7

Configurations usuelles en géométrie

Au programme

- √ Consolider les notions sur les configurations géométriques du collège.
- √ Trigonométrie dans le triangle rectangle.
- √ Découvrir la notion de distance d'un point à une droite et son lien avec le projeté orthogonal.
- √ Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- √ Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.

Table des matières

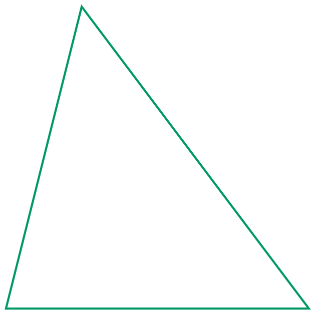
Dans ce chapitre, on rappelle et on complète les connaissances de collège en géométrie.

I Quelques configurations usuelles dans le plan

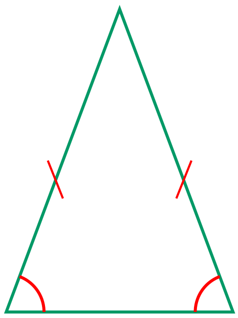
A Les triangles

1 Les différents types de triangle

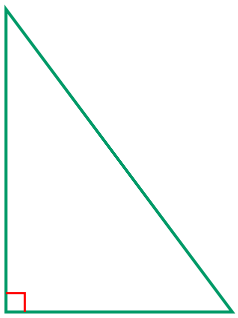
Les différents types de triangles sont :



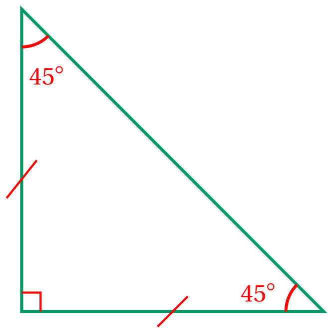
le triangle quelconque (ou scalène)



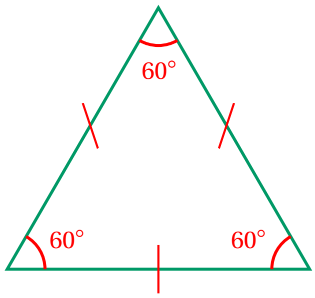
le triangle isocèle



le triangle rectangle



le triangle rectangle isocèle



le triangle équilatéral

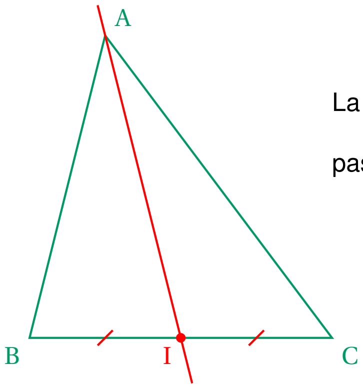
Un triangle **isocèle** a deux côtés de même longueur. Un triangle **équilatéral** a trois côtés de même longueur. Un triangle équilatéral est donc un triangle isocèle particulier.

Un triangle isocèle a deux angles de même mesure. Un triangle équilatéral a trois angles de même mesure, égale à $60°$.

Un triangle **rectangle** a un angle droit.

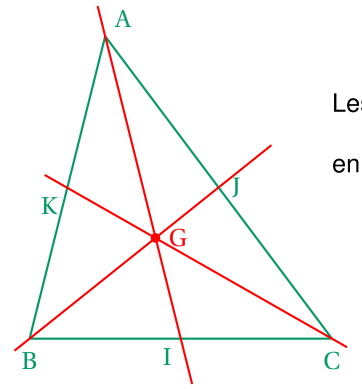
2 Droites et points remarquables dans un triangle

Les droites remarquables et points remarquables dans un triangle sont :



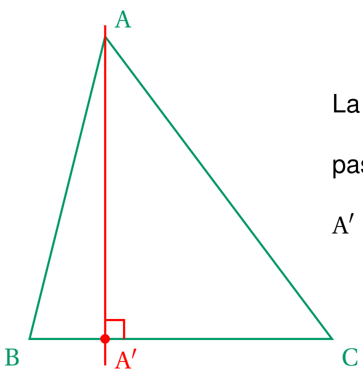
La **médiane** issue de A du triangle ABC est la droite

passant par le sommet A et le milieu du côté opposé.



