Planche n° 7. Espaces euclidiens. Corrigé

Exercice n° 1

La matrice H_n est symétrique réelle. Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X^T H_n X = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{i+j-1}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_i x_j}{i+j-1} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j t^{i+j-2}\right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2 dt \geqslant 0.$$

De plus, si $X \neq 0$, le polynôme $\sum_{i=1}^{n} x_i Y^{i-1}$ n'est pas le polynôme nul. Puisqu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines, la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2$ est continue positive et non nulle sur $[0,1]$ et on en déduit que

$$^tXH_nX = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2 dt > 0.$$

On a montré que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T H_n X > 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la matrice } H_n \text{ est symétrique définie positive.}}$$

Exercice n° 2

1) $S^T = \left(A^T A\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T = A^T A = S$. Donc $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T S X = X^T A^T A X = (AX)^T AX = \|AX\|^2 \geqslant 0$. Donc $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A^T A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

2) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe P dans $O_n(\mathbb{R})$ et D dans $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^T$.
Posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Puisque S est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, D est dans $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ (et donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$) et on peut poser $\Delta = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ de sorte que $\Delta^2 = D$. On peut alors écrire

$$S = PDP^T = P\Delta^T \Delta P^T = \left(\Delta P^T\right)\left(\Delta P^T\right),$$

et la matrice $A = \Delta P^T$ convient.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) /\ S = A^T A.}$$

Si $A = 0$, pour $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $B^T B = A^T A \Rightarrow B^T B = 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}\left(B^T B\right) = 0 \Rightarrow \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{i,j}^2 = 0 \Rightarrow B = 0$.

Donc, si $A = 0$, $\left(A^T A = B^T B \Rightarrow A = B\right)$.
Si $A \neq 0$, on a aussi $(-A)^T(-A) = S$ avec $-A \neq A$. Donc, si $A \neq 0$, $\left(A^T A = B^T B \not\Rightarrow A = B\right)$.

3) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $S = A^T A$.

$$\begin{aligned} S \text{ définie positive} &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^T S X > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \|AX\|_2^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ AX \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A) = \{0\} \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

4) Montrons que les matrices A et S ont même noyau. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A) \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow A^T AX = 0 \Rightarrow SX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker}(S),$$

et

$$X \in \mathrm{Ker}(S) \Rightarrow A^TAX = 0 \Rightarrow X^TA^TAX = 0 \Rightarrow (AX)^TAX = 0 \Rightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker}(A).$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}\left(A^TA\right) = \mathrm{Ker}(A)$ et en particulier, grâce au théorème du rang, on a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}\left(A^TA\right) = \mathrm{rg}(A).}$$

5) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Existence. D'après le théorème spectral, il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D_0 \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S = P_0D_0P_0^T$.

Posons $D_0 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des réels positifs puis $\Delta_0 = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ et enfin $R = P_0\Delta_0P_0^T$. La matrice R est orthogonalement semblable à une matrice de $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ et est donc un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Puis

$$R^2 = P_0\Delta_0^2P_0^2 = P_0D_0P_0^2 = S.$$

Unicité. Soit M un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = S$.

M est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)}{\oplus} E_M(\lambda)$ (et aussi $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\mu \in \mathrm{Sp}(S)}{\oplus} E_S(\mu)$).

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \in E_\lambda(M) \Rightarrow MX = \lambda X \Rightarrow M^2X = \lambda^2X \Rightarrow X \in E_{\lambda^2}(S)$ et donc $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \mathrm{Ker}\left(S - \lambda^2 I_n\right) = E_{\lambda^2}(S)$. De plus, les valeurs propres de M étant positive, les λ^2, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts ou encore les $\mathrm{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts.

En tenant compte de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)}{\oplus} E_M(\lambda) = \underset{\mu \in \mathrm{Sp}(S)}{\oplus} E_S(\mu)$, ceci montre que pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $E_\lambda(M) = E_{\lambda^2}(S)$ et que les λ^2, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, sont toutes les valeurs propres de S.

Ainsi, nécessairement la matrice $P_0^TMP_0$ est une matrice diagonale D. L'égalité $M^2 = S$ fournit $D^2 = D_0$ puis $D = \Delta_0$ (car $D \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$) et finalement $M = R$.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists! R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) /\ R^2 = S.}$$

Exercice n° 3

1 ère solution. Soit $p \geqslant 2$. Montrons que si la famille $(x_1, ..., x_p)$ est obtusangle alors la famille $(x_1, ..., x_{p-1})$ est libre.

