Séries de Fourier

Plan du chapitre

1 Polynômes trigonométriques ..... **page 2**
- **1.1** Polynômes trigonométriques sous forme exponentielle ..... page 2
- **1.2** Polynômes trigonométriques « sous forme trigonométrique » ..... page 3

2 Séries trigonométriques ..... **page 5**
- **2.1** Définition ..... page 5
- **2.2** Périodicité ..... page 6
- **2.3** Convergence normale ..... page 6
- **2.4** Récupération des coefficients ..... page 6

3 Coefficients de Fourier ..... **page 7**
- **3.1** Définition des coefficients de Fourier ..... page 7
- **3.2** Le lemme de Lebesgue ..... page 7
- **3.3** Propriétés des coefficients de Fourier ..... page 8
  - **3.3.1** Comportement asymptotique ..... page 8
  - **3.3.2** Linéarité ..... page 8
  - **3.3.3** Utilisation de la périodicité ..... page 8
  - **3.3.4** Utilisation de la parité ..... page 8
  - **3.3.5** Relations entre $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_n(f)$ ..... page 9
  - **3.3.6** Cas des fonctions de classe C^k ..... page 9

4 Séries de Fourier ..... **page 10**
- **4.1** Définition des séries de Fourier ..... page 10
- **4.2** La formule de Dirichlet ..... page 10
- **4.3** Le théorème de Dirichlet ..... page 11
- **4.4** Un exemple ..... page 12

5 L'aspect hilbertien des séries de Fourier ..... **page 13**
- **5.1** L'espace préhilbertien $(D, \langle\ ,\ \rangle)$ ..... page 13
  - **5.1.1** Le choix du bon espace ..... page 13
  - **5.1.2** Le produit scalaire $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$ ..... page 14
  - **5.1.2** Une famille orthonormée de l'espace $(D, \langle\ ,\ \rangle)$ ..... page 14
- **5.2** La formule de Parseval ..... page 15
  - **5.2.1** Polynôme trigonométrique de meilleure approximation quadratique. Inégalité de Bessel ..... page 15
  - **5.2.2** La formule de Parseval ..... page 15
  - **5.2.3** Quelques conséquences ..... page 16

6 Généralisation aux fonctions T-périodiques ..... **page 17**

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

En maths sup, nous avons étudié les fonctions polynômes $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. En maths spé, nous sommes passés à la limite quand n tend vers $+\infty$ pour obtenir les séries entières $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Les sommes de séries entières avaient de nombreuses propriétés : unicité des coefficients, caractère C^∞, ... Puis nous nous sommes intéressés au problème inverse : une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert contenant 0 est-elle nécessairement la somme d'une série entière ? On a vu que ce n'était pas toujours le cas ce qui nous a conduit à définir la notion de fonction développable en série entière (DSE).

Nous allons adopter le même plan dans ce chapitre consacré aux séries de Fourier. Nous allons d'abord nous intéresser aux polynômes trigonométriques puis nous allons passer à la limite quand le nombre de termes tend vers $+\infty$ pour obtenir les séries trigonométriques dont la somme a pour principale propriété d'être 2π-périodique. Nous nous intéresserons ensuite au problème inverse : une fonction 2π-périodique est-elle la somme d'une série trigonométrique ? Ceci nous conduira à la notion de fonctions développables en séries de Fourier (DSF).

1 Polynômes trigonométriques

1.1 Polynômes trigonométriques sous forme exponentielle.

Définition 1. Un polynôme trigonométrique sous forme exponentielle est une fonction de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k \left(e^{ix}\right)^k = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et les c_k, $-n \leqslant k \leqslant n$, sont des nombres complexes.

Commençons par énoncer un résultat immédiat qui nous permettra le moment venu de récupérer les coefficients de ce polynôme.

Théorème 1.
Pour tout $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \times \overline{e^{ilx}}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x}\, dx = \delta_{k,l}$ où $\delta_{k,l}$ est le symbole de Kronecker.

Démonstration . Soit $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$. Si $k = l$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \times \overline{e^{ilx}}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$. Si $k \neq l$, par 2π-périodicité de la fonction $x \mapsto e^{i(k-l)}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \times \overline{e^{ilx}}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(k-l)x}}{i(k-l)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Finalement, pour tout $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \times \overline{e^{ilx}}\, dx \begin{cases} 1 \text{ si } k = l \\ 0 \text{ si } k \neq l \end{cases} = \delta_{k,l}$.

❑

Soient $n \in \mathbb{N}$ puis $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|k| > n \Rightarrow c_k = 0$. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ (le polynôme trigonométrique f « n'utilise pas » les c_k quand $|k| > n$). Alors

Théorème 2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx$.

Démonstration . Soit $k \in \mathbb{Z}$. La fonction $x \mapsto f(x)e^{-ikx}$ est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx = \sum_{l=-n}^{n} c_l \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\overline{e^{ilx}}\, dx = \sum_{l=-n}^{n} c_l \delta_{k,l} = \begin{cases} c_k \text{ si } |k| \leqslant n \\ 0 \text{ si } |k| > n \end{cases} = c_k.$$

❑

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note e_k la fonction $x \mapsto e^{ikx}$. Une conséquence du théorème 2 est :

Théorème 3. Le famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille libre du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\left(C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}), +, .\right)$.

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que toute sous-famille finie de la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est libre. Pour cela, il suffit de vérifier que toute famille du type $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$, $n\in\mathbb{N}$, est libre car toute partie non vide et finie K de $\mathbb{Z}$, est contenue dans un certain $[\![-n,n]\!]$, $n\in\mathbb{N}$.