Les trois médianes sont concourantes

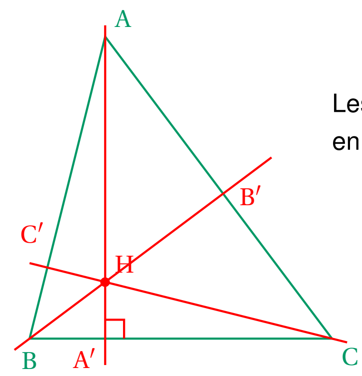
en le **centre de gravité** G du triangle ABC.



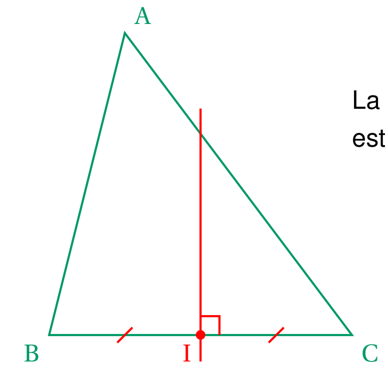
La **hauteur** issue de A du triangle ABC est la droite

passant par le sommet A et perpendiculaire au côté opposé.

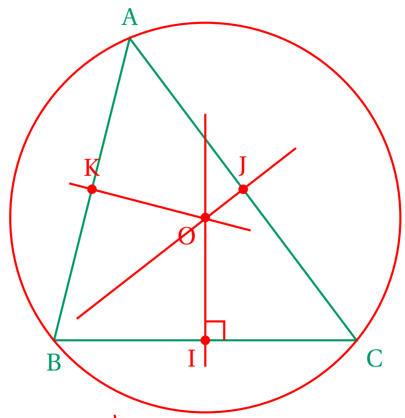
A' est le **pied de la hauteur** issue de A.



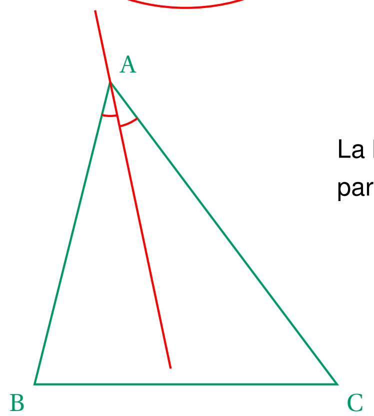
Les trois hauteurs sont concourantes
en l'**orthocentre** H du triangle ABC.



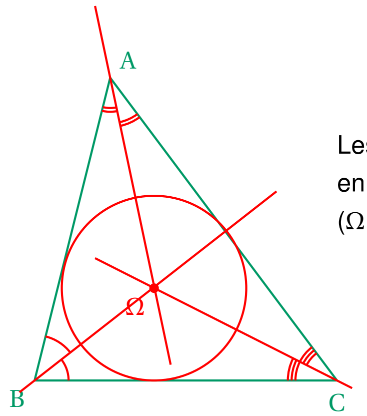
La **médiatrice** de $[BC]$
est la perpendiculaire au côté $[BC]$ en son milieu.



Les médiatrices sont concourantes
en le **centre** O **du cercle circonscrit** au triangle ABC.

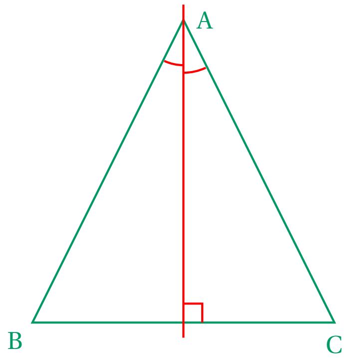


La **bissectrice** de l'angle $\widehat{A}$ est la droite
partageant l'angle $\widehat{BAC}$ en deux angles égaux.



Les bissectrices sont concourantes
en le **centre** Ω **du cercle inscrit** dans le triangle ABC.
(Ω se lit « Omega »).

On note que dans un triangle ABC isocèle en A, la médiane issue de A, la hauteur issue de A, la médiatrice du segment $[BC]$ et la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ sont confondues.