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille obtusangle. Supposons que la famille $(x_1, \dots, x_{p-1})$ soit liée.

Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k = 0$.

Quite à multiplier les deux membres de l'égalité par -1, on peut supposer que l'un des λ_i au moins est strictement positif.
On pose $I = \{k \in [\![1, p-1]\!] /\ \lambda_k > 0\}$ et $J = \{k \in [\![1, p-1]\!] /\ \lambda_k \leqslant 0\}$ (éventuellement J est vide).

Si J est vide, il reste $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ et si J est non vide,

$$\left\|\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right\|^2 = -\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{j \in J} \lambda_j x_j\right) = -\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i\lambda_j\,(x_i|x_j) \leqslant 0 \text{ (car } \forall (i,j) \in I \times J,\ (x_i|x_j) < 0 \text{ et } \lambda_i\lambda_j \leqslant 0).$$

Ainsi, dans tous les cas, $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. Mais ceci est impossible car $\displaystyle\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right)|x_p = \sum_{i \in I} \lambda_i\,(x_i|x_p) < 0$.

On a montré que la famille $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est libre et on en déduit que $p - 1 \leqslant n$ ou encore $p \leqslant n + 1$.

2ème solution. Montrons par récurrence sur $n = \dim(E) = n \geqslant 1$ que toute famille obtusangle d'un espace E de dimension n, a un cardinal inférieur ou égal à $n + 1$.

- Pour $n = 1$, soit $(E, |\ )$ un espace euclidien de dimension 1. Soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de E. On peut identifier ces vecteurs à des réels. Deux des trois réels x_1, x_2 ou x_3 ont même signe et on ne peut donc avoir $x_1x_2 < 0$ et $x_1x_3 < 0$ et $x_2x_3 < 0$.
Une famille obtusangle de $(E, |\ )$ a donc un cardinal inférieur ou égal à 2.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n + 1$. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille obtusangle d'un espace euclidien $(E, |\ )$ de dimension $n + 1$.
Si $p = 1$ alors $p \leqslant n + 2$. Supposons dorénavant $p \geqslant 2$.

On va construire à partir de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ une famille obtusangle de cardinal $p-1$ d'un espace euclidien de dimension n.
Soit $H = x_p^{\perp}$. Puisque la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est obtusangle, le vecteur x_p n'est pas nul et H est un espace euclidien de dimension n.
On note y_1, y_2, ..., y_{p-1} les projetés orthogonaux des vecteurs x_1, ..., x_{p-1} sur H. On sait que

$$\forall i \in [\![1, p-1]\!],\ y_i = x_i - \frac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2}x_p.$$

Soit $(i, j) \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $i \neq j$.

$$(y_i|y_j) = (x_i|x_j) - 2\frac{(x_i|x_p)\,(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i|x_p)\,(x_j|x_p)\,\|x_p\|^2}{\|x_p\|^4} = (x_i|x_j) - \frac{(x_i|x_p)\,(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Ainsi, la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est une famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n et par hypothèse de récurrence $p-1 \leqslant n+1$ et donc $p \leqslant n+2$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Exercice n° 4

Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, l'inégalité est vraie.
Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on peut considérer $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ l'orthonormalisée de SCHMIDT de la famille $(x_1, \dots, x_n)$. Les bases $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}$ sont des bases orthonormées de E et donc $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_0}$ est une matrice orthogonale puis $|\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_0)| = 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|\det{}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)| &= |\det{}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_0)| \times |\det{}_{\mathscr{B}_0}(x_1, \dots, x_n)| = |\det{}_{\mathscr{B}_0}(x_1, \dots, x_n)| \\
&= \text{abs}\left(\begin{vmatrix} (x_1|e_1) & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & (x_n|e_n) \end{vmatrix}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} |(x_k|e_k)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|\|e_k\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ |\det{}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\| \text{ (inégalité de HADAMARD).}}$$

Ensuite,

- si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs x_k est nul
- si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|(x_k|e_k)| = \|x_k\|\,\|e_k\|$. Les cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ étant connus, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, x_k est colinéaire à e_k ou encore si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale.

