h) = \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h},$$

quand h tend vers 0.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

1 er cas : si $h > 0$**.** (ce cas n'est même pas à considérer si $x_0 = b$).

$\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}(x_0+h)$ à laquelle on retranche l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}(x_0)$. Il reste l'aire,exprimée en unités d'aire, du domaine constitué des points du plan situés entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f et dont l'abscisse est comprise entre x_0 et $x_0 + h$. On note $\mathscr{D}$ ce domaine.



Puisque f est croisante sur $[a, b]$, l'aire de $\mathscr{D}$ est comprise entre l'aire du rectangle $ABCD$ et l'aire du rectangle$ABEF$ ou encore

$$h \times f(x_0) \leqslant \mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0) \leqslant hf(x_0+h).$$

En divisant les trois membres de cet encadrement par le réel strictement positif h, on obtient

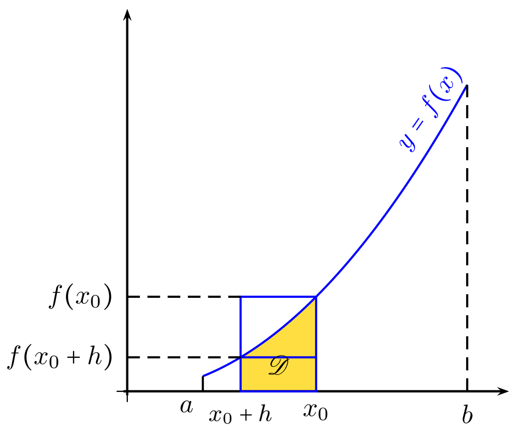
$$f(x_0) \leqslant T(h) \leqslant f(x_0+h).$$

Puisque f est continue en x_0, $f(x_0+h)$ tend vers $f(x_0)$ quand h tend vers 0 par valeurs supérieures. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que le taux $T(h)$ tend vers $f(x_0)$ quand h tend vers 0 par valeurs supérieures. On a montré que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} = f(x_0).$$

2 ème cas : si $h < 0$**.** (ce cas n'est même pas à considérer si $x_0 = a$).

Dans ce cas, $-h > 0$ et $x_0 + h < x_0$.



Dans ce cas, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est $\mathscr{A}(x_0) - \mathscr{A}(x_0+h)$. D'autre part, la largeur de commune des deux rectangles est le réel positif $(x_0 - (x_0+h)) = -h$. L'aire du petit rectangle est $-h \times f(x_0+h) = -hf(x_0+h)$ et l'aire du grand rectangle est $-hf(x_0)$. On a donc

$$-hf(x_0+h) \leqslant \mathscr{A}(x_0) - \mathscr{A}(x_0+h) \leqslant -hf(x_0).$$

On divise les trois membres de cet encadrement par le réel strictement positif $-h$ et on obtient

$$f(x_0+h) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0) - \mathscr{A}(x_0+h)}{-h} \leqslant f(x_0),$$

ou encore

$$f(x_0+h) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0),$$

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Comme dans le premier cas, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{\mathscr{A}(x_0+h)-\mathscr{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$.

On a finalement montré que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathscr{A}(x_0+h)-\mathscr{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$. Par suite, la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable en x_0 et $\mathscr{A}'(x_0) = f(x_0)$.

Ceci étant vrai pour chaque x_0 de $[a,b]$, on a montré que la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $[a,b]$ et que sa dérivée est la fonction f.

---

c) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

La fonction $\mathscr{A}$ est donc une fonction dérivable sur $[a,b]$ dont la dérivée est f. On donne un nom à telles fonctions :

Définition 3. Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
F est une **primitive** de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et la dérivée de F est f.

Exemple. Pour tout réel x, posons $f(x) = 3x^2+1$, $F_1(x) = x^3+x-5$ et $F(x) = x^3+x$. F_1 et F_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $F_1' = f$ et $F_2' = f$. Donc F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Le théorème 1 du paragraphe précédent permet d'énoncer

Théorème 2. Toute fonction continue et positive sur $[a,b]$ admet au moins une primitive sur $[a,b]$.

Démonstration. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de la fonction f sur $[a,b]$.

Une fonction qui admet au moins une primitive en admet en fait plus d'une. Le théorème suivant précise ce résultat.

Théorème 3. Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.
1) Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, les primitives de f sur $[a,b]$ sont les fonctions de la forme $F+k$ où k est un réel.
2) En particulier, f admet une une infinité de primitives sur $[a,b]$ et deux primitives de f sur $[a,b]$ différent d'une constante sur $[a,b]$.

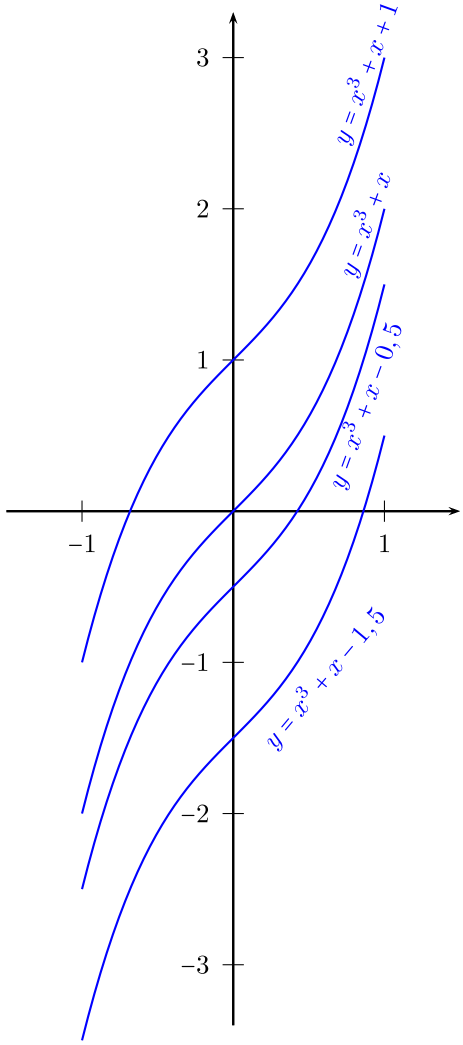
Démonstration. Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. On sait que la fonction f admet au moins une primitive sur $[a,b]$. Soit donc F une primitive de la fonction f sur $[a,b]$.

