

FICHE n° 7. CALCULS AVEC DES FRACTIONS.

Théorème 1

Egalité de deux fractions. Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } ad = bc.$$

Théorème 2

Simplification des fractions. Pour tous nombres réels a, b et c tels que $b \neq 0$ et $c \neq 0$,

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}.$$

Par exemple, $\frac{24}{36} = \frac{2 \times 12}{3 \times 12} = \frac{2}{3}$.

Théorème 3

Multiplication des fractions. Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

En particulier, pour tous réels a, b et c tels que $b \neq 0$,

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}.$$

« Tout ce qui est au même niveau se multiplie ».

Par exemple, $\frac{2}{3} \times 9 \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{25} = \frac{2 \times 9 \times 5}{3 \times 4 \times 25} = \frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}$.

Théorème 4

Inverse d'une fraction. Pour tous nombres réels a et b tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$,

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

L'inverse d'une fraction est la fraction inversée.

Théorème 5

Division des fractions. Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que $b \neq 0, c \neq 0$ et $d \neq 0$,

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Diviser par une fraction, c'est multiplier par l'inverse de cette fraction.

En particulier,

Théorème 6

Pour tous réels a, b et c tels que $b \neq 0$ et $c \neq 0$,

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b} \text{ et } \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}.$$

Diviser par un nombre, c'est multiplier par l'inverse de ce nombre.

Par exemple, $\frac{3}{\frac{5}{3}} = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$ alors que $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$

Théorème 7

Addition des fractions. Pour tous nombres réels a , b et c tels que $c \neq 0$,

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

On peut additionner des fractions de même dénominateur.

Quand les fractions à additionner n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les **réduire au même dénominateur** en multipliant le numérateur et le dénominateur de chaque fraction par un même nombre de manière à obtenir des dénominateurs égaux.

Exemple 1. On veut calculer $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{5}{6}$. On met toutes les fractions sur 12 qui est un multiple à la fois de 3, de 4 et de 6 (le plus petit possible) :

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} - \frac{1 \times 3}{4 \times 3} + \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} + \frac{10}{12} = \frac{8-3+10}{12} = \frac{15}{12} = \frac{3 \times 5}{3 \times 4} = \frac{5}{4}.$$

Exemple 2. Pour tout réel x différent de -1 et de 1 ,

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)(x+1)} = -\frac{2}{(x-1)(x+1)}.$$