Planche n° 7. Espaces euclidiens

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (* I)**

Montrer que la matrice de Hilbert $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est définie positive (c'est-à-dire $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXH_nX \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $X = 0$).

Exercice n° 2 (* I)**

1) Soit A une matrice carrée réelle de format n et $S = A^TA$. Montrer que S est une matrice symétrique positive.
2) Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S = A^TA$. A-t-on l'unicité de A ?
3) Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
4) Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(S)$.
5) (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit S une matrice symétrique positive.
Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

Exercice n° 3 (** I)**

Soit E un espace euclidien de dimension n non nulle. Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille de p vecteurs de E $(p \geqslant 2)$. On dit que la famille $(x_1, ..., x_p)$ est une famille obtusangle si et seulement si $\forall(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ $(i < j \Rightarrow x_i|x_j < 0)$. Montrer que si la famille $(x_1, ..., x_p)$ est une famille obtusangle alors $p \leqslant n + 1$.

Exercice n° 4 (I)** (Inégalité de Hadamard)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
Montrer que pour tout n-uplet de vecteurs $(x_1, ...x_n)$, on a : $|\det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)| \leqslant \|x_1\|...\|x_n\|$. Cas d'égalité ?

Exercice n° 5 (**)

Montrer que pour toute matrice carrée A réelle de format n, on a $|\det A| \leqslant \sqrt{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)}$.

Exercice n° 6 (***)

Soit A une matrice orthogonale. A l'aide du vecteur colonne U dont toutes les composantes sont égales à 1, montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n. Cas d'égalité si de plus tous les coefficients de A sont positifs ?

Exercice n° 7 (I)**

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(A, B) \in E^2$, on pose $\langle A, B\rangle = \text{Tr}\left(A^TB\right)$.

1) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit salaire sur E. On note $\|\ \|$ la norme associée.

2) Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

3) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la distance de A à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ (dans $(E, \|\ \|)$).

Exercice n° 8 (***)

Soit A une matrice carrée réelle symétrique positive de format n. Montrer que $1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det\left(I_n + A\right)}$.

Exercice n° 9 (**)

Déterminer $\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))$.

Exercice n° 10 (**)

Soit A une matrice carrée réelle. Montrer que les matrices A^TA et AA^T sont orthogonalement semblables.

Exercice n° 11 (* I)**

Montrer que le produit de deux matrices symétriques réelles positives est à valeurs propres réelles positives.

Exercice n° 12 (* I)**

Soient A et B deux matrices carrées réelles symétriques positives. Montrer que $\det(A) + \det(B) \leqslant \det(A + B)$.

Exercice n° 13 (* I)**

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ qui conserve l'orthogonalité. Montrer qu'il existe un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Exercice n° 14 (I)**

Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+y-2z-t=0 \end{array}\right.$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1) Déterminer les matrices dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P.

2) Calculer la distance d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ à P.

Exercice n° 15 (***)

$O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?

Exercice n° 16 (***)

Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M = \mathrm{com}(M)$ ($n \geqslant 2$).

Exercice n° 17 (**)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathbb{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f + f^*) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f^*)$.

Exercice n° 18 (I)**

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entrainent la troisième :

(1) $f^2 = -\mathrm{Id}_E$,
(2) $f \in O(E)$,
(3) $\forall x \in E$, $\langle f(x), x\rangle = 0$.

Exercice n° 19 (* I)**

1) Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure inversible T telle que $A = T^T T$ (décomposition de Choleski) (on pourra considérer l'orthonormalisée de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $(X, Y) \mapsto X^T AY$). Réciproque ?

2) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Exercice n° 20 (**) Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f eswt dit *normal* si et seulement si $f^* \circ f = f \circ f^*$.

Déterminer tous les endomorphismes normaux de f quand $\dim(E) = 2$.