Soit G une fonction définie et dérivable sur $[a,b]$.

$$\begin{aligned}
G \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [a,b] &\Leftrightarrow G' = f \Leftrightarrow G' = F' \Leftrightarrow (G-F)' = 0\\
&\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que pour tout réel } x \text{ de } [a,b],\ G(x)-F(x) = k\\
&\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que pour tout réel } x \text{ de } [a,b],\ G(x) = F(x)+k\\
&\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } G = F+k.
\end{aligned}$$

Ainsi, les primitives de la fonction f sur $[a,b]$ sont les fonctions de la forme $F+k$ où F est l'une des primitives de f sur $[a,b]$ et k est un réel. En particulier, f admet une infinité de primitives et deux primitives de f sur $[a,b]$ différent d'une constante.

Exemple. Pour $x \in [-1,1]$, posons $f(x) = 3x^2+1$ et $F(x) = x^3+x$. F est **une** primitive de f sur $[-1,1]$. Les primitives de f sur $[a,b]$ sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto x^3+x+k$. Voici les graphes de quelques unes de ces primitives. Les graphes de ces primitives se déduisent les uns des autres par translation parallèlement à l'axe des ordonnées.



d) Calcul de l'intégrale d'une fonction continue et positive

Grâce aux résultats précédents, on peut enfin calculer l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

Théorème 4. Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

Remarque. La valeur de $F(b) - F(a)$ ne dépend donc pas du choix d'une primitive de f. Si on change de primitive, le résultat ne change pas.

Démonstration. On sait déjà que la fonction $\mathscr{A}$ est une primitive de f sur $[a, b]$. De plus, $\mathscr{A}(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\mathscr{A}(b) = \int_a^b f(x)\,dx$. Donc,

$$\mathscr{A}(b) - \mathscr{A}(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Soit F une primitive quelconque de f sur $[a, b]$. Il existe un réel k tel que $F = \mathscr{A} + k$.

$$F(b) - F(a) = (\mathscr{A}(b) + k) - (\mathscr{A}(a) + k) = \mathscr{A}(b) - \mathscr{A}(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemple. Pour tout réel x de $[0, 1]$, posons $f(x) = x^2$. Une primitive de la fonction f sur $[0, 1]$ est la fonction $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$. Donc

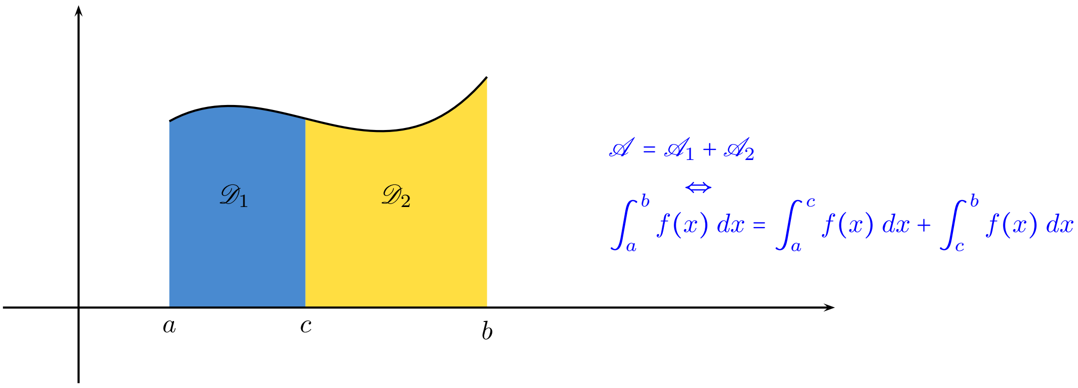
$$\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

e) Relation de Chasles

Théorème 5. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
Pour tout réel c de $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Démonstration. On note $\mathscr{D}_1$ (respectivement $\mathscr{D}_2$) l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses et le graphe de f dont l'abscisse est comprise entre a et c (respectivement c et b) puis on note $\mathscr{A}_1$ (respectivement $\mathscr{A}_2$) l'aire de $\mathscr{D}_1$ (respectivement $\mathscr{D}_2$). La relation de Chasles est alors lisible sur le graphique ci-dessous.



Commentaire. L'aire du segment joignant le point de coordonnées $(c,0)$ au point de coordonnées $(c,f(c))$ a été « comptée deux fois ». Ce n'est pas un problème car l'aire de ce segment est nulle.

III. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

1) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

a) Rappels et compléments

On rappelle que :

Définition 4. Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
F est une **primitive** de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et la dérivée de F est f.

On admet que

Théorème 6. Toute fonction continue un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

Avec la même démonstration que pour le théorème 3, on obtient

Théorème 7. Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
1) Si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F+k$ où k est un réel.
2) En particulier, f admet une une infinité de primitives sur I et deux primitives de f sur I différent d'une constante sur I.

On complète les théorèmes 6 et 7 avec le résultat suivant :

Théorème 8. Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Pour tout réel x_0 de I et tout réel y_0 de I, il existe une et une seule primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Démonstration. Soient x_0 un réel de I et y_0 un réel. Soit F une primitive de f sur I. On sait que les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F+k$ où k est un réel.

