Planche n° 7. Inégalités dans $\mathbb{R}$. Valeur absolue. Partie entière. Corrigé

Exercice n° 1.

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors $0 = 0^2 - 1 + 1 \leqslant x^2 + x + 1 \leqslant 1^2 + 0 + 1 = 2$. Maintenant, il n'existe aucun réel x tel que $x^2 + x + 1 = 0$ (car $\Delta < 0$). D'autre part, il existe deux réels x tels que $x^2 + x + 1 = 2$ à savoir $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,6\ldots$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1,6\ldots$, mais aucun de ces deux réels n'est dans $[-1, 0]$. L'encadrement fourni n'est pas le meilleur possible car les bornes fournies, à savoir 0 et -2, ne sont pas atteintes.

b) Pour tout réel x, $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$. Donc, pour $x \in [-1, 0]$, $x^2 + x + 1 \geqslant \dfrac{3}{4}$ à égalité effectivement obtenue pour $x = -\dfrac{1}{2} \in [-1, 0]$ et $x^2 + x + 1 \leqslant \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$ avec égalité effectivement obtenue pour $x = -1$ ou $x = 0$.

$$\forall x \in [-1, 0],\ \frac{3}{4} \leqslant x^2 + x + 1 \leqslant 1.$$

2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors $0 \leqslant x + 1 \leqslant 1$ (I) et $\dfrac{3}{4} \leqslant x^2 + x + 1 \leqslant 1$ puis $1 \leqslant \dfrac{1}{x^2+x+1} \leqslant \dfrac{4}{3}$ (II). En multipliant membre à membre les encadrements (I) et (II) (et en tenant compte du fait que tous les réels considérés sont positifs), on obtient

$$\forall x \in [-1, 0],\ 0 \leqslant \frac{x+1}{x^2+x+1} \leqslant \frac{4}{3}.$$

b) Pour $x \in [-4, 1]$, posons $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$. f est dérivable sur $[-4, 1]$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[-4, 1]$ et pour $x \in [-4, 1]$,

$$f'(x) = \frac{1 \times \left(x^2+x+1\right) - (x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{-x^2-2x}{\left(x^2+x+1\right)^2} = -\frac{x(x+2)}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

f' est positive sur $[-1, 0]$ et donc f est croissante sur $[-1, 0]$. Donc, pour $x \in [-1, 0]$, $f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$ ou encore le meilleur encadrement de f sur $[-1, 0]$ est

$$\boxed{\forall x \in [-1, 0],\ 0 \leqslant \frac{x+1}{x^2+x+1} \leqslant 1.}$$

f est décroissante sur $[-4, -2]$, croissante sur $[-2, 0]$ et décroissante sur $[0, 1]$ avec $f(-4) = -\dfrac{3}{13}$, $f(-2) = -\dfrac{1}{3}$, $f(0) = 1$ et $f(1) = \dfrac{2}{3}$. Donc, pour tout $x \in [-4, 1]$,

$$-\frac{1}{3} = \text{Min}\{f(-2), f(1)\} \leqslant f(x) \leqslant \text{Max}\{f(-4), f(0)\} = 1.$$

Le meilleur encadrement de f sur $[-4, 1]$ est

$$\boxed{\forall x \in [-1, 0],\ -\frac{1}{3} \leqslant \frac{x+1}{x^2+x+1} \leqslant 1.}$$

Exercice n° 2.

Soient a et b deux réels. $0 \leqslant (|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|ab| + b^2$ et donc $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$ avec égalité si et seulement $(|a| - |b|)^2 = 0$ ce qui équivaut à $|a| = |b|$.

Exercice n° 3.

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$.

• On a déjà $x = \dfrac{x+x}{2} \leqslant \dfrac{x+y}{2} = m \leqslant \dfrac{y+y}{2} = y$ et donc

$$\boxed{x \leqslant m \leqslant y.}$$

(on peut aussi écrire : $m - x = \dfrac{x+y}{2} - x = \dfrac{y-x}{2} \geqslant 0$).