Soit donc $n\in\mathbb{N}$. Soit $(c_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{C}^{2n+1}$.

$$\begin{aligned}\sum_{l=-n}^{n} c_l e_l = 0 &\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{l=-n}^{n} c_l e^{ilx} = 0\\ &\Rightarrow \forall k\in[\![-n,n]\!],\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{l=-n}^{n} c_l e^{ilx}\right)e^{-ikx}\,dx = 0\\ &\Rightarrow \forall k\in[\![-n,n]\!],\ c_k = 0.\end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est $\mathbb{C}$-libre.

❑

⇛ **Commentaire.** *Puisque $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est également $\mathbb{R}$-libre.*

Une conséquence du théorème 3 est que si $f\ :\ x\mapsto \sum_{k=-p}^{p} c_k e^{ikx}$ est un polynôme trigonométrique non nul, il existe un unique entier naturel n tel que, pour $|k|>n$, $c_k=0$ et $c_n\neq 0$ ou $c_{-n}\neq 0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$. L'entier n s'appelle le **degré** du polynôme trigonométrique non nul et f s'écrit de manière unique sous la forme $f=\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ avec $c_n\neq 0$ ou $c_{-n}\neq 0$. On adopte la convention que le degré du polynôme trigonométrique nul est $-\infty$ et on note E_n l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n.

Théorème 4. $(E_n,+,.)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2n+1$. Une base de E_n est $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$.

Démonstration. $E_n=\mathrm{Vect}\,(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{C}^{\mathbb{R}},+,.\right)$. De plus, la famille $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ est $\mathbb{C}$-libre et est donc une base de E_n. Par suite, $\dim(E_n)=\mathrm{card}\,(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}=2n+1$.

❑

Les résultats précédents peuvent s'énoncer de manière explicite sous la forme :

Théorème 5. Pour tout $f\in E_n$, $f=\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$ où, pour tout $k\in[\![-n,n]\!]$, $c_k(f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$.

Définition 2. Soit f un polynôme trigonométrique. Les nombres $c_k(f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$, $k\in\mathbb{Z}$, s'appellent les **coefficients de Fourier** (sous forme exponentielle) du polynôme trigonométrique f.

Terminons par une propriété immédiate des polynômes trigonométriques :

Théorème 6. Un polynôme trigonométrique est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique.

1.2 Polynômes trigonométriques « sous forme trigonométrique »

On exprime maintenant un polynôme trigonométrique du type du paragraphe précédent (avec $n\geqslant 1$) à l'aide des fonctions sinus et cosinus. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} &= c_0+\sum_{k=1}^{n} c_{-k}e^{-ikx}+\sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx}\\ &= c_0+\sum_{k=1}^{n} c_{-k}(\cos(kx)-i\sin(kx))+\sum_{k=1}^{n} c_k(\cos(kx)+i\sin(kx))\\ &= c_0+\sum_{k=1}^{n}\left((c_{-k}+c_k)\cos(kx)+i\,(c_k-c_{-k})\sin(kx)\right).\end{aligned}$$

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

On a obtenu une écriture de la forme $x \mapsto \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx))$. De la même façon que dans le paragraphe précédent, on va récupérer les coefficients de ce polynôme. On commence par :

Théorème 7.

- $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(px)\ dx = \begin{cases} 2\pi \text{ si } n = p = 0 \\ \pi \text{ si } n = p \geqslant 1 \\ 0 \text{ si } n \neq p \end{cases}$.
- $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(px)\ dx = \begin{cases} \pi \text{ si } n = p \\ 0 \text{ si } n \neq p \end{cases}$.
- $\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(px)\ dx = 0$.

Démonstration .

- Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Si $n = p = 0$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(px)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$.

Si $n = p \geqslant 1$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(px)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(2nx))\ dx = \frac{1}{2}\left(2\pi + \left[\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \pi$.

Si $n \neq p$, alors $n - p \neq 0$ et $n + p \neq 0$ (car $n \geqslant 1$ ou $p \geqslant 1$ de sorte que dans tous les cas, $n + p \geqslant 1$) puis

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(px)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-p)x) + \cos((n+p)x)\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-p)x)}{n-p} + \frac{\sin((n+p)x)}{n+p}\right]_{-\pi} \pi = 0.$$

- Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Si $n = p (> 0$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(px)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos(2nx))\ dx = \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \pi$.

Si $n \neq p$, alors $n - p \neq 0$ et $n + p \neq 0$ (car $n + p \geqslant 2$) et donc,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(px)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-p)x) - \cos((n+p)x))\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-p)x)}{n-p} - \frac{\sin((n+p)x)}{n+p}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

- Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Alors, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(px)\ dx = 0$ car la fonction $x \mapsto \cos(nx)\sin(px)$ est impaire. ❑

On peut alors récupérer les coefficients d'un polynôme trigonométrique sous forme trigonométrique de la forme $f : x \mapsto \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx))$.

Théorème 8.

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = 2\pi\alpha_0$ et pour $k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ dx = \pi\alpha_k$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ dx = \pi\beta_k$ et donc aussi

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx \text{ et } \forall k \geqslant 1,\ \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ dx \text{ et } \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ dx.$$

On constate un « désagrément » pour $k = 0$ avec la présence d'un coefficient 2. On unifie les notations en posant $a_k(f) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, y compris $k = 0$. Le coefficients α_0 est alors égal à $\dfrac{a_0(f)}{2}$. Ceci conduit à la définition :

Définition 3. Soit f un polynôme trigonométrique. Les **coefficients de Fourier** (trigonométriques) de f sont définis par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ dx \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ dx.$$

Avec ces notations,

Théorème 9. Soit f un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)).$$

Notons maintenant que

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

Théorème 10.

- La famille $(x \mapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}} \cup (x \mapsto \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\mathbb{C}$-libre.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(x \mapsto \cos(kx))_{0\leqslant k\leqslant n} \cup (x \mapsto \sin(kx))_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E_n.