Les deux exercices qui suivent sont des approfondissements prévus par le programme officiel. On y démontre explicitement que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en le centre du cercle circonscrit à ce triangle et que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 1

Montrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes en le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Solution 1 : La médiatrice de $[BC]$ est perpendiculaire à la droite (BC) et la médiatrice de $[AC]$ est perpendiculaire à la droite (AC). Les droites (AB) et (AC) ne sont pas parallèles et donc les médiatrices des segments $[BC]$ et $[AC]$ ne sont pas parallèles. Elles se coupent en un point que l'on note Ω (lettre grecque Omega majuscule c'est-à-dire O majuscule).

La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points à égale distance des extrémités de ce segment. Donc, $\Omega B = \Omega C$ et aussi $\Omega C = \Omega A$. Mais alors, $\Omega A = \Omega B$ et on en déduit que le point Ω est sur la médiatrice du segment $[AB]$.

Ainsi, le point Ω appartient aux trois médiatrices et donc les trois médiatrices sont concourantes.

Le cercle de centre Ω passant par A a pour rayon ΩA. Puisque $\Omega B = \Omega A$ et $\Omega C = \Omega A$, les points B et C appartiennent au cercle de centre Ω passant par A ou encore le point Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

■

Exercice 2

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts et non alignés. On note I le pied de la hauteur issue de A, J le pied de la hauteur issue de B et K le pied de la hauteur issue de C.

On trace la parallèle à la droite (BC) passant par A, la parallèle à (AC) passant par B et la parallèle à (AB) passant par C. Ces trois droites se coupent en trois points A', B' et C' de sorte que A appartient à $[B'C']$, B appartient à $[A'C']$ et C appartient à $[A'B']$.

1) Faire une figure.

2) a) Que peut-on dire du quadrilatère $ABCB'$? Et du quadrilatère $ACBC'$?

b) En déduire que le point A est le milieu du segment $[B'C']$.

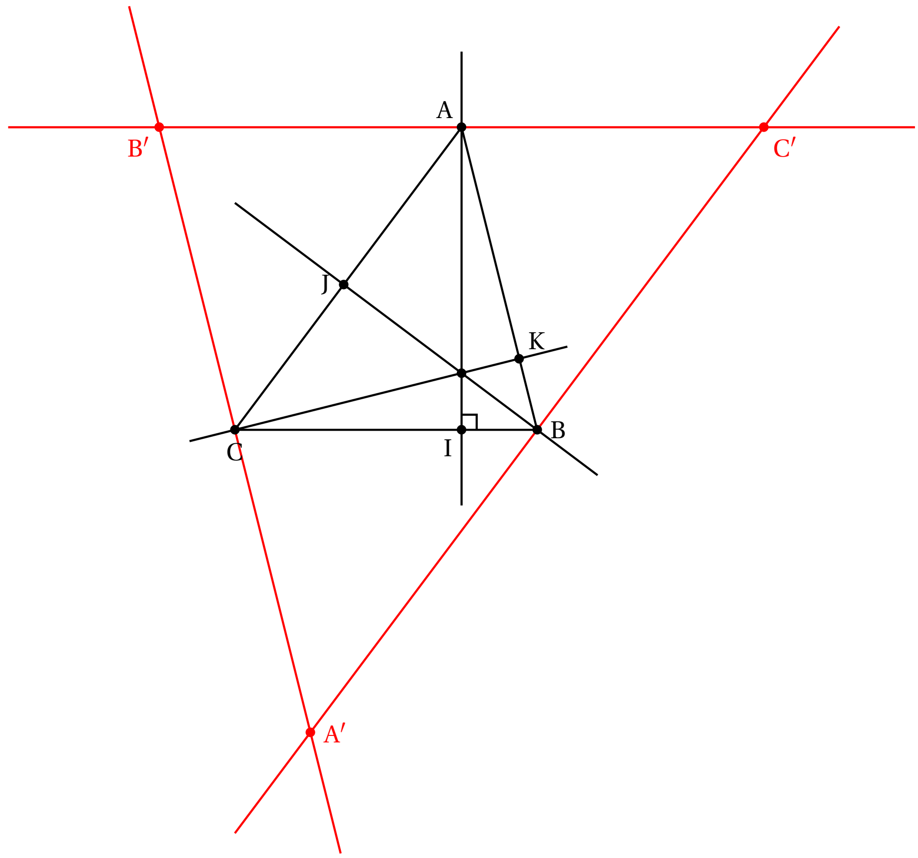
Ceci montre plus généralement que chaque sommet du triangle ABC est le milieu du côté du triangle $A'B'C'$ auquel il appartient.