• On a ensuite $x = \sqrt{x \times x} \leqslant \sqrt{x \times y} = g \leqslant \sqrt{y \times y} = y$ et donc

$$\boxed{x \leqslant g \leqslant y.}$$

• $m - g = \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{xy} + \left(\sqrt{y}\right)^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right)^2 \geqslant 0$ et donc,

$$\boxed{x \leqslant g \leqslant m \leqslant y.}$$

• D'après ce qui précède, la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est comprise entre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, ce qui fournit $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{h} \leqslant \dfrac{1}{x}$, ou encore

$$\boxed{x \leqslant h \leqslant y.}$$

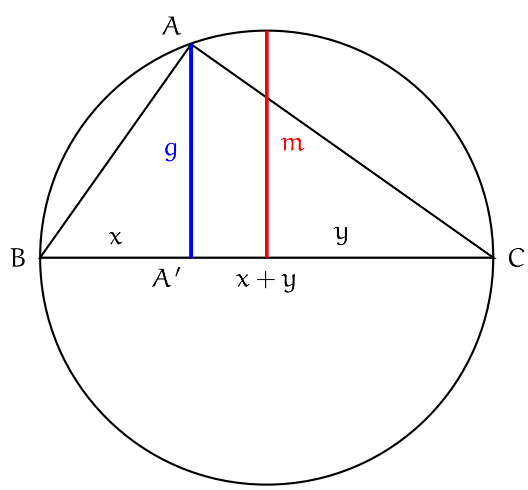
• D'après ce qui précède, la moyenne géométrique des deux réels $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{y}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$ ou encore $\dfrac{1}{g} \leqslant \dfrac{1}{h}$ et finalement

$$\boxed{x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y \text{ où } \dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right),\ g = \sqrt{xy} \text{ et } m = \dfrac{x+y}{2}.}$$

Remarque 1. On a $h = \dfrac{2xy}{x+y}$, mais cette expression ne permet pas de comprendre que $\dfrac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$.

Remarque 2. On peut visualiser l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique.
Si (ABC) est un triangle rectangle en A et A' est le pied de la hauteur issue de A, on sait que $AA'^2 = A'B \times A'C$. On se sert de cette remarque pour construire g et la comparer graphiquement à m.

On accole deux segments de longueurs respectives x et y. On construit alors un triangle rectangle d'hypoténuse le segment obtenu (de longueur $x+y$) noté $[BC]$, tel que le troisième sommet A ait une projection orthogonale A' sur (BC) vérifiant $BA' = x$ et $CA' = y$.



La moyenne arithmétique de x et y est $m = \dfrac{x+y}{2}$ le rayon du cercle, et la moyenne géométrique de x et y est $g = \sqrt{xy} = \sqrt{A'B \times A'C} = AA'$, la hauteur issue de A du triangle (ABC).

Exercice n° 4.

Soient n un entier naturel non nul et a un réel positif. D'après la formule du binôme de Newton,

$$(1+a)^n = 1 + na + \ldots \geqslant 1 + na,$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$. En appliquant à $a = 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on obtient $2^n \geqslant n + 1$.

Exercice n° 5.

L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 1$. Dorénavant $n \geqslant 2$.

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, posons $u_k = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$ puis pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $v_k = \dfrac{u_{k+1}}{u_k}$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a alors

$$\begin{aligned}
v_k &= \frac{\dbinom{n}{k+1} \times n^k}{\dbinom{n}{k} \times n^{k+1}} = \frac{1}{n} \times \frac{n!k!(n-k)!}{n!(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{n(k+1)} = \frac{(n+1)-(k+1)}{n(k+1)} = -\frac{1}{n} + \frac{n+1}{n(k+1)} \\
&\leqslant -\frac{1}{n} + \frac{n+1}{2n} \text{ (car } k \geqslant 1\text{)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_k$ et donc,

$$u_k \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} u_1 = \frac{1}{2^{k-1}} \frac{n}{n} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

En tenant compte de $u_0 = 1$, on a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Redémontrons d'une autre manière l'inégalité. Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \ln(3)$. Pour $x > 0$, posons $f(x) = x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x(\ln(x+1) - \ln(x))$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f'(x) = \ln(x+1) - \ln(x) + x\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x+1}$ puis

$$(f')'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0.$$

La fonction f' est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et d'autre part, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = 0$. Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$. Mais alors, la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$$

Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) < 1$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 1$ puis $\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < e < 3$.