En résumé, l'inégalité de HADAMARD est une égalité si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale libre ou l'un des vecteurs est nul.

Exercice n° 5

C'est le n° 4.

Exercice n° 6

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1\times a_{i,j}\times 1\right| = \left|U^T AU\right| = |(AU|U)|$$
$$\leqslant \|AU\|\|U\| \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$
$$= \|U\|^2 \text{ (puisque la matrice } A \text{ est orthogonale)}$$
$$= n.$$

On a l'égalité si et seulement si la famille (U, AU) est liée ce qui équivaut à U vecteur propre de A.
On sait que les valeurs propres (réelles) de A ne peuvent être que 1 ou -1. Donc,

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = n \Leftrightarrow AU = U \text{ ou } AU = -U \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| = 1$$

Il paraît difficile d'améliorer ce résultat dans le cas général. Supposons de plus que $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}\geqslant 0$. Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Puisque tous les $a_{i,j}$ sont éléments de $[0,1]$,

$$1 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1.$$

L'inégalité écrite est donc une égalité et on en déduit que chaque inégalité $a_{i,j}\geqslant a_{i,j}^2$, $1\leqslant j\leqslant n$, est une égalité. Par suite, $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}\in\{0,1\}$. Ceci montre que la matrice A est une matrice de permutation qui réciproquement convient.

Exercice n° 7

1) Soit $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Posons $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Posons encore $A^T = \left(a'_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a'_{j,i} b_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}\right).$$

On reconnaît le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier, $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Déterminons l'orthogonal de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ dans $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle)$. Soit $(A,B)\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\times\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right) = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) = -\mathrm{Tr}\left(B^T A\right) = -\langle B,A\rangle = -\langle A,B\rangle,$$

et donc $2\langle A,B\rangle = 0$ puis $\langle A,B\rangle = 0$. On en déduit que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\subset(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))^\perp$ et comme de plus, $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \dim\left((\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))^\perp\right)$, on a montré que

$$\boxed{(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).}$$

3) Ainsi, la projection orthogonale d'une matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est exactement la partie antisymétrique $p_a(M)$ de M et la distance cherchée est la norme de $M - p_a(M) = p_s(M)$ (partie symétrique de M). Donc,

$$\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ d\left(M,\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\right) = \frac{1}{2}\left\|M + M^T\right\|.$$

Exercice n° 8

La matrice A est symétrique réelle positive. Donc ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels positifs. De plus,

$$\det A = \lambda_1\times\ldots\times\lambda_n \text{ et } \det\left(I_n + A\right) = (1+\lambda_1)\ldots(1+\lambda_n),$$

(car si $P = X+1$, on sait que $\mathrm{Sp}\left(A+I_n\right) = \mathrm{Sp}(P(A)) = \left(P\left(\lambda_1\right),\ldots,P\left(\lambda_n\right)\right) = \left(1+\lambda_1,\ldots,1+\lambda_n\right)$). L'inégalité à démontrer équivaut donc à :

$$\forall\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^n,\ 1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\lambda_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+\lambda_k)}.$$

Soit donc $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Si l'un des λ_k est nul, l'inégalité est immédiate.

Supposons dorénavant tous les λ_k strictement positifs. L'inégalité à démontrer s'écrit

$$\ln\left(1+\exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln(\lambda_1)+\ldots+\ln(\lambda_n)\right)\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(\ln(1+\exp(\ln(\lambda_1))+\ldots+\ln(1+\exp(\ln(\lambda_n)))\right) \quad (*)$$

ou encore $f\left(\frac{1}{n}(x_1+...+x_n)\right) \leqslant \frac{1}{n}(f(x_1)+...+f(x_n))$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^x)$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \ln(\lambda_k)$.
L'inégalité à démontrer est une inégalité de convexité. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1} \text{ puis } f''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \geqslant 0.$$

La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui démontre l'inégalité $(*)$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ 1+\sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n+A)}.}$$

Exercice n° 9

Soit A une matrice orthogonale à coefficients entiers. Puisque les colonnes ou les lignes de A sont unitaires, on trouve par ligne ou par colonne un et un seul coefficient de valeur absolue égale à 1, les autres coefficients étant nuls. A est donc obtenue en multipliant chaque coefficient d'une matrice de permutation par 1 ou -1. Réciproquement, une telle matrice est orthogonale à coefficients entiers.