3) a) Que sont les droites (AI), (BJ) et (CK) pour le triangle $A'B'C'$?

b) En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Solution 2 :

1) Figure.



2) a) La droite (AB) est parallèle à la droite (CB') et la droite (BC) est parallèle à la droite (AB'). Donc, le quadrilatère $ABCB'$ est un parallélogramme. De même, le quadrilatère $ACBC'$ est un parallélogramme.

b) On en déduit que $B'A = BC$ et $BC = AC'$. Ainsi, A est le point du segment $[B'C']$ à égale distance des points B' et C'. On en déduit que le point A est le milieu du segment $[B'C']$.

Enfin, ainsi que le dit l'énoncé, le point B est le milieu du segment $[A'C']$ et le point C est le milieu du segment $[A'B']$.

3) a) La droite (AI) est perpendiculaire à la droite (BC) et la droite (BC) est parallèle à la droite $(B'C')$. Donc la droite (AI) est perpendiculaire à la droite $(B'C')$. D'autre part, le point A est le milieu du segment $[B'C']$. Finalement, la droite (AI) est la médiatrice du segment $[B'C']$. De même, la droite (BJ) est la médiatrice du segment $[A'C']$ et la droite (CK) est la médiatrice du segment $[A'B']$.

b) Les trois hauteurs du triangle ABC sont donc aussi les médiatrices du triangle $A'B'C'$. Puisqu'on sait que les médiatrices d'un triangle sont concourantes, on vient de montrer que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

■

On montre maintenant que les médianes d'un triangle ABC sont concourantes. On recommencera le même travail après avoir étudié les vecteurs au chapitre suivant. On disposera alors d'une solution plus simple au même problème.

Exercice 3

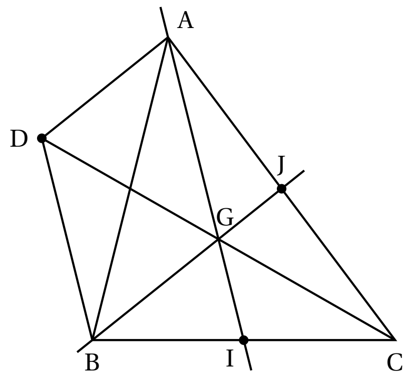
Soient A, B et C trois points non alignés. On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On admet que les médianes (AI) et (BJ) sont sécantes en un point que l'on note G. On note D le symétrique de C par rapport au point G.

1) a) Montrer que les droites (BG) et (AD) sont parallèles.
b) Déterminer la nature du quadrilatère $BGAD$.

2) En déduire que la droite (CG) est la médiane issue de C du triangle ABC. Quel résultat a-t-on démontré ?

3) Montrer que $CG = \frac{2}{3}CK$.

Solution 3 :



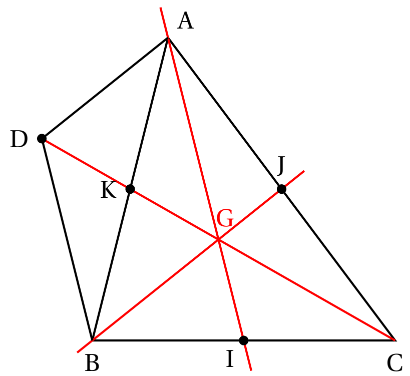
1) a) Dans le triangle ACD, J est le milieu du segment [AC] et G est le milieu du segment [CD] (car D est le symétrique de C par rapport au point G). La droite des milieux (GJ) est parallèle à la droite (AD). Puisque les points B, G et J sont alignés, la droite (GJ) est aussi la droite (BG). On a donc montré que les droites (BG) et (AD) sont parallèles.

b) De même, dans le triangle BCD, I est le milieu du segment [CB] et G est le milieu du segment [CD]. Donc, la droite (GI) est parallèle à la droite (BD). Puisque la droite (GI) est aussi la droite (AG), on a montré que les droites (BD) et (AG) sont parallèles.