Exercice n° 6.

Pour x réel, posons $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k x)^2$. On remarque que pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$. En développant les n carrés, on obtient,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(b_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + a_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right).$$

1er cas. Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \neq 0$, f est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est alors négatif ou nul. Ceci fournit

$$0 \geqslant \Delta' = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right),$$

et donc (en se rappelant que pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$),

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

2ème cas. Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0$, alors tous les b_k sont nuls (somme nulle de réels positifs) et l'inégalité est immédiate.

Finalement, dans tous les cas,

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.}$$

En appliquant cette inégalité aux réels $|a_k|$ et $|b_k|$, on obtient les inégalités de l'énoncé.

Exercice n° 7.

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2,..., a_n, n réels strictement positifs.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{a_i}{a_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) = n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)$$

Pour $x > 0$, posons alors $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. f est donc strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. f admet ainsi un minimum en 1. Par suite,

$$\forall x > 0,\ f(x) \geqslant f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Remarque. L'inégalité entre moyenne géométrique et arithmétique permet aussi d'obtenir le résultat :

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geqslant \sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 1.$$

On en déduit alors que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}\right) \geqslant n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2 = n + 2 \times \frac{n^2 - n}{2} = n^2.$$

2) Puisque les a_k sont strictement positifs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{a_i}}^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}\sqrt{\frac{1}{a_i}}\right)^2 = n^2.$$

Exercice n° 8.

Si l'un des réels a, b ou c est strictement plus grand que 1, alors l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est négatif (puisque a, b et c sont positifs) et donc inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.

Sinon, les trois réels a, b et c sont dans $[0, 1]$. Le produit des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ vaut

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c).$$

Mais, pour $x \in [0, 1]$, $x(1-x)$ est positif et d'autre part, $x(1-x) = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{4}$. Par suite,

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leqslant \frac{1}{4^3}.$$

Il est alors impossible que les trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ soient strictement plus grand que $\frac{1}{4}$, leur produit étant dans ce cas strictement plus grand que $\frac{1}{4^3}$.

On a montré dans tous les cas que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice n° 9.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ puis $\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x + 1 < (\lfloor x \rfloor + 1) + 1$. Comme $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$, on a bien $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

2) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y$. Ainsi, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier relatif inférieur ou égal à $x + y$. Comme $\lfloor x + y \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x + y$, on a donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor$.

Améliorons. $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$ fournit $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ et donc $\lfloor x + y \rfloor$ vaut, suivant le cas, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ou $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ (et est dans tous les cas supérieur ou égal à $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$).

3) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $k = \lfloor x \rfloor$ et $l = \lfloor y \rfloor$.

1er cas. Si $x \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right[$ et $y \in \left[l, l + \frac{1}{2}\right[$, alors $x + y \in [k + l, k + l + 1[$ et donc $\lfloor x + y \rfloor = k + l$, puis $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor = k + l + k + l = 2k + 2l$. D'autre part, $2x \in [2k, 2k + 1[$ et $2y \in [2l, 2l + 1[$. Par suite, $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = 2k + 2l$. Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor = \lfloor 2x) + \lfloor 2y \rfloor$.

2ème cas. Si $x \in \left[k + \frac{1}{2}, k + 1\right[$ et $y \in \left[l, l + \frac{1}{2}\right[$, alors $x + y \in \left[k + l + \frac{1}{2}, k + l + \frac{3}{2}\right[$ et donc $\lfloor x + y \rfloor = k + l$ ou $k + l + 1$,puis $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor = 2k + 2l$ ou $2k + 2l + 1$. D'autre part, $2x \in [2k + 1, 2k + 2[$ et $2y \in [2l, 2l + 1[$. Par suite, $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = 2k + 2l + 1$. Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

3ème cas. Si $x \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right[$ et $y \in \left[l + \frac{1}{2}, l + 1\right[$, on a de même $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

4ème cas. Si $x \in \left[k + \frac{1}{2}, k + 1\right[$ et $y \in \left[l + \frac{1}{2}, l + 1\right[$, on a $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor = 2k + 2l + 2 = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Finalement, on a dans tous les cas $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice n° 10.