Il y a $n!$ matrices de permutation et pour chaque matrice de permutation 2^n façons d'attribuer un signe $+$ ou $-$ à chaque coefficient égal à 1. Donc

$$\boxed{\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})) = 2^n n!.}$$

Exercice n° 10

Puisque les matrices $S_1 = {}^tAA$ et $S_2 = A{}^tA$ sont symétriques réelles, ces deux matrices sont à valeurs propres réelles. On sait d'autre part que si M et N sont deux matrices quelconques alors les matrices MN et NM ont même polynôme caractéristique.
Notons alors $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la famille des valeurs propres des matrices S_1 et S_2 et posons $D = \text{diag}(\lambda_1,...\lambda_n)$. D'après le théorème spectral, il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que $S_1 = P_1DP_1^T$ et $S_2 = P_2DP_2^T$. Mais alors

$$S_2 = P_2\left(P_1^TS_1P_1\right)P_2^T = \left(P_2P_1^T\right)S_1\left(P_2P_1^T\right)^T.$$

Comme la matrice $P_2P_1^T$ est orthogonale, on a montré que les matrices S_1 et S_2 sont orthogonalement semblables.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\text{ les matrices } A^TA \text{ et } AA^T \text{ sont orthogonalement semblables.}}$$

Exercice n° 11

Remarque. Il faut prendre garde au fait que le produit de deux matrices symétriques n'est pas nécessairement symétrique. Plus précisément, si A et B sont deux matrices symétriques alors

$$AB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (AB)^T = AB \Leftrightarrow B^TA^T = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

et le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si ces deux matrices commutent. Donc au départ, rien n'impose que les valeurs propres de AB soient toutes réelles .

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. D'après l'exercice n° 2, il existe deux matrices carrées M et N telles que $A = M^TM$ et $B = N^TN$. On a alors $AB = M^TMN^TN$. La matrice AB a même polynôme caractéristique que la matrice $N\left(M^TMN^T\right) = \left(MN^T\right)^T\left(MN^T\right)$. D'après l'exercice n° 2, cette dernière matrice est symétrique positive et a donc des valeurs propres réelles positives. On a montré que les valeurs propres de la matrice AB sont réelles et positives.

$$\boxed{\forall (A,B) \in \left(\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})\right)^2,\ \text{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) \subset \mathbb{R}^+.}$$

Exercice n° 12

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives.

1er cas. Supposons qu'aucune des deux matrices A ou B n'est inversible, alors $\det A + \det B = 0$.
D'autre part, la matrice $A + B$ est symétrique car $(\mathscr{S}_n(R), +, .)$ est un espace vectoriel et ses valeurs propres sont donc réelles. De plus, pour X vecteur colonne donné, $X^T(A + B)X = X^T AX + X^T BX \geqslant 0$.
La matrice $A + B$ est donc symétrique réelle positive. Par suite, les valeurs propres de la matrice $A + B$ sont des réels positifs et puisque $\det(A + B)$ est le produit de ces valeurs propres, on a $\det(A + B) \geqslant 0 = \det A + \det B$.

2ème cas. Sinon, une des deux matrices A ou B est inversible (et donc automatiquement définie positive). Supposons par exemple A définie positive.

D'après l'exercice n° 2, il existe une matrice inversible M telle que $A = M^T M$. On peut alors écrire $A + B = M^T M + B = M^T \left(I_n + \left(M^{-1}\right)^T BM^{-1}\right) M$ et donc

$$\det(A + B) = (\det(M))^2 \det\left(I_n + \left(M^{-1}\right)^T BM^{-1}\right) = (\det M)^2 \det\left(I_n + C\right)$$

où $C = \left(M^{-1}\right) BM^{-1}$. La matrice C est symétrique, positive car pour tout vecteur colonne X,

$$X^T CX = X^T \left(M^{-1}\right)^T BM^{-1}X = \left(M^{-1}X\right)^T B \left(M^{-1}X\right) \geqslant 0$$

et donc, ses valeurs propres λ_1,..., λ_n sont des réels positifs. Les valeurs propres de la matrice $I_n + C$ sont les réels $1 + \lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et donc

$$\det\left(I_n + C\right) = (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n) \geqslant 1 + \lambda_1 \dots \lambda_n = 1 + \det(C).$$

Maintenant, $\det(A) = (\det(M))^2$ puis $\det(B) = (\det(M))^2 \det(C)$ et donc (en tenant compte de $(\det(M))^2 \geqslant 0$),

$$\det(A) + \det(B) = (\det(M))^2 (1 + \det(C)) \leqslant (\det(M))^2 \det\left(I_n + C\right) = \det(A + B).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (A, B) \in \left(\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})\right)^2,\ \det(A) + \det(B) \leqslant \det(A + B).}$$

Exercice n° 13

Il s'agit de montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien E qui conserve l'orthogonalité est une similitude.

