Planche n° 7. Inégalités dans $\mathbb{R}$. Valeur absolue. Partie entière

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1. (T)**

1) a) Encadrer à la main x^2+x+1 pour $x \in [-1,0]$. A-t-on obtenu le meilleur encadrement possible ?
b) Trouver un meilleur encadrement en effectuant une transformation canonique du trinôme.

2) a) Encadrer à la main $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ pour $x \in [-1,0]$.
b) Encadrer au mieux $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ pour $x \in [-1,0]$ puis pour $x \in [-4,1]$.

Exercice n° 2. (*I)

Montrer que pour tous réels a et b, $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité ?

Exercice n° 3. (I)** (Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique)

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ (moyenne harmonique). Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

Exercice n° 4. (*I) (Inégalité de Bernoulli)

Montrer que, pour a réel positif et n entier naturel donnés, $(1+a)^n \geqslant 1+na$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant n+1$.

Exercice n° 5. (***)

On veut montrer de manière élémentaire (c'est-à-dire en se passant du logarithme népérien et en ne travaillant qu'avec les deux opérations $+$ et $\times$) que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$.

Pour cela développer, puis majorer $u_k = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$ en commençant par majorer $v_k = \dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ par $\dfrac{1}{2}$.

Redémontrer cette inégalité en étudiant la fonction $x \mapsto x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice n° 6. (*I)** (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2,..., a_n, b_1, b_2,..., b_n, $2n$ réels. Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \times |b_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

(Indication. Considérer le polynôme $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k x)^2$, développer puis ordonner suivant les puissances décroissantes puis utiliser, dans le cas général, les connaissances sur le second degré).

Exercice n° 7. (*I)**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2,..., a_n, n réels strictement positifs.
1) Montrer directement que $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$ (développer et penser à $f(x) = x+\dfrac{1}{x}$).

2) Redémontrer cette inégalité en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz établie au n° 5.

Exercice n° 8. (***)

Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.

Exercice n° 9. (IT)**

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

2) Montrer que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor x+y\rfloor$.

3) Montrer que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor x+y\rfloor\leqslant\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor$.

Exercice n° 10. (I)**

Tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique sous la forme

$$n=a_0+10a_1+\ldots+10^p a_p,$$

où p est un entier naturel et les a_i sont des entiers éléments de $[\![0,9]\!]$, a_p étant non nul. Déterminer p en fonction de n. Déterminer le nombre de chiffres de n en base 10.

Exercice n° 11. (I)**

Soit x un réel. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2}$.

Exercice n° 12. (IT)**

Soient n un entier naturel et x un réel positif.

1) Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 1 et n ? entre 1 et x ?

2) Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 0 et n ? entre 0 et x ?

3) Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et x ? Combien y a-t-il d'entiers naturels impairs entre 0 et x ?

4) Combien y a-t-il de multiples de 3 entre 0 et x ?

5) Combien l'équation $x+2y=n$, n entier naturel donné et x et y entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions ?

6) De combien de façons peut-on payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros ?

Exercice n° 13. (****)

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=\lfloor nx\rfloor$ (poser la division euclidienne de $\lfloor nx\rfloor$ par n).

Exercice n° 14. (****)

Montrer que pour $n\in\mathbb{N}$, $\left\lfloor\dfrac{1}{3}\left(n+2-\left\lfloor\dfrac{n}{25}\right\rfloor\right)\right\rfloor=\left\lfloor\dfrac{8n+24}{25}\right\rfloor$.

Exercice n° 15. (**I)**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer qu'il existe $(a_n,b_n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{3}$, puis que $3b_n^2=a_n^2-1$.

2) Montrer que $\left\lfloor\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\rfloor$ est un entier impair (penser à $\left(2-\sqrt{3}\right)^n$)).

Exercice n° 16. (***)

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \left\lfloor\dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$.

Exercice n° 17. (*I)**

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant 3\Rightarrow\sqrt{n}<\sqrt[n]{n!})$.
(commencer par vérifier que pour $k=2,3,\ldots,n$, on a : $(n-k+1)k>n$).

Exercice n° 18. (***)

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\cos k|\geqslant\frac{n}{4}$ (remarquer que si $x\in[0;1],\ x^2\leqslant x$).

Exercice n° 19. (I)**

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ |\sin(nx)|\leqslant n|\sin x|$.