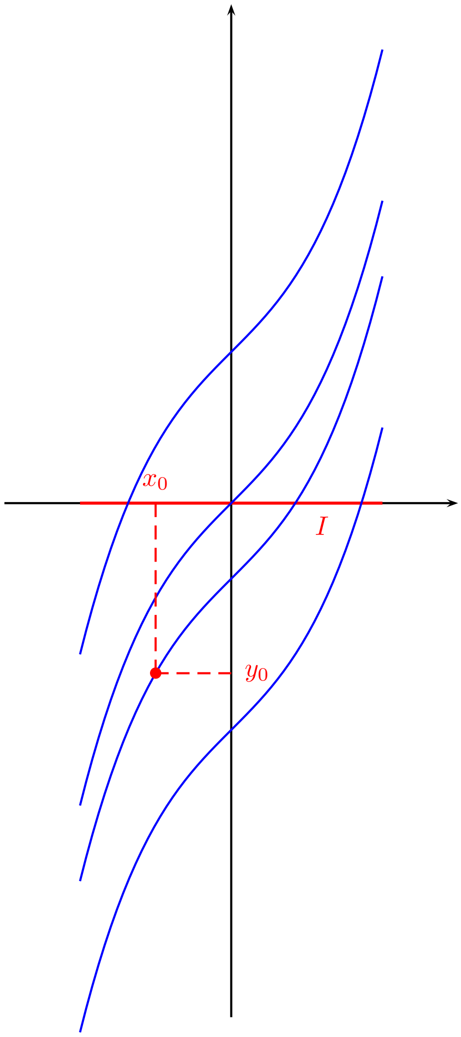
Soit donc k un réel. Pour tout x de I, posons $G(x) = F(x) + k$.

$$G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0).$$

Il existe une et une seule valeur de k telle que la primitive correspondante prenne la valeur y_0 en x_0 ou encore il existe une et une seule primitive de f sur I prenant la valeur y_0 en x_0 à savoir la fonction

$$F_0 \ :\ x \mapsto F(x) - F(x_0) + y_0.$$

On peut interpréter graphiquement le résultat précédent. Les graphes des primitives de f sur I se déduisent les uns des autres par translation parallèlement à l'axe des ordonnées. Quand on se donne un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 est un réel de I et y_0 un réel, un et un seul de ces graphes passe par le point de coordonnées (x_0, y_0) :



b) Formulaire de primitives usuelles

On connaît déjà un formulaire de dérivées usuelles. On obtient un formulaire de primitives par lecture inverse :

Fonction	Une primitive	Intervalle
0	1	$\mathbb{R}$
1	x	$\mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
x^n, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$

Commentaire. Ce formulaire n'est pas le formulaire définitif de terminale. Il sera complété au fur et à mesure de l'avancement des chapitres. Il manque des formules concernant la fonction exponentielle, la fonction logarithme népérien, les fonctions sinus et cosinus.

Avec ces fonctions usuelles, nous pouvons créer de nouvelles fonctions en les additionnant ou en les multipliant par

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

un réel. Dans le tableau ci-dessous, u et v sont deux fonctions continues sur un intervalle I et U et V sont respectivement une primitive de u et une primitive de v sur I.

Fonction	**Une primitive**	**Intervalle**
$u+v$	$U+V$	I
ku	kU	I

Exercice 1.
1) Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f_1(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 5.$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f_1 sur $\mathbb{R}$.

2) Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f_2(x) = (x-1)(2x^2+3).$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f_2 sur $\mathbb{R}$.

3) Soit f_3 la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\text{pour tout réel strictement positif } x,\ f_3(x) = -\frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}.$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f_3 sur $]0,+\infty[$.

Solution. **1)** Une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F_1\ :\ x \mapsto 4\times\frac{x^4}{4} - 2\times\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 5x$ ou encore $F_1\ :\ x \mapsto x^4 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 5x$. Les primitives de f_1 sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^4 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 5x + k$ où k est un réel.

2) Pour tout réel x, $f_2(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3$. Une primitive de le fonction f_2 sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $F_2\ :\ x \mapsto \frac{2x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 3x$ ou encore $F_2\ :\ x \mapsto \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 3x$. Les primitives de f_2 sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 3x + k$ où k est un réel.

3) Pour tout réel strictement positif x, $f_3(x) = -\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\times\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$. Une primitive de le fonction f_3 sur $]0,+\infty[$ est donc la fonction $F_3\ :\ x \mapsto -\frac{3}{4}\times 2\sqrt{x} + 3\times\left(-\frac{1}{x}\right) - \left(-\frac{1}{2x^2}\right)$ ou encore $F_3\ :\ x \mapsto -\frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2}$.
Les primitives de f_3 sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + k$ où k est un réel.

Enfin, la formule donnant la dérivée d'une fonction composée fournit un certain nombre de formules de dérivation. Par lecture inverse, on obtient un formulaire de primitives. Dans le tableau ci-dessous, la fonction u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	**Une primitive**	**Conditions sur u et I**
$u'u^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u^n}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	u ne s'annule pas sur I
$u'u^n$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u est strictement positive sur I

Exercice 2.
1) Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f_1(x) = (2x-1)(x^2-x+3)^3.$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f_1 sur $\mathbb{R}$.
2) Soit f_2 la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\text{pour tout réel } x>1,\ f_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f_2 sur $]1,+\infty[$.
3) Soit f_3 la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par :

$$\text{pour tout réel strictement positif } x,\ f_3(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2}.$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f_3 sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.
4) Soit f_4 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f_4 sur $\mathbb{R}$.

Solution. **1)** Posons pour tout réel x, $u_1(x) = x^2 - x + 3$. La fonction u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$u_1'(x) = 2x - 1.$$

Donc, pour tout réel x, $f_1(x) = u_1'(x)(u_1(x))^3$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_1 est la fonction F_1 définie pour tout réel x par

$$F_1(x) = \frac{(u_1(x))^4}{4} = \frac{1}{4}(x^2-x+3)^4.$$

Les primitives de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{4}(x^2-x+3)^4 + k$ où k est un réel.

2) Posons pour tout réel $x > 1$, $u_2(x) = x - 1$. La fonction u_2 est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout réel $x > 1$, $u_2'(x) = 1$.
Donc, pour tout réel x, $f_2(x) = \frac{u_2'(x)}{(u_2(x))^2}$. Une primitive sur $]1,+\infty[$ de la fonction f_2 est la fonction F_2 définie pour tout réel $x > 1$ par

$$F_2(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x-1}.$$

Les primitives de la fonction f_2 sur $]1,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{x-1} + k$ où k est un réel.