p est déterminé par l'encadrement : $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ qui s'écrit encore $p \leqslant \log_{10}(n) < p + 1$. Par suite,

$$\boxed{p = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor.}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{le nombre de chiffres d'un entier } n \text{ en base 10 est } \lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1.}$$

Exercice n° 11.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} \leqslant \frac{x + 2x + \ldots + nx}{n^2} = \frac{n(n+1)x}{2n^2} = \frac{(n+1)x}{2n},$$

et aussi,

$$\frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} > \frac{(x-1) + (2x-1) + \ldots + (nx-1)}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}x - n}{n^2} = \frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n}.$$

Finalement, pour tout naturel non nul,

$$\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} \leqslant \frac{(n+1)x}{2n}.$$

Les deux membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $\dfrac{x}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, on peut affirmer que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \ldots + \lfloor nx\rfloor}{n^2} = \frac{x}{2}.}$$

Exercice n° 12.

1) Par définition d'un entier, il y a n entiers entre 1 et n. Ensuite, pour tout entier naturel k, on a

$$1 \leqslant k \leqslant x \Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant \lfloor x\rfloor.$$

Il y a donc $\lfloor x\rfloor$ entiers entre 1 et x.

2) Il y a $n+1$ entiers entre 0 et n et $\lfloor x\rfloor + 1$ entiers entre 0 et x.

3) Les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Or,

$$0 \leqslant 2k \leqslant x \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant \frac{x}{2}.$$

Le nombre des entiers pairs compris entre 0 et x est encore le nombre des entiers k compris au sens large entre 0 et $\dfrac{x}{2}$. D'après 2), il y a $\left\lfloor \dfrac{x}{2}\right\rfloor + 1$ entiers pairs entre 0 et x.

Soit k un entier naturel.

$$0 \leqslant 2k+1 \leqslant x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{x-1}{2}\right\rfloor.$$

Si $x \in [0,1[$, il n'y a pas d'entier impair compris entre 0 et x et si $x \geqslant 1$, il y a $\left\lfloor \dfrac{x-1}{2}\right\rfloor + 1 = \left\lfloor \dfrac{x+1}{2}\right\rfloor$ entiers impairs entre 0 et x, ce qui reste vrai quand $x \in [0,1[$.

4) Il y a $\left\lfloor \dfrac{x}{3}\right\rfloor + 1$ multiples de 3 entre 0 et x.

5) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$x + 2y = n \Leftrightarrow x = n - 2y.$$

Le nombre de couples (x,y) solutions est encore le nombre d'entiers naturels y tels que $n - 2y \in \mathbb{N}$ ou encore le nombre d'entiers y tels que$0 \leqslant 2y \leqslant n$. Il y a donc $\left\lfloor \dfrac{n}{2}\right\rfloor + 1$ couples solutions.

6) Si x et y sont respectivement le nombre de pièces de 10 centimes d'euros et le nombre de pièces de 20 centimes d'euros, le nombre cherché est le nombre de couples d'entiers naturels solutions de l'équation $10x + 20y = 1000$ qui s'écrit encore $x + 2y = 100$. D'après 5), il y a $\left\lfloor \dfrac{100}{2}\right\rfloor + 1 = 51$ façons de payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros.

Exercice n° 13.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Notons p la partie entière de nx. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a alors

$$p = E(nx) \Rightarrow p \leqslant nx < p+1 \Rightarrow \frac{p+k}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < \frac{p+k+1}{n} \quad (*).$$

La division euclidienne de p par n fournit $(q,r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p = qn + r$ et $0 \leqslant r \leqslant n-1$. $(*)$ s'écrit alors

$$q + \frac{k+r}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+r+1}{n}.$$

• Si $r = 0$, alors pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$q \leqslant q + \frac{k}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+1}{n} \leqslant q + \frac{n-1+1}{n} = q+1.$$

Dans ce cas, pour tout k élément de $[\![0, n-1]\!]$, $\left\lfloor x + \dfrac{k}{n}\right\rfloor = q$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n}\right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} q = nq = p = \lfloor nx\rfloor.$$