Ainsi, les droites (AG) et (BD) d'une part, et les droites (BG) et (AD) d'autre part, sont parallèles. On en déduit que le quadrilatère BGAD est un parallélogramme.

2) Puisque BGAD est un parallélogramme, les diagonales [GD] et [AB] se coupent en leur milieu. Mais alors, la droite (CG), qui est aussi la droite (GD), coupe le segment [AB] en son milieu K. Ceci montre que la droite (GC) est la médiane issue de C du triangle ABC.

Le point G est donc un point commun aux trois médianes du triangle ABC. On a montré que les médianes d'un triangle sont concourantes.



3) Puisque G est le milieu du segment [GD], $\mathrm{GC} = \mathrm{GD}$. Puisque K est la milieu du segment [GD], on a $\mathrm{GD} = 2\mathrm{GK}$. On en déduit que $\mathrm{GC} = 2\mathrm{GK}$ ou encore que $\mathrm{GK} = \dfrac{1}{2}\mathrm{GC}$. Par suite, $\mathrm{CK} = \mathrm{CG} + \mathrm{GK} = \mathrm{CG} + \dfrac{1}{2}\mathrm{CG} = \dfrac{3}{2}\mathrm{CG}$ ou encore

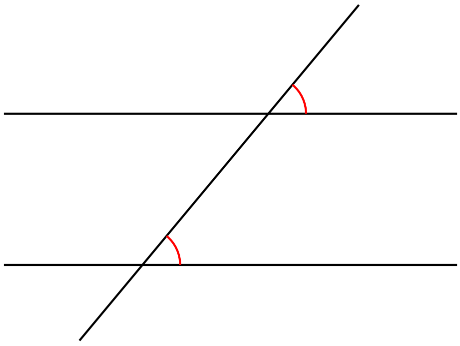
$$\mathrm{CG} = \frac{2}{3}\mathrm{CK}.$$

∎

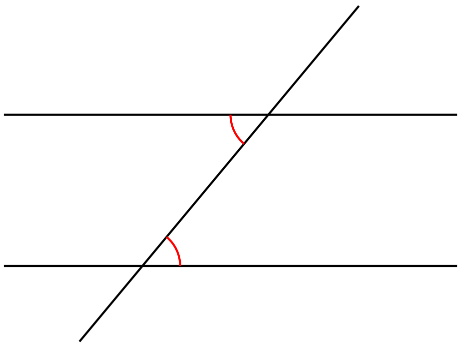
Pour les bissectrices d'un triangle ABC qui sont concourantes en le centre du cercle inscrit à ce triangle, on attendra d'avoir étudié la notion de distance d'un point à une droite.

3 Sommes des angles d'un triangle

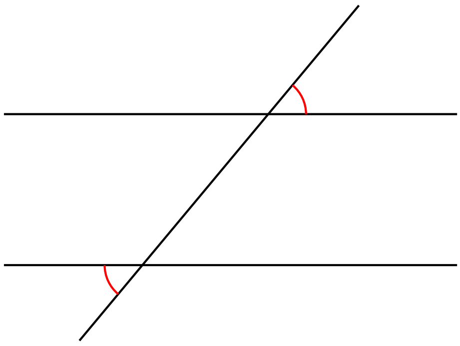
On commence à rappeler quelques configurations usuelles concernant les angles. Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles **correspondants** sont égaux.



Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles **alternes-internes** sont égaux.



Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles **alternes-externes** sont égaux.

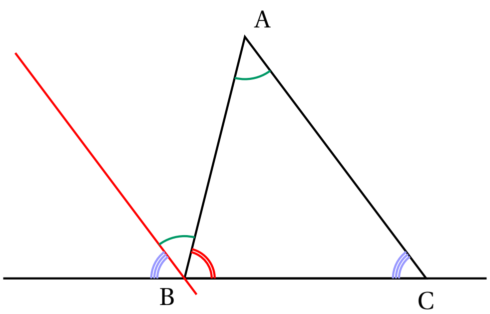


On peut alors rappeler le

Théoreme 1

La somme des mesures en degré des trois angles d'un triangle est égale à $180°$.