Démonstration . Pour montrer que la famille $\mathscr{F} = (x \mapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}} \cup (x \mapsto \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\mathbb{R}$-libre, on peut utiliser les calculs d'intégrales du théorème 7. Ils signifient que la famille $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs tous non nuls, orthogonale pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ sur l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques. On sait qu'une telle famille est libre.

Dans le cas complexe, on ne peut plus utiliser la notion de produit scalaire (les produits scalaires complexes n'étant pas aux programmes des classes préparatoires). On utilise alors la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ du paragraphe 1.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $(\beta_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos(kx) + \beta_k\sin(kx)) = 0 &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} + \beta_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right) = 0\\
&\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k + i\beta_k}{2}e^{-ikx} = 0\\
&\Rightarrow \alpha_0 = 0 \text{ et} \forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} = \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} = 0 \text{ (par liberté de } (e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n})\\
&\Rightarrow \alpha_0 = 0 \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!],\ \alpha_k = 0 \text{ (en additionnant les deux égalités) et } \beta_k = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, toute sous-famille finie de la famille $\mathscr{F}$ est libre et donc $\mathscr{F}$ est libre.

On avait une autre manière beaucoup plus efficace de montrer la liberté de la famille $(x \mapsto \cos(kx))_{0\leqslant k\leqslant n} \cup (x \mapsto \sin(kx))_{1\leqslant k\leqslant n}$ en utilisant le théorème 4. Le calcul du début du paragraphe 1.2. montre que $E_n = \text{Vect}\left((x \mapsto \cos(kx))_{0\leqslant k\leqslant n} \cup (x \mapsto \sin(kx))_{1\leqslant k\leqslant n}\right)$. Puisque $\dim(E_n) = 2n+1 = \text{card}\left((x \mapsto \cos(kx))_{0\leqslant k\leqslant n} \cup (x \mapsto \sin(kx))_{1\leqslant k\leqslant n}\right)$, la famille $\left((x \mapsto \cos(kx))_{0\leqslant k\leqslant n} \cup (x \mapsto \sin(kx))_{1\leqslant k\leqslant n}\right)$ est une base de E_n et en particulier est libre.

❏

On termine cette section par les liens existant entre les $c_k(f)$ d'une part, et les $a_k(f)$ et les $b_k(f)$ d'autre part.

Théorème 11.

$c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $c_k(f) = \dfrac{a_k(f) - ib_k(f)}{2}$ et $c_{-k}(f) = \dfrac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}$.

$a_0(f) = 2c_0(f)$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f)$ et $b_k(f) = i\,(c_k(f) - c_{-k}(f))$.

Démonstration . Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(kx) - i\sin(kx))\,dx = \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2} \quad \text{(I)}$$

et

$$c_{-k}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(kx) + i\sin(kx))\,dx = \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2} \quad \text{(II)}.$$

Enfin, (I) + (II) fournit $a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f)$ et $i((\text{I}) - (\text{II}))$ fournit $b_k(f) = i\,(c_k(f) - c_{-k}(f))$.

❏

2 Séries trigonométriques

2.1 Définition

Définition 4. On se donne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres complexes. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_0(x) = \dfrac{a_0}{2}$ et pour $n \geqslant 1$, on pose pour tout réel x, $f_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$.
La série trigonométrique associée aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$.

En cas de convergence pour un réel x_0 donné, la somme f de la série trigonométrique est définie en x_0 par :

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0)).$$

Un polynôme trigonométrique est un cas particulier de somme de série trigonométrique.

La définition est un peu plus délicate dans le cas de séries sous forme exponentielle.

DÉFINITION 5. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. On dit que la série trigonométrique sous forme exponentielle associée à la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge en $x \in \mathbb{R}$ donné si et seulement si la suite $\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On écrit dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$.

On prendra garde au fait que cette définition de la convergence n'entraîne pas la convergence des deux suites $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=-n}^{-1} c_k e^{ikx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple, si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $u_n = \begin{cases} -1 \text{ si } n < 0 \\ 0 \text{ si } n = 0 \\ 1 \text{ si } n > 0 \end{cases}$, alors la suite $\left(\sum_{k=-n}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle et est donc convergente bien que les séries de termes généraux respectifs u_k, $k \geqslant 0$, et u_{-k}, $k \geqslant 0$, soient grossièrement divergentes. Par contre, la convergence de la suite $\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ équivaut à la convergence de la suite $\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (où les a_k, b_k et c_k sont liés par les relations du théorème 11).

2.2 Périodicité

La liste des propriétés de la somme éventuelle d'une série trigonométrique est très réduite dans le cas général. Il y en a essentiellement une, immédiate :

Théorème 12. La somme d'une série trigonométrique est 2π-périodique.

Analysons davantage ce résultat. La fonction f_0 est constante et admet donc n'importe quel réel pour période. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est $\frac{2\pi}{n}$-périodique et $T_n = \frac{2\pi}{n}$ est la plus petite période strictement positive de la fonction f_n (si $(a_n, b_n) \neq (0, 0)$). La fréquence correspondante est $F_n = \frac{1}{T_n} = \frac{n}{2\pi}$. Cette fréquence est un multiple entier de la fréquence $F_1 = 2\pi$ qui est la fréquence de la fonction f_1. C'est la fonction f_1 (si elle est non nulle) qui donne la période à l'ensemble.

2.3 Convergence normale

Soient $(a, b, \omega) \in \mathbb{R}^2$ puis $f : t \mapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$. On sait qu'il existe un réel φ tel que,

$$t \in \mathbb{R},\ a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\omega t + \varphi).$$

On en déduit immédiatement que $\|f\|_\infty = \sqrt{a^2 + b^2}$. Donc :

Théorème 13. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. On pose pour tout réel x, $f_0(x) = \frac{a_0}{2}$ puis, pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

La série trigonométrique de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la série numérique de terme général $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge.