On peut raisonner sur une base orthonormée de E que l'on note $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Par hypothèse, la famille $\left(f\left(e_i\right)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthogonale. De plus, pour $i \neq j$, $\langle e_i + e_j, e_i - e_j\rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$ et donc $\rangle f\left(e_i + e_j\right), f\left(e_i - e_j\right)\rangle = 0$ ce qui fournit $\|f\left(e_i\right)\| = \|f\left(e_j\right)\|$. Soit k la valeur commune des normes des $f\left(e_i\right)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
Si $k = 0$, tous les $f\left(e_i\right)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont nuls. L'endomorphisme f s'annule sur base de E et donc $f = 0$. Dans ce cas, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = 0 \times \|x\|$.
Si $k \neq 0$, l'image par l'endomorphisme $\dfrac{1}{k}f$ de la base othonormée $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. Donc l'endomorphisme $\dfrac{1}{k}f$ est un automorphisme orthogonal de E ou encore l'endomorphisme $\dfrac{1}{k}f$ conserve la norme. Mais alors, pour tout $x \in E$, $\dfrac{1}{k}\|f(x)\| = \|x\|$ ou encore $\|f(x)\| = k\|x\|$.
Dans tous les cas, on a trouvé un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Exercice n° 14

Les deux formes linéaires considérées sont indépendantes et donc P est un plan. Une base de P est par exemple $(i, j) = ((1, -1, 0, 0), (1, 0, 2, -3))$. On orthonormalise la base (i, j).
On prend $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$ puis $e_2' = j - \langle j, e_1\rangle e_1 = (1, 0, 2, -3) - \dfrac{1}{2}(1, -1, 0, 0) = \dfrac{1}{2}(1, 1, 4, -6)$. puis $e_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}(1, 1, 4, -6)$.

Une base orthonormée de P est (e_1, e_2) où $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$ et $e_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}(1, 1, 4, -6)$.

1) Le projeté orthogonal de $u = (x, y, z, t)$ sur P est

$$\begin{aligned}
p_P(u) &= \langle u, e_1\rangle e_1 + \langle u, e_2\rangle e_2 = \frac{1}{2}(x-y)(1,-1,0,0) + \frac{1}{54}(x+y+4z-6t)(1,1,4,-6)\\
&= \frac{1}{54}(28x-26y+4z-6t, -26x+28y+4z-6t, 4x+4y+16z-24t, -6x-6y-24z+36t)\\
&= \frac{1}{27}(14x-13y+2z-3t, -13x+14y+2z-3t, 2x+2y+8z-12t, -3x-3y-12z+18t).
\end{aligned}$$

La matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P est

$$\boxed{M = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 & -3\\ -13 & 14 & 2 & -3\\ 2 & 2 & 8 & -12\\ -3 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}}.$$

La matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P est

$$\boxed{S = 2M - I_4 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 1 & -26 & 4 & -6\\ -26 & 1 & 4 & -6\\ 4 & 4 & -11 & -24\\ -6 & -6 & -24 & 9 \end{pmatrix}}.$$

2) La distance de u = (x,y,z,t) à P est

$$\begin{aligned}
\|u - p_P(u)\| &= \frac{1}{27}\|(14x+13y-2z+3t, 13x+14y-2z+3t, -2x-2y-11z+12t, 3x+3y+12z+9t)\|\\
&= \frac{1}{27}\sqrt{(14x+13y-2z+3t)^2 + (13x+14y-2z+3t)^2 + (-2x-2y-11z+12t)^2 + (3x+3y+12z+9t)^2}.
\end{aligned}$$