3) Pour tout réel $x > \frac{1}{2}$, $f_3(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2} = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{(2x-1)^2}$.
Posons pour tout réel $x > \frac{1}{2}$, $u_3(x) = 2x-1$. La fonction u_3 est dérivable sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et pour tout réel $x > \frac{1}{2}$, $u_3'(x) = 2$.
Donc, pour tout réel $x > \frac{1}{2}$, $\frac{2}{(2x-1)^2} = \frac{u_3'(x)}{(u_3(x))^2}$. Une primitive sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ de la fonction $x \mapsto \frac{2}{(2x-1)^2}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{u_3(x)} = -\frac{1}{2x-1}$ puis une primitive de la fonction f_3 sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ est la fonction F_3 définie pour tout réel $x > \frac{1}{2}$ par

$$F_3(x) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{1}{2(2x-1)}.$$

Les primitives de la fonction f_3 sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2(2x-1)} + k$ où k est un réel.

4) Pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$. Donc la fonction f_4 est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f_4 admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.
Posons pour tout réel x, $u_4(x) = x^2 + 1$. La fonction u_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_4'(x) = 2x$.
Donc, pour tout réel x, $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{u_4'(x)}{\sqrt{u_4(x)}}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ est la fonction

$x \mapsto 2\sqrt{u_4(x)} = 2\sqrt{x^2+1}$ puis une primitive de la fonction f_4 sur $\mathbb{R}$ est la fonction F_4 définie pour tout réel x par

$$F_4(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}.$$

Les primitives de la fonction f_4 sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \sqrt{x^2+1} + k$ où k est un réel.

---

2) Intégrale d'une fonction continue

a) Définition de l'intégrale d'une fonction continue

On a vu dans le paragraphe I que si f est une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de la fonction f sur I, le résultat ne dépendant pas du choix d'une primitive. On décide de conserver ce résultat comme définition générale d'une intégrale :

Définition 5. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit F une primitive de la fonction f sur $[a, b]$. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est par définition :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Notation. Quand on calcule une intégrale, il y a au moins une étape de calcul où l'on détermine une primitive F puis une étape de calcul où l'on calcule $F(b) - F(a)$. Pour mener agréablement les calculs intermédiaires, on crée une notation :

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Par exemple, $\displaystyle\int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

Exercice 3. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{(x^2-x-2)^2}\, dx$.

1) Justifier l'existence de I.
2) Calculer I.

Solution. **1)** Le discriminant de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) = 9 > 0$. Donc l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$. En particulier, pour tout réel x de $[0, 1]$, $x^2 - x - 2 \neq 0$.

Par suite, la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{2x-1}{(x^2-x-2)^2}$ est continue sur $[0, 1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0, 1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$. On en déduit l'existence de l'intégrale I.

2) Pour tout réel x de $[0, 1]$, posons $u(x) = x^2 - x - 2$. La fonction u est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel x de $[0, 1]$, on a $u'(x) = 2x - 1$. Par suite, pour tout réel x de $[0, 1]$, $f(x) = \dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$. On en déduit qu'une primitive de la fonction f sur $[0, 1]$ est la fonction F définie pour tout réel x de $[0, 1]$ par

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x^2-x-2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{2x-1}{(x^2-x-2)^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x^2-x-2}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{1^2-1-2}\right) - \left(-\frac{1}{0^2-0-2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

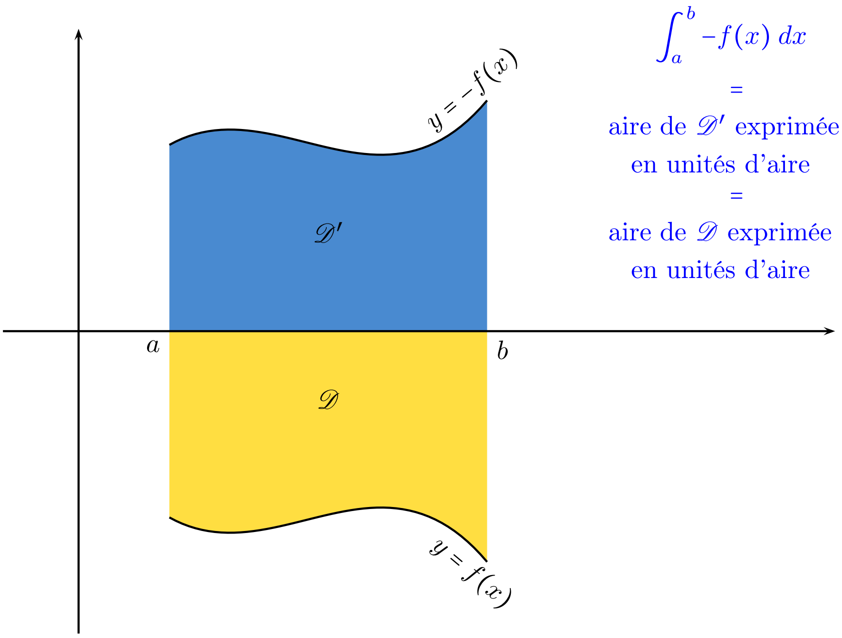
$$\boxed{\int_0^1 \frac{2x-1}{(x^2-x-2)^2}\, dx = 0.}$$

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

b) Interprétation de l'intégrale en terme « d'aire algébrique »

Commençons par analyser le cas où f est une fonction négative sur $[a, b]$. La fonction $-f$ est alors une fonction positive sur $[a, b]$ et son graphe est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des abscisses.
Soit $\mathscr{D}$ (respectivement $\mathscr{D}'$) l'ensemble des points du plan compris entre l'axe des abscisses et le graphe de f (respectivement $-f$) dont l'abscisse est comprise entre a et b.

L'aire est invariante par symétrie et donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont même aire. Puisque la fonction $-f$ est positive, on sait déjà calculer l'aire de $\mathscr{D}'$.