Dans le cas général (a_n et b_n complexes), on peut donner, sans effectuer trop de travail, une condition suffisante de convergence normale. Par exemple, si la série numérique de terme général $|a_n| + |b_n|$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, la série de fonction de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| = |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leqslant |a_n| + |b_n|$.
Une conséquence de la convergence normale est que, puisque chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

2.4 Récupération des coefficients

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f_0(x) = \dfrac{a_0}{2}$ et pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. Supposons par exemple que la série numérique de terme général $|a_n| + |b_n|$ converge. Alors, la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ et en particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions de terme général $x \mapsto (a_n \cos(nx) + b_n \cos(nx)) \cos(kx)$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-\pi, \pi]$, $|(a_n \cos(nx) + b_n \cos(nx)) \cos(kx)| \leqslant |a_n| + |b_n|$). On peut donc intégrer terme à terme (en posant pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$) et on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\ dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\ dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx)\ dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx)\ dx \right).$$

D'après le théorème 7, cette expression vaut πa_0 si $k = 0$ et πa_k, si $k \geqslant 1$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\ dx$.

On montre de la même façon que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\ dx$.

De même, si pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ et si on peut intégrer terme à terme, on retrouve : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\ dx$. Ceci doit suffire à motiver la définition des coefficients de Fourier dans la section suivante.

3 Coefficients de Fourier d'une fonction c.p.m et 2π-périodique

3.1 Définition des coefficients de Fourier

Définition 6. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, à valeurs réelles ou complexes.

Les coefficients de Fourier de f sous forme trigonométrique sont :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\ dx \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\ dx.$$

Les coefficients de Fourier de f sous forme exponentielle sont :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\ dx.$$

3.2 Le lemme de Lebesgue

Théorème 14. Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors, $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x)\ dx = 0$, $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x)\ dx = 0$ et $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x}\ dx = 0$.

Démonstration. Soit $\lambda > 0$. $\displaystyle\int_a^b e^{i\lambda x}\ dx = \frac{1}{i\lambda} \left(e^{i\lambda b} - e^{i\lambda b} \right)$ puis $\left| \displaystyle\int_a^b e^{i\lambda x}\ dx \right| = \dfrac{1}{\lambda} \left| e^{i\lambda b} - e^{i\lambda b} \right| \leqslant \dfrac{2}{\lambda}$.

Donc, $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b e^{i\lambda x}\ dx = 0$ puis en prenant les parties réelles et imaginaires, $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \cos(\lambda x)\ dx = 0$ et $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \sin(\lambda x)\ dx = 0$.

Le lemme de Lebesgue est vrai pour la fonction $f : x \mapsto 1$. Par linéarité, le lemme de Lebesgue est vrai pour les fonctions constantes, puis, grâce à la relation de Chasles, le lemme de Lebesgue est vrai pour les fonctions constantes par morceaux c'est-à-dire les fonctions en escaliers.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe g_ε, en escaliers sur $[a, b]$, telle que $\|f - g_\varepsilon\|_\infty \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Pour $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x}\ dx \right| &\leqslant \int_a^b |f(x) - g_\varepsilon(x)|\ dx + \left| \int_a^b g_\varepsilon(x) e^{i\lambda x}\ dx \right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_a^b g_\varepsilon(x) e^{i\lambda x}\ dx \right|. \end{aligned}$$

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

Puisque g_ε est en escalier sur $[a,b]$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, $\left|\int_a^b g_\varepsilon(x)e^{i\lambda x}\ dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, on a $\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\ dx\right| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\ dx = 0$ puis en prenant les parties réelles et imaginaires, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\ dx = 0$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\ dx = 0$.

❑

Dans le cas où la fonction f est de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut donner une démonstration plus brève à l'aide d'une intégration par parties. Pour $\lambda > 0$,

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\ dx\right| = \left|\left[\frac{1}{i\lambda}f(x)e^{i\lambda x}\right]_a^b - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(x)e^{i\lambda x}\ dx\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\ dt\right).$$

Cette inégalité et le théorème des gendarmes montrent que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\ dx = 0$.

3.3 Propriétés des coefficients de Fourier

3.3.1 Comportement asymptotique

Le lemme de Lebesgue fournit immédiatement

Théorème 15. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n(f) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n(f) = 0$ et $\lim\limits_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0$.

3.3.2 Linéarité

Par linéarité de l'intégration, on a immédiatement

Théorème 16. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(\lambda f + \mu g) = \lambda a_n(f) + \mu a_n(g),\ b_n(\lambda f + \mu g) = \lambda b_n(f) + \mu b_n(g),\ c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g).$$

⇛ **Commentaire**. *Les applications* $a_n : f \mapsto a_n(f)$, $b_n : f \mapsto b_n(f)$ *et* $c_n : f \mapsto c_n(f)$ *sont donc des formes linéaires sur l'espace vectoriels des fonctions continues par morceaux et* 2π*-périodiques sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

3.3.3 Utilisation de la périodicité

Les fonctions $x \mapsto f(x)\cos(nx)$, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ et $x \mapsto f(x)e^{inx}$ étant 2π-périodiques, on a

Théorème 17. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos(nx)\ dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin(nx)\ dx$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)e^{inx}\ dx$.

Ainsi, par exemple, on a aussi $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\ dx$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\ dx$ et $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\ dx$.

3.3.4 Utilisation de la parité

Si f est paire, alors $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et si f est impaire, alors $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est impaire et $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est paire. Donc,

Théorème 18. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$.

Si f est impaire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx$.