• Si $1 \leqslant r \leqslant n-1$, alors pour $0 \leqslant k \leqslant n-r-1$, on a

$$q \leqslant q+\frac{k+r}{n} \leqslant x+\frac{k}{n} < q+\frac{k+r+1}{n} \leqslant q+\frac{n-r-1+r+1}{n} = q+1,$$

et dans ce cas, $\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = q$ et si $n-r \leqslant k \leqslant n-1$, on a

$$q+1 = q+\frac{n-r+r}{n} \leqslant q+\frac{k+r}{n} \leqslant x+\frac{k}{n} < q+\frac{k+r+1}{n} \leqslant q+\frac{n-1+r+1}{n} < q+\frac{n+n}{n} = q+2,$$

et dans ce cas, $\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = q+1$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-r-1} q + \sum_{k=n-r}^{n-1}(q+1) = \sum_{k=0}^{n-1} q + \sum_{k=n-r}^{n-1} 1 = nq+((n-1)-(n-r-1)) = nq+r = p = \lfloor nx\rfloor.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor.}$$

Exercice n° 14.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de n par 25 fournit un quotient entier q et et un reste r élément de $[\![0,24]\!]$ tels que $n = 25q+r$. On a alors

$$\left\lfloor \frac{1}{3}\left(n+2-\left\lfloor\frac{n}{25}\right\rfloor\right)\right\rfloor = \left\lfloor\frac{25q+r+2-q}{3}\right\rfloor = \left\lfloor 8q+\frac{r+2}{3}\right\rfloor = 8q+\left\lfloor\frac{r+2}{3}\right\rfloor,$$

et

$$\left\lfloor\frac{8n+24}{25}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{8(25q+r)+24}{25}\right\rfloor = 8q+\left\lfloor\frac{8r+24}{25}\right\rfloor.$$

Pour montrer l'égalité de l'énoncé, il reste donc à vérifier les 25 égalités $\left\lfloor\frac{r+2}{3}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{8r+24}{25}\right\rfloor$, $0 \leqslant r \leqslant 24$, $(*)$, ce qui peut déjà se vérifier « à la main ».

Diminuons encore le nombre de vérifications. La division euclidienne de r par 3 s'écrit $r = 3k+l$ avec $0 \leqslant l \leqslant 2$. Mais alors,

$$\left\lfloor\frac{r+2}{3}\right\rfloor = k+\left\lfloor\frac{l+2}{3}\right\rfloor \text{ et } \left\lfloor\frac{8r+24}{25}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{25k-k+8l+24}{25}\right\rfloor = k+\left\lfloor\frac{-k+8l+24}{25}\right\rfloor.$$

Si $l = 0$, k varie de 0 à 8 et dans ce cas, $0 \leqslant \frac{-k+24}{25} = \frac{-k+8l+24}{25} \leqslant \frac{24}{25} < 1$. Par suite,

$$\left\lfloor\frac{-k+8l+24}{25}\right\rfloor = 0 = \left\lfloor\frac{l+2}{3}\right\rfloor.$$

On a ainsi vérifié $(*)$ quand $r \in \{0,3,6,9,12,15,18,21,24\}$.

Si $l = 1$ ou $l = 2$, $\left\lfloor\frac{l+2}{3}\right\rfloor = 1$ et d'autre part, k varie de 0 à 7. Dans ce cas,

$$1 = \frac{-7+8+24}{25} \leqslant \frac{-k+8l+24}{25} \leqslant \frac{16+24}{25} < 2$$

et donc

$$\left\lfloor\frac{-k+8l+24}{25}\right\rfloor = 1 = \left\lfloor\frac{l+2}{3}\right\rfloor.$$

On a ainsi vérifié $(*)$ pour les autres valeurs de r. Finalement, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left\lfloor \frac{1}{3}\left(n+2-\left\lfloor\frac{n}{25}\right\rfloor\right)\right\rfloor = \left\lfloor\frac{8n+24}{25}\right\rfloor.}$$