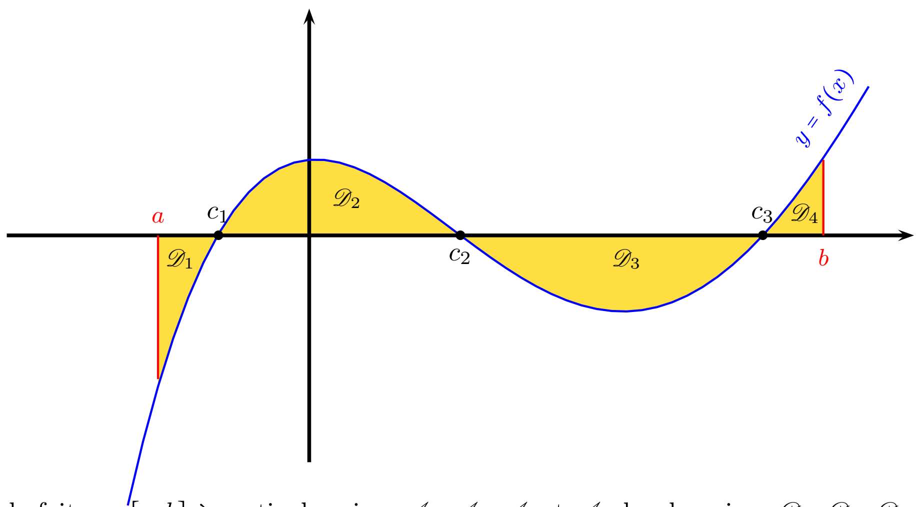
Soit F une primitive de la fonction f sur $[a, b]$. Alors $-F$ est une primitive de la fonction $-f$ sur $[a, b]$. L'aire de $\mathscr{D}'$ exprimée en unités d'aire est

$$\int_a^b (-f(x))\,dx = [-F(x)]_a^b = (-F(b)) - (-F(a)) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ainsi, $-\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire ou encore

$$\text{si } f \text{ est négative sur } [a, b],$$
$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ est l'opposé de l'aire de } \mathscr{D} \text{ exprimée en unités d'aire.}$$

Plus généralement, supposons que la fonction f ne soit « pas trop compliquée » et change de signe un nombre fini de fois sur l'intervalle $[a, b]$ comme c'est le cas ci-dessous.



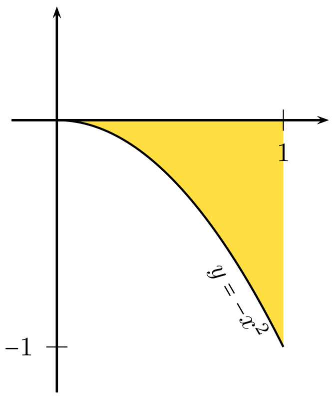
Exprimons l'intégrale de fait sur $[a, b]$ à partir des aires $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$ et $\mathscr{A}_4$ des domaines $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(b)-F(a)\\ &= F(c_1)-F(a)+F(c_2)-F(c_1)+F(c_3)-F(c_2)+F(b)-F(c_3)\\ &= \int_a^{c_1} f(x)\,dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx+\int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx+\int_{c_3}^{b} f(x)\,dx\\ &= -\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2-\mathscr{A}_3+\mathscr{A}_4.\end{aligned}$$

si f est de signe quelconque sur $[a,b]$,
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est la somme des « aires algébriques » des domaines
délimités par l'axe des abscisses et le graphe de f.
Les aires des parties situés au-dessus de (Ox) sont comptées positivement
et les aires des parties situés au-dessous de (Ox) sont comptées négativement.

Par exemple, $\displaystyle\int_0^1 (-x^2)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left(-\frac{1^3}{3}\right)-\left(-\frac{0^3}{3}\right)=-\frac{1}{3}$. Le nombre obtenu est l'opposé de l'aire, exprimée en unités d'aire, de l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses et le graphe de f et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 1.



aire $=\dfrac{1}{3}$

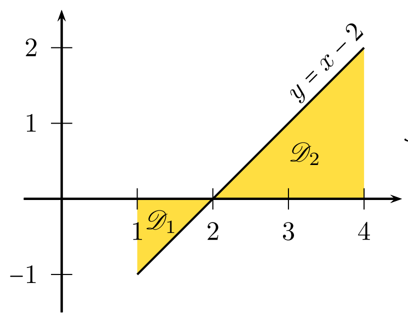
$\displaystyle\int_0^1 (-x^2)\,dx=-\frac{1}{3}$

On peut aussi considérer $\displaystyle\int_1^4 (x-2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^4=\left(\frac{4^2}{2}-2\times 4\right)-\left(\frac{1^2}{2}-2\times 1\right)=\frac{15}{2}-6=\frac{3}{2}$.

L'aire $\mathscr{A}_1$ du domaine $\mathscr{D}_1$ ci-dessous est égale à $\dfrac{1}{2}$ et l'aire $\mathscr{A}_2$ de $\mathscr{D}_2$ est égale à 2 et on a

$$-\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}=\int_1^4 (x-2)\,dx.$$

L'aire de la réunion des domaines $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est quant à elle $\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$.



$\displaystyle\int_1^4 (x-2)\,dx=\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+2=-\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2$

3) Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

a) Relation de Chasles

Dans ce paragraphe, on généralise la relation de Chasles donnée dans un cas particulier au paragraphe II.2)e). Dans ce but, si a et b sont deux réels tels que $a\leqslant b$, on pose par convention

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

On note que l'on a toujours $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx=-(F(b)-F(a))=F(a)-F(b)$.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Par exemple, $\displaystyle\int_1^0 x^2\,dx = -\int_0^1 x^2\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$.

On peut maintenant donner la version générale de la relation de Chasles :

Théorème 9. Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Pour tous réels a, b et c de I, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Démonstration. f est continue sur I et admet donc une primitive sur I. Soit F une primitive de f sur I.

Soient a, b et c trois réels de l'intervalle I. Il y a six cas possibles en ce qui concerne l'ordre dans lequel sont rangés les trois réels a, b et c.

Supposons tout d'abord $a \leqslant b \leqslant c$. Alors

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Supposons maintenant que $b \leqslant c \leqslant a$. D'après ce qui précède, on a $\displaystyle\int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$. On en déduit que $\displaystyle -\int_c^a f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ et donc de nouveau que

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Si on a $a \leqslant b \leqslant c$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ et donc

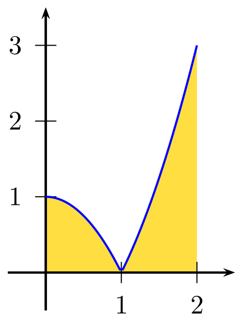
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Les trois derniers cas se traitent de manière analogue.

Exercice 4. Calculer $\displaystyle I = \int_0^2 |x^2 - 1|\,dx$.