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

3.3.5 Relations entre $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_n(f)$

On sait déjà que :

Théorème 19. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$a_0(f) = 2c_0(f)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{i}\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n(f) = \dfrac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$ et $c_{-n}(f) = \dfrac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}$.

3.3.6 Cas des fonctions de classe C^k

On sait déjà que si f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et en particulier de classe C^0 sur $\mathbb{R}$, on a $a_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, $b_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ et $c_n(f) \underset{n\to\pm\infty}{=} o(1)$.

On suppose maintenant que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Des intégrations par parties fournissent des relations entre les coefficients de Fourier de f et ceux de f' (on rappelle que si f est 2π-périodique, alors f' est 2π-périodique).

Théorème 20. Soit f une fonction continue de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f') = nb_n(f)$ et $b_n(f') = -na_n(f)$.
$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = -inc_n(f)$.

Démonstration .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque f' est définie et continue sur le segment $[a, b]$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} a_n(f') &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\left([f(x)\cos(nx)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x)(-n\sin(nx))\ dx\right) \\ &= \frac{f(2\pi) - f(0)}{\pi} + n \times \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\ dx \\ &= nb_n(f) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(f') &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\left([f(x)\sin(nx)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x)(n\cos(nx))\ dx\right) \\ &= -na_n(f). \end{aligned}$$

Ensuite, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{inx}\ dx = \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(x)e^{inx}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x)\left(ine^{inx}\right)\ dx\right) \\ &= \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} - in \times \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\ dx \\ &= -inc_n(f). \end{aligned}$$

❑

Ainsi, si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors $a_n(f) = -\dfrac{b_n(f')}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $b_n(f) = \dfrac{a_n(f')}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

De même, $c_n(f) = -\dfrac{c_n(f')}{in} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Par récurrence, on obtient

Théorème 21. Soit f une fonction de classe C^k sur $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, et 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors, $a_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$, $b_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ et $c_n(f) \underset{n\to\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$.

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

4 Séries de Fourier

4.1 Définitions des séries de Fourier

Définition 7. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, à valeurs réelles ou complexes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le n-ème polynôme de Fourier sous forme trigonométrique de la fonction f est

$$S_n(f) \ : \ x \mapsto \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\right).$$

Le n-ème polynôme de Fourier sous forme exponentielle de la fonction f est

$$S_n(f) \ : \ x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}.$$

Dans les deux cas, la série de Fourier de f est la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$.

Les pages qui suivent ont pour but d'établir que, sous certaines conditions, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et qu'en tout réel x_0, sa somme est $\dfrac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2}$ où $f\left(x_0^+\right) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ et $f\left(x_0^-\right) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$.

4.2 La formule de Dirichlet

On travaille sous forme trigonométrique. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\cos(kx)\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt + \sin(nx)\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\ dt\right)\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt)\right) f(t)\ dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-t))\right) f(t)\ dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} C_n(x-t)f(t)\ dt
\end{aligned}$$

où pour tout u et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n(u) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos(ku)$. On poursuit :

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} C_n(x-t)f(t)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_x^{x-2\pi} C_n(u)f(x-u)\ (-du)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x-2\pi}^{x} C_n(u)f(x-u)\ du\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C_n(u)f(x-u)\ du \text{ (par } 2\pi-\text{périodicité)}\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} C_n(u)f(x-u)\ du + \int_0^{\pi} C_n(u)f(x-u)\ du\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{\pi}^{0} C_n(-v)f(x+v)\ (-dv) + \int_0^{\pi} C_n(u)f(x-u)\ du\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} C_n(v)f(x+v)\ dv + \int_0^{\pi} C_n(u)f(x-u)\ du\right) \text{ (par parité de } C_n)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} C_n(u)(f(x+u) + f(x-u))\ du.
\end{aligned}$$

On note alors que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} C_n(u)\ du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\ du + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\cos(ku)\ du = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(ku)}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} C_n(u)(f(x+u)+f(x-u))\ du - \left(f(x^+)+f(x^-)\right)\times\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} C_n(u)\ du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} C_n(u)\left(f(x+u)+f(x-u)-f(x^+)-f(x^-)\right)\ du. \end{aligned}$$

Calculons maintenant explicitement $C_n(u)$ pour $u \in]0,\pi]$:

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{u}{2}\right)C_n(u) &= \sin\left(\frac{u}{2}\right)+\sum_{k=1}^{n}2\cos(ku)\sin\left(\frac{u}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{u}{2}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)u\right)-\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{u}{2}\right)+\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)-\sin\left(\frac{u}{2}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &= \sin\left(\frac{(2n+1)u}{2}\right). \end{aligned}$$

et donc, pour tout $u \in]0,\pi]$ (de sorte que $\sin\left(\frac{u}{2}\right) \neq 0$), $C_n(u) = \dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)u}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$ (et $C_n(0) = n+\frac{1}{2}$. On obtient la formule de Dirichlet :

Théorème 22. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(f)(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{(2n+1)u}{2}\right)\frac{f(x+u)+f(x-u)-f(x^+)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}.$$

4.3 Le théorème de Dirichlet

Pour $u \in]0,\pi]$, on pose $g(u) = \dfrac{f(x+u)+f(x-u)-f(x^+)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$. g est déjà continue par morceaux sur $]0,\pi]$. On essaie maintenant de dégager une condition suffisante pour que g se prolonge en une fonction continue par morceaux sur $[0,\pi]$.