Exercice n° 15.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) La formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{3}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{3}^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}\sqrt{3}^{2k}2^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}\sqrt{3}^{2k+1}2^{n-2k-1}\\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}3^k 2^{n-2k} + \sqrt{3}\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}3^k 2^{n-2k-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}3^k 2^{n-2k}$ et $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}3^k 2^{n-2k-1}$, a_n et b_n sont des **entiers** tels que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$. En remplaçant $\sqrt{3}$ par $-\sqrt{3}$ (c'est-à-dire par un calcul conjugué), on a aussi $\left(2-\sqrt{3}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{3}$. Mais alors,

$$a_n^2 - 3b_n^2 = \left(a_n + b_n\sqrt{3}\right)\left(a_n - b_n\sqrt{3}\right) = \left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n = (4-3)^n = 1.$$

2) On note que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = (a_n + b_n\sqrt{3}) + (a_n - b_n\sqrt{3}) = 2a_n$. Mais,

$$0 < (2-\sqrt{3})^n < 1.$$

Par suite,

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n < \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2a_n < \left(2+\sqrt{3}\right)^n + 1,$$

ou encore

$$2a_n - 1 < \left(2+\sqrt{3}\right)^n < 2a_n.$$

On en déduit que $\left\lfloor\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\rfloor = 2a_n - 1$ et donc que $\left\lfloor\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\rfloor$ est un entier impair.

Exercice n° 16.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1 &\Rightarrow n\lfloor x\rfloor \leqslant nx < n\lfloor x\rfloor + n\\ &\Rightarrow n\lfloor x\rfloor \leqslant \lfloor nx\rfloor < n\lfloor x\rfloor + n \text{ (car } n\lfloor x\rfloor \text{ et } n\lfloor x\rfloor + n \text{ sont des entiers)}\\ &\Rightarrow \lfloor x\rfloor \leqslant \frac{\lfloor nx\rfloor}{n} < \lfloor x\rfloor + 1\\ &\Rightarrow \left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor.\end{aligned}$$

Exercice n° 17.

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$.

$$(n!)^2 = \left(\prod_{k=1}^{n}(n+1-k)\right)\left(\prod_{k=1}^{n}k\right) = \prod_{k=1}^{n}k(n+1-k).$$

Maintenant, la fonction $x \mapsto x(n+1-x)$ est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{n+1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{n+1}{2}, n+1\right]$. Puisque $f(1) = f(n) = n$, on en déduit que pour $x \in [2, n-1]$, $f(x) > n$. Puisque $n \geqslant 3$, on a $n-1 \geqslant 2$ et on peut écrire

$$(n!)^2 = n^2\prod_{k=2}^{n-1}k(n+1-k) > n^2\prod_{k=2}^{n-1}n = n^n,$$

et donc,

$$\sqrt[n]{n!} = (n!^2)^{1/(2n)} > (n^n)^{1/2n} = \sqrt{n}.$$

Exercice n^o 18.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque, pour tout entier k, $|\cos k| \in [0,1]$, on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |\cos k| &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \cos^2 k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(1+\cos(2k)) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{2ik}\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{2i}\frac{1-e^{2in}}{1-e^{2i}}\right)\\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{i(n-1+2)}\frac{\sin n}{\sin 1}\right) = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)\sin n}{2\sin 1} \geqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{2\sin 1}.\end{aligned}$$

Maintenant, $\dfrac{1}{2\sin 1} = 0,594...$. Par suite, pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{1}{2\sin 1} \leqslant 0,75 = \dfrac{3}{4} \leqslant \dfrac{n}{4}$, et donc

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{2\sin 1} \geqslant \frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n}{4}.$$

Enfin, si $n = 1$, $|\cos 1| = 0,5... \geqslant 0,25 = \dfrac{1}{4}$ et si $n = 2$, $|\cos 1| + |\cos 2| = 0,9... \geqslant 0,5 = \dfrac{2}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geqslant \frac{n}{4}.}$$

Exercice n^o 19.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$.

• L'inégalité est vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ et montrons que $|\sin((n+1)x)| \leqslant (n+1)|\sin x|$. Alors,

$$\begin{aligned}|\sin(n+1)x| &= |\sin nx\cos x + \cos nx \sin x| \leqslant |\sin nx| \times |\cos x| + |\cos nx| \times |\sin x|\\ &\leqslant |\sin nx| + |\sin x|\\ &\leqslant n|\sin x| + |\sin x| \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)|\sin x|.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|.}$$