Solution. La fonction $x \mapsto |x^2 - 1|$ est continue sur $[0, 2]$. On en déduit l'existence de I.

Pour tout réel x de $[0, 1]$, $x^2 - 1 \leqslant 0$ et donc $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1$ et pour tout réel x de $[1, 2]$, $x^2 - 1 \geqslant 0$ et donc $|x^2 - 1| = x^2 - 1$.



La relation de Chasles nous permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^2 |x^2 - 1|\,dx &= \int_0^1 |x^2 - 1|\,dx + \int_1^2 |x^2 - 1|\,dx = \int_0^1 (-x^2 + 1)\,dx + \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \left(\left(-\frac{1^3}{3} + 1\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 0\right)\right) + \left(\left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right)\right) \\
&= \frac{2}{3} + \left(\frac{8}{3} - 2 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - 2 + \frac{2}{3} = 2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 |x^2 - 1|\,dx = 2.}$$

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

b) Linéarité de l'intégrale

Théorème 10. **1)** Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Pour tous réels a et b de I, $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$.
2) Soient f une fonction continue sur un intervalle I et k un réel.
Pour tous réels a et b de I, $\displaystyle\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx$.

Démonstration. **1)** Soit F (respectivement G) une primitive de la fonction f (respectivement g) sur I. On sait que $F+G$ est une primitive de la fonction $f+g$ sur I. Par suite,

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx &= (F(b)+G(b))-(F(a)+G(a)) = (F(b)-F(a))+(G(b)-G(a))\\ &= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.\end{aligned}$$

2) Soit F une primitive de la fonction f sur I. On sait que kF est une primitive de la fonction kf sur I. Par suite,

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\ dx &= (kF(b))-(kF(a)) = k(F(b)-F(a))\\ &= k\int_a^b f(x)\ dx.\end{aligned}$$

---

c) Positivité de l'intégrale

Puisque l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$ a été définie comme une aire, on peut énoncer :

Théorème 11. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.
Si pour tout réel x de $[a,b]$, on a $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$.

On doit prendre garde au fait que a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$. Si f est positive et si $a > b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leqslant 0$. Par exemple, $\displaystyle\int_1^0 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^0 = -\frac{1}{3} < 0$. D'autre part, le théorème précédent ne dit absolument pas qu'une intégrale est toujours un réel positif. Le théorème précédent dit simplement que l'intégrale d'une fonction positive sur un segment est un réel positif.

d) Croissance de l'intégrale

En combinant la linéarité et la positivité de l'intégrale, on obtient une propriété plus générale que la positivité :

Théorème 12. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ (avec $a \leqslant b$).
Si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx$.

Démonstration. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout réel x de $[a,b]$, on ait $f(x) \leqslant g(x)$. Alors, pour tout réel x de $[a,b]$, on a $g(x)-f(x) \geqslant 0$ puis

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx &= \int_a^b (g(x)-f(x))\ dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)}\\ &\geqslant 0 \text{ (par positivité de l'intégrale),}\end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx \geqslant \int_a^b f(x)\ dx$.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n}\ dx$.

1) a) Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. **1)** Pour tout entier naturel n et tout réel x de $[1,2]$, on a $(1+x^2)^n \neq 0$. Donc, pour tout entier naturel

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

n, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $[1,2]$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $[1,2]$ ne s'annulant pas sur $[1,2]$. On en déduit que pour tout entier naturel n, I_n existe.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+x^2)^n}\right) dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 \frac{1-(1+x^2)}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \int_1^2 \frac{-x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \\
&= -\int_1^2 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale).}
\end{aligned}$$

Pour tout réel x de $[1,2]$, $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \geqslant 0$ puis que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ et finalement que $I_{n+1} \leqslant I_n$.

On a montré que pour tout entier naturel n, on a $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x de $[1,2]$, $\dfrac{1}{(1+x^2)^n} \geqslant 0$ et donc, par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$.

Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit x un réel de $[1,2]$. On a $1+x^2 \geqslant 2$ puis $(1+x^2)^n \geqslant 2^n$ par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0,+\infty[$. Mais alors $0 \leqslant \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$.

On a montré que pour tout réel x de $[1,2]$,

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Par positivité et croissance de l'intégrale, on en déduit que $0 \leqslant \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \leqslant \int_1^2 \frac{1}{2^n}\,dx$ avec

$$\int_1^2 \frac{1}{2^n}\,dx = \frac{1}{2^n}(2-1) = \frac{1}{2^n}.$$

On a montré que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

b) Puisque pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et que $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

---

4) Etude de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un réel de I. Pour tout réel x de I, on peut maintenant considérer l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ même si x est strictement plus petit que a. On définit ainsi une fonction

$$F\ :\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt.$$

Théorème 13. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un réel de I.
La fonction F définie sur I par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I,\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction f.

Démonstration. Soit G une primitive de la fonction f sur I. Alors, pour tout réel x de I, $F(x) = G(x) - G(a)$. Par suite, la fonction F est dérivable sur I et pour tout réel x de I,

$$F'(x) = G'(x) - 0 = f(x).$$

F est donc effectivement une primitive de la fonction f sur I.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Exercice 6. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ et on note $\mathscr{C}_F$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
1) Montrer que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser sa dérivée.
2) Etudier le signe de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
3) Etudier les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ au graphe de F en son point d'abscisse 0.
5) En étudiant la fonction $g : x \mapsto F(x) - x$, déterminer la position relative de $\mathscr{C}_F$ et de la droite $\mathscr{T}$.
6) En étudiant la fonction $h : x \mapsto F(x) + F(-x)$, montrer que la fonction F est impaire.
7) a) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant 1 - \frac{1}{x}$.
b) En déduire que pour tout réel $x \geqslant 1$, $F(x) \leqslant 2$.
c) En déduire que pour tout réel x, $F(x) \leqslant 2$.
8) Donner une idée du graphe de la fonction F.

Solution. 1) Pour tout réel x, on pose $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ de sorte que pour tout réel x, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F' = f$.

$$\text{pour tout réel } x,\ F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

2) Soit x un réel.