Quand, u tend vers 0 par valeurs strictement positive, le numérateur de la fraction tend $f(x^+)+f(x^-)-f(x^+)-f(x^-) = 0$. Le dénominateur quant à lui est équivalent à u. On impose à f une condition qui permet d'obtenir au numérateur un développement limité d'ordre 1. C'est le cas si le prolongement par continuité de $f_{/]x,+\infty[}$ (resp. $f_{/]-\infty,x[}$) admet une dérivée à droite en x (resp. à gauche). En notant abusivement $f'(x^+)$ et $f'(x^-)$ ces dérivées, on a

$$g(u) \underset{u\to 0,\ u>0}{=} \frac{f(x^+)+f'(x^+)u+f(x^-)-f'(x^-)u-f(x^+)-f(x^-)+o(u)}{u+o(u)} \underset{u\to 0,\ u>0}{=} f'(x^+)-f'(x^-)+o(1).$$

Dans ce cas, la fonction g est continue par morceaux sur $[0,\pi]$ et le lemme de Lebesgue permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n(f)(x)-\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{(2n+1)u}{2}\right)g(u)\ du = 0.$$

On a obtenu la version locale du théorème de Dirichlet :

Théorème 23. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $f_{/]x,+\infty[}$ se prolonge par continuité en x (par $f(x^+)$) et que ce prolongement dérivable à droite en x et que $f_{/]-\infty,x[}$ se prolonge par continuité en x (par $f(x^-)$) et que ce prolongement dérivable à gauche en x.

Alors, la série de Fourier de f en x converge vers $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

Théorème 24. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable à droite et à gauche en x.

Alors, la série de FOURIER de f en x converge vers $f(x)$.

Dans le but de donner une version globale du théorème de DIRICHLET, on a besoin de la définition suivante :

DÉFINITION 8. Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

f est de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{]x_k, x_{k+1}[}$ est de classe C^1 et se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est de classe C^1 par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Théorème 25. Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour tout réel x, la série de FOURIER de f en x converge vers $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

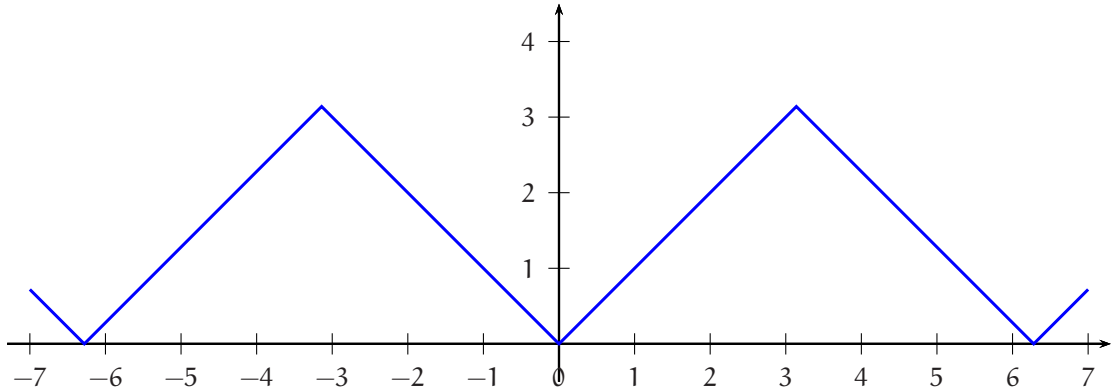
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour tout réel x, la série de FOURIER de f en x converge vers $f(x)$ ou encore la série de FOURIER de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

⇛ **Commentaire**. *Les différentes conditions imposées à f ne sont pas anecdotiques et dans la pratique, on rencontre tous ces types de condition. Par exemple, en physique, un signal carré est discontinu et un signal triangulaire est continu mais n'est pas dérivable en certains points.*

4.4 Un exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique telle que pour tout réel x de $[0, \pi]$, $f(x) = x$. Voici son graphe :



f est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Puisque f est paire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\ dx.$$

Ensuite, $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\ dx = \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{\pi^2}{2} = \pi$ et pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\ dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\ dx\right) = -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi}. \end{aligned}$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, la série de FOURIER de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Ceci fournit pour tout réel x,

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2}\cos(nx)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}\cos((2p+1)x)$$

En particulier,

$$\forall x \in [0, \pi],\ \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}\cos((2p+1)x) = x.$$

Pour $x = 0$, on obtient $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = 0$ et donc $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Mais alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5 L'aspect préhilbertien des séries de Fourier

Nous ne parlerons dans cette section que du cas réel (la notion de produit scalaire complexe n'étant pas au programme des classes préparatoires).

5.1 L'espace préhilbertien $(D, \langle\ ,\ \rangle)$

5.1.1 Le choix du bon espace

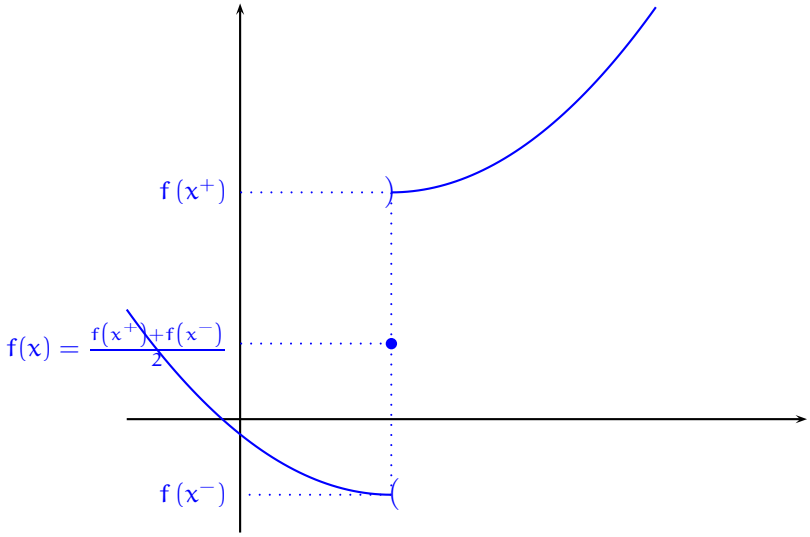
Le produit scalaire qui va être utilisé est $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$. Si on se place sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, $\langle\ ,\ \rangle$ est effectivement un produit scalaire. On veut élargir à des fonctions continues par morceaux et plus nécessairement continues. Mais sur cet espace, $\langle\ ,\ \rangle$ n'est plus un produit scalaire car $\langle f, f\rangle = 0$ n'entraine plus $f = 0$. Néanmoins, l'égalité $\langle f, f\rangle = 0$ entraine que f est nulle sur $[0, 2\pi]$ sauf peut-être en le nombre fini de points de discontinuité de f. En particulier, f admet en tout point une limite à gauche et une limite à droite qui est nulle.