Exercice n^o 15

Soient A et B deux matrices orthogonales distinctes. Montrons que pour tout réel $\lambda \in]0,1[$, la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ n'est pas orthogonale.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale.
Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on note respectivement A_j, B_j et C_j la j-ème colonne de matrice A, de la matrice B et de la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$. Ces trois matrices étant orthogonales, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$1 = \|C_j\| \leqslant (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\| = (1-\lambda) + \lambda = 1,$$

et donc $\|C_j\| = (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité de Minkowski. Puisque $\lambda \in]0,1[$, les colonnes $(1-\lambda)A_j$ et λB_j ne sont pas nulles et donc sont colinéaires et de même sens. Puisque les réels $1-\lambda$ et λ sont strictement positifs, il en est de même des colonnes A_j et B_j et puisque ces colonnes sont des vecteurs unitaires, ces colonnes sont en fin de compte égales. En résumé, si il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale, alors $A = B$. Ceci est une contradiction et on a montré que

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas convexe.}}$$

Exercice n^o 16

Si $\mathrm{rg}M \leqslant n-1$, l'égalité $M = \mathrm{com}(M)$ entraîne $MM^T = M(\mathrm{com}(M))^T = (\det(M))I_n = 0$ et donc $M = 0$. En effet,

$$\begin{aligned}
MM^T = 0 &\Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^TMM^TX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left\|M^TX\right\|^2 = 0\\
&\Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ M^TX = 0 \Rightarrow M^T = 0 \Rightarrow M = 0.
\end{aligned}$$

En résumé, si M est solution, $M = 0$ ou M est inversible. $M = 0$ est solution.

Dans le deuxième cas, d'après l'exercice n^o 13, planche n^o 3, on doit avoir $\det(M) = (\det(M))^{n-1}$ et donc, puisque $\det(M) \neq 0$, $\det(M) \in \{-1, 1\}$ (et même $\det(M) = 1$ si n est impair) car $\det(M)$ est réel.

• Si $\det(M) = -1$, on doit avoir $MM^T = -I_n$ mais ceci est impossible car le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice MM^T vaut $m_{1,1}^2 + \ldots + m_{1,n}^2 \neq -1$.

• Il reste le cas où $\det(M) = 1$, l'égalité $M = \mathrm{com}M$ entraîne $MM^T = I_n$ (et $\det(M) = 1$) c'est-à-dire M est orthogonale positive.

Réciproquement, si M est orthogonale positive, $M^T = M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}(\mathrm{com}M)^T = (\mathrm{com}(M))^T$ et donc $M = \mathrm{com}M$.

Finalement ,

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\} \cup O_n^+(\mathbb{R}).}$$

Exercice n° 17

Soit $x \in E$. Si $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^*)$, alors $f(x) + f^*(x) = 0 + 0 = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(f + f^*)$.

Inversement, si $x \in \mathrm{Ker}(f + f^*)$, alors $f^*(x) = -f(x)$ puis

$$\|f^*(x)\|^2 = \langle f^*(x), f^*(x)\rangle = -\langle f^*(x), f(x)\rangle = -\langle x, f \circ f(x)\rangle = -\langle x, 0\rangle = 0$$

et donc $f^*(x) = 0$ puis $f(x) = -f^*(x) = 0$ puis $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^*)$.

On a montré que $\mathrm{Ker}(f + f^*) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^*)$.

Exercice n° 18

(1) et (2) $\Rightarrow$ (3). Puisque $f \in O(E)$, f est un automorphisme de E et $f^* = f^{-1}$ et puisque $f^2 = -\mathrm{Id}_E$, $f^{-1} = -f$. Donc, $f^* = -f$ puis f est un endomorphisme anti-symétrique. Mais alors, pour tout $x \in E$,

$$\langle f(x), x\rangle = \langle x, f^*(x)\rangle = -\langle x, f(x)\rangle = -\langle f(x), x\rangle$$

puis $2\langle f(x), x\rangle = 0$ et finalement, $\langle f(x), x\rangle = 0$.

(2) et (3) $\Rightarrow$ (1). Puisque $f \in O(E)$, $f^* = f^{-1}$. D'autre part, pour $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(x+y), x+y\rangle = \langle f(x) + f(y), x+y\rangle = \langle f(x), x)\rangle + \langle f(x), y\rangle + \langle x, f(y)\rangle + \langle f(y), y\rangle \\ &= \langle f(x), y\rangle + \langle x, f(y)\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, f^*(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, -f(y)\rangle$. Par unicité, $f^* = -f$. Mais alors

$$-f^2 = -f \circ f = (-f) \circ f = f^* \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E,$$

et donc, $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

(3) et (1) $\Rightarrow$ (2). Comme précédemment, la condition (3) entraine $f^* = -f$ et la condition (1) entraine $f^{-1} = -f$. On en déduit que $f^* = f^{-1}$ et donc que $f \in O(E)$.