1er cas. Supposons $x \geqslant 0$. Pour tout réel t de $[0, x]$, on a $\frac{1}{1+t^2} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \geqslant 0$ ou encore $F(x) \geqslant 0$.

2 ème cas. Supposons $x < 0$. Pour tout réel t de $[x, 0]$, on a $\frac{1}{1+t^2} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt \geqslant 0$ ou encore $-\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \geqslant 0$. Mais alors $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant 0$ ou encore $F(x) \leqslant 0$.

$$\text{La fonction } F \text{ est négative sur }]-\infty, 0] \text{ et positive sur } [0, +\infty[.$$

3) La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La fonction F' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\text{la fonction } F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

4) Une équation de la tangente au graphe de F en son point d'abscisse 0 est

$$y = F'(0)(x - 0) + F(0).$$

$F(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = 0$ et $F'(0) = f(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$. Une équation de la tangente au graphe de F en son point d'abscisse 0 est donc $y = x$.

5) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = F'(x) - 1 = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1 - 1 - x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2}{1+x^2}.$$

La dérivée de g est négative sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Puisque $g(0) = 0 - F(0) = 0$, pour $x \geqslant 0$, on a $g(x) \leqslant g(0) = 0$ et pour $x \leqslant 0$, on a $g(x) \geqslant g(0) = 0$. La fonction g est donc positive sur $]-\infty, 0]$ et négative sur $[0, +\infty[$. On en déduit que pour tout réel $x \leqslant 0$, on a $F(x) \geqslant x$ et pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $F(x) \leqslant x$.
Par suite, $\mathscr{C}_F$ est au-dessus de $\mathscr{T}$ sur $]-\infty, 0]$ et $\mathscr{C}_F$ est au-dessous de $\mathscr{T}$ sur $[0, +\infty[$.

6) La fonction $x \mapsto F(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de dérivation des fonctions composées et donc la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$h'(x) = F'(x) + (-x)'F'(-x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(-x)^2} = 0.$$

Ainsi, la dérivée de h est nulle sur $\mathbb{R}$ et on sait alors que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel x,

$$F(x) + F(-x) = h(x) = h(0) = F(0) + F(0) = 0.$$

Ainsi, pour tout réel x, $F(-x) = -F(x)$ et donc la fonction F est impaire.

7) a) Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Pour tout réel t de $[1, x]$, on a $1 + t^2 \geqslant t^2 > 0$ et donc $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = \left(-\frac{1}{x}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{x}.$$

On a montré que pour tout réel $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant 1 - \frac{1}{x}$.

b) Soit x un réel supérieur ou égal à 1. D'après la relation de Chasles, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.
Pour tout réel t de $[0, 1]$, $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^1 1\,dt = 1 \times (1-0) = 1.$$

D'autre part, d'après a), $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant 1 - \frac{1}{x}$. On en déduit que

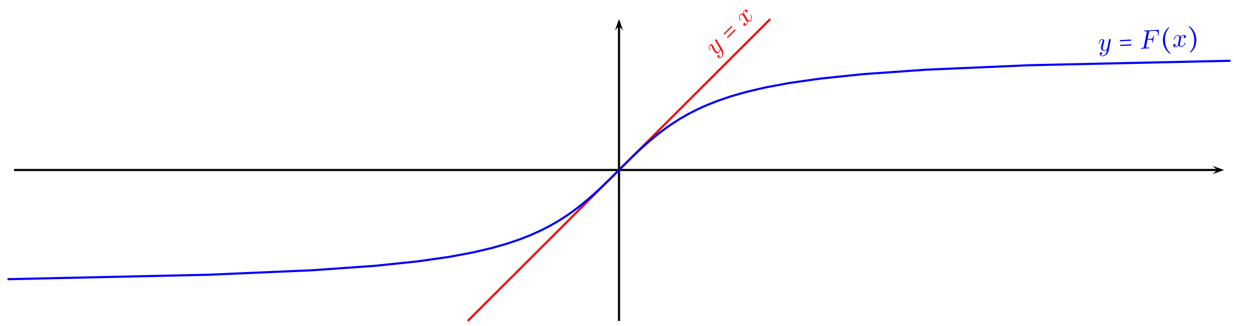
$$F(x) \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x} \leqslant 2.$$

On a montré que pour tout réel $x \geqslant 1$, $F(x) \leqslant 2$.

c) Puisque la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x \leqslant 1$, on a $F(x) \leqslant F(1) \leqslant 2$ et finalement

$$\text{pour tout réel } x,\ F(x) \leqslant 2.$$

8) Allure du graphe de la fonction F.



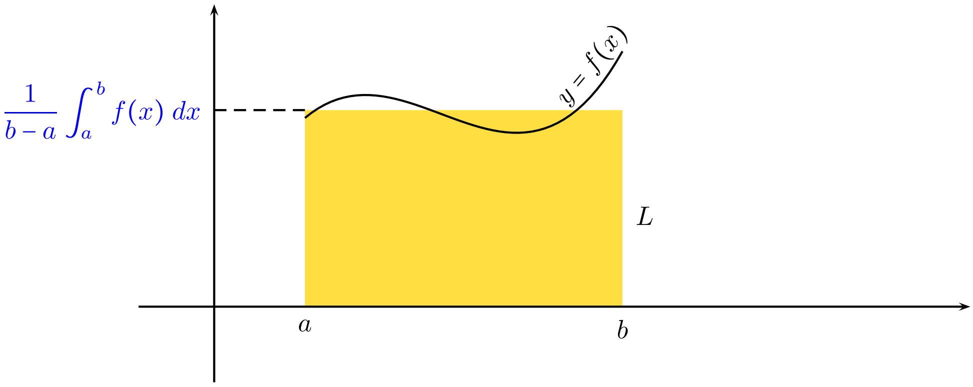
Commentaire. La fonction F de l'exercice précédent est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$: c'est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en 0. Il n'existe cependant aucune fonction du programme de Terminale dont la dérivée soit la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ ou encore les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles rencontrées au lycée.