Si cette fonction f vérifie de plus la condition : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, alors f est également nulle en ses éventuels points de discontinuité.

On note donc D (initiale de Dirichlet) l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, à valeurs réelles telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. On montre facilement que D est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et c'est l'espace vectoriel sur lequel on travaillera dans ce paragraphe.

La condition : $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ est illustré par le graphique :

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.



5.1.2 Le produit scalaire $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$.

Théorème 26. Pour $(f,g) \in D^2$, on pose $\langle f,g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$.

Alors, $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur D.

Démonstration . La bilinéarité, la symétrie et la positivité sont claires. Soit alors $f \in D$ telle que $\langle f,f\rangle = 0$. Soit $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < 2\pi = x_n$ une subdivision adaptée à f.

$$\begin{aligned}\langle f,f\rangle = 0 &\Rightarrow \int_0^{2\pi} (f(t))^2\ dt = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t))^2\ dt = 0\\ &\Rightarrow \forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t))^2\ dt = 0 \text{ (réels positifs de somme nulle)}\\ &\Rightarrow \forall k \in [\![0,n-1]\!],\ f_{]x_k,x_{k+1}[} = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle).}\end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, $f(x_k) = \dfrac{1}{2}\left(f\left(x_k^+\right) + f\left(x_k^-\right)\right) = 0$ puis $f(0) = \dfrac{1}{2}\left(f\left(0^+\right) + f\left(0^-\right)\right) = \dfrac{1}{2}\left(f\left(0^+\right) + f\left(2\pi^-\right)\right) = 0$ et de même $f(2\pi) = 0$. f est donc nulle sur $[0,2\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

Ceci montre que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur D.

❑

On note dorénavant $\|\ \|_2$ la norme associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

5.1.3 Une famille orthonormée de l'espace préhilbertien $(D, \langle\ ,\ \rangle)$.

On note c_0 la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note c_n la fonction $x \mapsto \cos(nx)$ et s_n la fonction $x \mapsto \sin(nx)$ (la notation c_n ne désigne donc plus dans ce paragraphe, le coefficient de Fourier sous forme exponentielle). Les calculs d'intégrales du théorème 7, page 3, montre déjà que la famille $(c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, s_1, s_2, s_3, \ldots)$ est une famille orthogonale de l'espace $(D, \langle\ ,\ \rangle)$. De plus, $\|c_0\|^2 = \dfrac{1}{2}\langle 1,1\rangle = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\|c_n\|^2 = \|s_n\|^2 = 1$. Donc,

$$\text{la famille } (c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, s_1, s_2, s_3, \ldots) \text{ est une famille orthonormale de } (D, \langle\ ,\ \rangle).$$

Les coefficients de Fourier de f ont alors une interprétation préhilbertienne. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt = \langle f, c_n\rangle \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\ dt = \langle f, s_n\rangle.$$

D'autre part, $a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\ dt = \sqrt{2}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ dt = \sqrt{2}\langle f, c_0\rangle$ ou aussi $\langle f, c_0\rangle = \dfrac{a_0(f)}{\sqrt{2}}$.

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

5.2 La formule de Parseval.

5.2.1 Polynôme trigonométrique de meilleure approximation quadratique. Inégalité de Bessel.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $E_n = \text{Vect}\,(c_0, c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n)$. E_n est un sous-espace vectoriel de D de dimension finie égale à $2n+1$. Notons P_{E_n} la projection orthogonale sur E_n (qui est parfaitement définie d'après le théorème de la projection orthogonale puisque E_n est de dimension finie).

Soit f un élément de D. Déterminons le projeté orthogonale de f sur E_n :

$$\begin{aligned} P_{E_n}(f) &= \langle f, c_0\rangle c_0 + \sum_{k=1}^{n} \langle f, c_k\rangle c_k + \sum_{k=1}^{n} \langle f, s_k\rangle s_k \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)c_k + b_k(f)s_k\right) = S_n(f) \end{aligned}$$

où $S_n(f)$ est le n-ème polynôme de Fourier de f. Le théorème de la projection orthogonale fournit alors les divers résultats qui suivent

Théorème 27. Soient $f \in D$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E_n = \text{Vect}\,(c_0, c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n)$.

1) $P_{E_n}(f) = S_n(f)$ où $S_n(f)$ est le n-ème polynôme de Fourier de f.

2) Pour tout polynôme trigonométrique P de degré au plus n, $\|f - S_n(f)\| \leqslant \|f - P\|$.

On a l'habitude dire que le n-ème polynôme de Fourier de f réalise le minimum de l'écart quadratique moyen de f à un polynôme trigonométrique de degré au plus n.