Exercice n° 19

1) D'après le n° 2, si $A = T^T T$ où T est une matrice inversible, alors $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Réciproquement, soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{B} = (E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Puisque $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'application $\langle\ ,\ \rangle\ :\ (X, Y) \to \langle X, Y\rangle = X^T AY$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note que pour tout $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et tout $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i a_{i,j} y_j,$$

et en particulier, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = \langle E_i, E_j\rangle$.

Soit $\mathscr{B}' = (E_1', \ldots, E_n')$ l'orthonormalisée de $\mathscr{B}$ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ puis $T' = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Par définition de l'orthonormalisée, T' est une matrice triangulaire supérieure. Soient $(X, Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ puis X' et Y' les vecteurs colonnes dont les composantes sont les coordonnées des vecteurs X et Y dans $\mathscr{B}'$. Les formules de changement de bases fournissent $X = T'X'$ et $Y = T'Y'$ puis

$$\langle X, Y\rangle = X^T AY = (T'X')^T A(T'Y') = X'^T \left(T'^T AT'\right) Y' = X'^T BY'^T = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i' b_{i,j} y_j'$$

où $B = T'^T A T' = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$,

$$b_{i,j} = \langle E'_i, E'_j \rangle = \delta_{i,j},$$

et donc $B = I_n$ puis $T'^T A T' = I_n$ puis $A = \left(T'^{-1}\right)^T \left(T'^{-1}\right)$. Mais alors, la matrice $T = T'^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure inversible telle que $A = T^T T$.

2) Posons $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$$\det(A) = \det\left(T^T T\right) = (\det(T))^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} t_{i,i}\right)^2 = \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}^2.$$

D'autre part, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} t_{j,i} t_{j,i} = \sum_{j=i}^{n} t_{i,j}^2 \geqslant t_{i,i}^2$$

(et en particulier, $a_{i,i} > 0$). On en déduit que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Exercice n° 20 Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension 2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, $\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}}(f^*) = A^T$. L'égalité $f^* \circ f = f \circ f^*$ s'écrit alors $A^T A = A A^T$. Posons $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

et

$$A A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} A^T A = A A^T &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2+c^2 = a^2+b^2 \\ b^2+d^2 = c^2+d^2 \\ ab+cd = ac+bd \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |b| = |c| \\ ab+cd = ac+bd \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = b \\ ab+bd = ab+bd \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} c = -b \\ ab-bd = -ab+bd \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow c = b \text{ (I)} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} c = -b \\ b(a-d) = 0 \end{array}\right. \text{ (II)}. \end{aligned}$$

(I) est équivalent à $A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ ou encore $f \in \mathscr{S}(E)$. (II) équivaut à $b = c = 0$ ou $c = -b \neq 0$ et $a = d$ ou encore (I) équivaut à A est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Les endomorphismes normaux de E sont les endomorphismes symétriques et les similitudes positives (composées d'une homothétie et d'une isométrie positive).

Exercice n° 21

1) On sait que si F est un sous-espace de E stable par f^*, alors $F^\perp$ est stable par $(f^*)^* = f$. En effet, pour $x \in F^\perp$ donné, pour tout $y \in F$,

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle = 0$$

(car $x \in F^\perp$ et $f^*(y) \in F$) et donc $f(x) \in F^\perp$. Par suite, $F^\perp$ est stable par f.

Si maintenant H est un hyperplan stable par f^*, alors $H^\perp$ est un droite stable par f et donc une droite engendrée par un vecteur propre u de f. Mais alors, $H = (u)^\perp$ est un hyperplan de vecteur normal un vecteur propre de f. Inversement, soit u un vecteur propre de f puis $H = (u)^\perp$. Alors, $\mathrm{Vect}(u)$ est stable par f et donc $H = (u)^\perp$ est stable par f^*.

2) Si f est symétrique, f admet au un vecteur propre u. $H = (u)^\perp$ est alors un hyperplan de E stable par $f^* = f$.