5) Valeur moyenne d'une fonction

Définition 6. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. La **valeur moyenne** de la fonction f sur le segment $[a, b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

On peut donner différentes interprétations de ce nombre. Si f est positive, $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est la longueur d'un rectangle de largeur $b - a$ qui a même aire que le domaine délimité par le graphe de f et l'axe des abscisses :



En effet, si L est la longueur d'un tel rectangle ($b-a$ étant sa largeur), on a $\int_a^b f(x)\ dx = L \times (b-a)$ et donc

$$L = \frac{1}{b-a}\int_a^x f(t)\ dt.$$

Sinon, dans le cas général, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$ est la moyenne des valeurs de la fonction f. On a additionné toutes les aires algébriques $f(x) \times dx$ et on a divisé par la longueur de l'intervalle. On obtient alors une moyenne des $f(x)$. On a ainsi généralisé la notion de moyenne d'un nombre fini de valeurs.

Exercice 7. Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0,2]$.

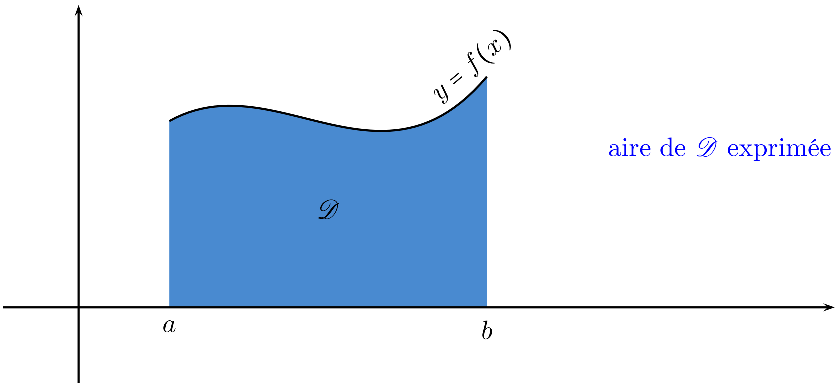
Solution. La valeur moyenne de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0,2]$ est

$$\mu = \frac{1}{2-0}\int_0^2 x^2\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

---

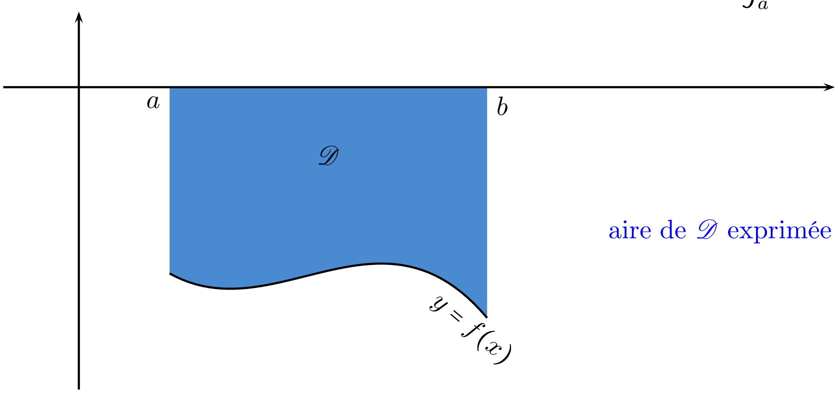
6) Calculs d'aires

On sait déjà que si f est continue est positive sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\ dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire de l'ensemble des points du plan compris entre l'axe des abscisses et le graphe de f dont l'abscisse est comprise entre a et b.



aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire $= \int_a^b f(x)\ dx$

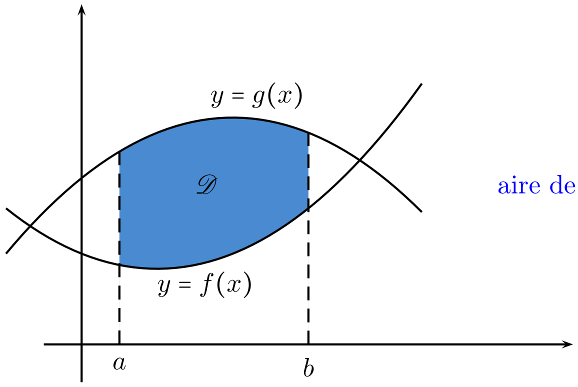
Si f est négative, l'aire, exprimée en unités d'aire du l'ensemble des points du plan compris entre l'axe des abscisses et le graphe de f dont l'abscisse est comprise entre a et b est $-\int_a^b f(x)\ dx$ ou aussi $\int_a^b (-f(x))\ dx$.



aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire $= \int_a^b (-f(x))\ dx$

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Plus généralement, si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout réel x de $[a,b]$ on ait $f(x) \leqslant g(x)$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de l'ensemble des points du plan situés entre les graphes de f et de g dont l'abscisse est comprise entre a et b est $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$.



aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire = $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\text{pour tout réel } x \geqslant 0,\ f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$.

1) Soit a un réel supérieur ou égal à 0. Calculer l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.
On note $\mathscr{A}(a)$ cette aire.

2) Quelle est la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Solution. **1)** Soit a un réel positif.

Pour tout réel $x \geqslant 0$, posons $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$. Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$g(x) - f(x) = \left(\frac{1}{2}x + 2\right) - \left(\frac{1}{2}x + 2 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0.$$

Donc $\mathscr{D}$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $[0, +\infty[$. L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine considéré est donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(a) &= \int_0^a (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^a \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^a = \left(-\frac{1}{1+a}\right) - \left(-\frac{1}{1+0}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{1+a}.\end{aligned}$$

Pour tout réel $a \geqslant 0$, $\mathscr{A}(a) = 1 - \frac{1}{1+a}$.

2) $\lim\limits_{a \to +\infty} \frac{1}{1+a} = 0$ et donc $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathscr{A}(a) = 1$.

Commentaire. Si a est fixé, $\mathscr{A}(a) = 1 - \frac{1}{1+a} \leqslant 1$ et donc l'aire du domaine en jaune ne dépasse jamais 1.
Quand a tend vers $+\infty$, $\mathscr{A}(a)$ tend vers 1. Cela signifie que l'aire du « domaine infini » délimité par la courbe de f, la droite $\mathscr{D}$ et l'axe des ordonnées n'est pas infinie. Elle est égale à 1 qui est aussi l'aire du carré unité.