Explicitons $\|S_n(f)\|$. Puisque la famille $(c_0, c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n)$ est une base orthonormée de $(F_n, \langle\ ,\ \rangle)$ et que $S_n(f) = \langle f, c_0\rangle c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\langle f, c_k\rangle c_k + \langle f, s_k\rangle s_k\right)$, on sait que

$$\begin{aligned} \|S_n(f)\|^2 &= \langle f, c_0\rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\langle f, c_k\rangle^2 + \langle f, s_k\rangle^2\right) \\ &= \frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left((a_k(f))^2 + (b_k(f))^2\right). \end{aligned}$$

Mais alors, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|^2 &= \|f\|^2 - \|P_{F_n}(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2 \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2\ dx - \left(\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left((a_k(f))^2 + (b_k(f))^2\right)\right), \end{aligned}$$

et donc,

Théorème 28. Soit $f \in D$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left((a_k(f))^2 + (b_k(f))^2\right) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2\ dx \text{ (inégalité de Bessel).}$$

En particulier, les suites $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont de carré sommable.

Remarque. On ne peut donc pas trouver de fonction $f \in D$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ou encore $\sum \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ n'est pas une série de Fourier.

5.2.2 La formule de Parseval.

On va maintenant démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$. On a à peu près de quoi démontrer ce résultat si on suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$ et on admet le résultat dans le cas général. Supposons donc f continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On admet (mais ce n'est pas très difficile à démontrer) que le théorème d'approximation de Weierstrass

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

permet de construire une suite de polynômes trigonométriques $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers la fonction f sur le segment $[0, 2\pi]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier N tel que P_n soit dans F_N. Mais alors

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leqslant \|f - P_n\|_2 \leqslant \sqrt{\frac{1}{\pi} \times 2\pi \|f - P_n\|_\infty^2} = \sqrt{2}\,\|f - P_n\|_\infty .$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $\sqrt{2}\,\|f - P_{n_0}\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Soit N_0 un entier tel que $P_{n_0} \in F_{N_0}$. On a donc $\|f - S_{N_0}(f)\|_2 \leqslant \varepsilon$. Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset F_{n+1}$ et donc

$$\|f - S_{n+1}(f)\|_2 = d(f, E_{n+1}) \leqslant d(f, E_n) = \|f - S_n(f)\|_2 .$$

La suite $(\|f - S_n(f)\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Par suite, pour $n \geqslant N_0$, $\|f - S_n(f)\|_2 \leqslant \|f - S_{N_0}(f)\|_2 \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_0 \Rightarrow \|f - S_n(f)\|_2 \leqslant \varepsilon)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$. Ceci fournit :

Théorème 29. Soient $f \in D$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2\, dx = \frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2\right) \text{ (égalité de Parseval).}$$

⇛ **Commentaire** .

◇ *On peut aussi démontrer que* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ *(qui est une autre version de l'égalité de* Parseval*).*

◇ *Le résultat peut se réénoncer en disant que la famille orthonormée* $(c_0, c_1, c_2, \ldots, s_1, s_2, \ldots)$ *est une famille totale de l'espace* $(D, \langle\ ,\ \rangle)$.

Exemple. On reprend l'exemple de la page 12 avec la fonction f, paire et 2π-périodique, telle que pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(x) = x$. Par parité et 2π-périodicité,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

D'autre part,

$$\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2\right) = \frac{\pi^2}{2} + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

D'après la formule de Parseval,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right)\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Ensuite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96}$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \times \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

❑

5.2.3 Quelques conséquences.

Théorème 30.

1) Soit $f \in D$. $f = 0 \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 0)$.

2) Soit $(f, g) \in D^2$. $f = g \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = a_n(g)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = b_n(g))$.

Démonstration . **1)** $\Rightarrow$ est claire. Inversement, supposons que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 0$, alors d'après la formule de Parseval, $\|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx = 0$ puis $f = 0$ car $f \in D$.

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

2) Le résultat se déduit de 1) par linéarité car $a_n(f) - a_n(g) = a_n(f-g)$ et $b_n(f) - b_n(g) = b_n(f-g)$.

❑

Théorème 31. Soit $f \in D$. Si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors la série de FOURIER de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n(f)| = \dfrac{|b_n(f')|}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2} + (b_n(f'))^2\right)$. D'après ce qui précède, la série numérique de terme général $(b_n(f'))^2$ converge (car f' est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique) et donc la série de terme général $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2} + (b_n(f'))^2\right)$ converge. On en déduit que la série de terme général $a_n(f)$ est absolument convergente. De même, la série numérique de terme général $b_n(f)$ est absolument convergente.

Puisque pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, $|a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)| \leqslant |a_n(f)| + |b_n(f)|$, la série de fonctions de terme général $x \mapsto a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

❑

⇛ **Commentaire .** *On peut démontrer que le résultat persiste si on suppose f continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.*

6 Généralisation aux fonctions T-périodiques

Soit $T \neq 0$ puis f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. La fonction $g : x \mapsto f\left(\dfrac{T}{2\pi}x\right)$ est 2π-périodique. Ses coefficients de FOURIER s'écrivent

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos(nt)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)\cos(nt)\ dt \text{ et } b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)\sin(nt)\ dt.$$

En posant, $x = \dfrac{T}{2\pi}t$, on obtient $a_n(g) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\ dx$ et $b_n(g) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\ dx$. On pose donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\ dx \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\ dx.}$$

Le théorème de DIRICHLET s'écrit alors avec les mêmes hypothèses (en remplaçant 2π-périodique par T-périodique)

$$\begin{aligned}\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{g\left(\frac{2\pi x}{T}^+\right) + g\left(\frac{2\pi x}{T}^-\right)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\ dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos(nt)\ dt\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin(nt)\ dt\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\right)\\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\right).\end{aligned}$$

Ainsi, avec les hypothèses du théorème de DIRICHLET, en remplaçant 2π-périodique par T-périodique,

$$\boxed{\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\right).}$$

La formule de PARSEVAL s'écrit quand à elle

$$\boxed{\frac{2}{T}\int_0^T (f(x))^2\ dx = \frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2\right).}$$

© Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.