Démonstration : On trace la parallèle à la droite (AC) passant par B. Les angles correspondants sont égaux et les angles alternes-internes sont égaux. La somme des trois angles $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}$ est égale à l'angle plat de mesure $180°$.



■

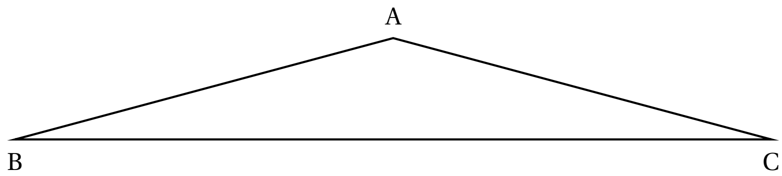
Ainsi, dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux et donc chaque angle mesure un tiers de $180°$ ou encore $60°$.

Exercice 4

ABC est un triangle isocèle en A tel que une mesure de $\widehat{\mathrm{ABC}}$ est $15°$. Calculer $\widehat{\mathrm{BAC}}$.

Solution 4 : Soit x la mesure en degré de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$. Puisque ABC est isocèle en A, $\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{ABC}}$ puis une mesure de $\widehat{\mathrm{ACB}}$ est aussi $15°$. Puisque la somme des mesures des trois angles est égale à $180°$, on a $180° = x + 2 \times 15°$ puis $x = 150°$.

La mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est $150°$.



■

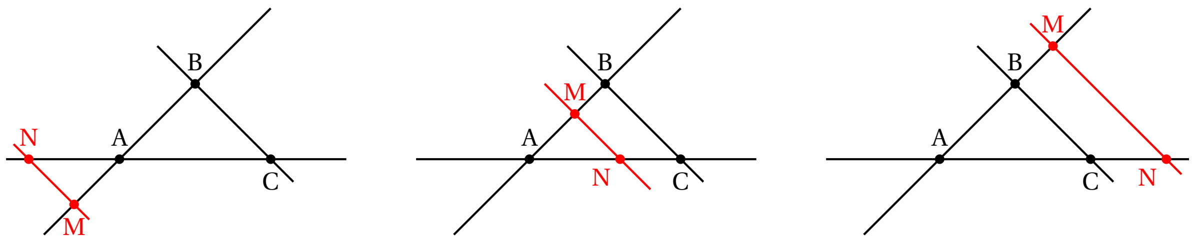
4 Le théorème de THALES

On rappelle le théorème de THALES. Celui-ci est constitué de deux implications que l'on va détailler en deux théorèmes.

On se donne trois points A, B et C, deux à deux distincts et non alignés de sorte que les droites (AB) et (AC) sont définies et sécantes en A. On place un point M sur la droite (AB) tel que $\mathrm{M} \neq \mathrm{A}$ et on place un point N sur la droite (AC) tel que $\mathrm{N} \neq \mathrm{A}$. Ainsi, on a nécessairement $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$ de sorte que la droite (MN) est bien définie. Dans cette situation :

Théoreme 2

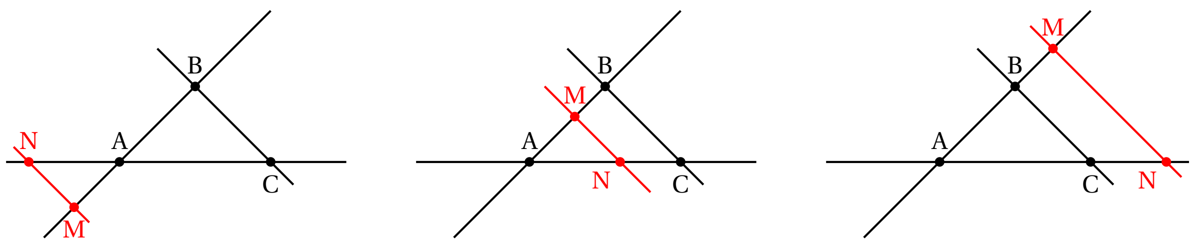
Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$.



Inversement,

Théoreme 3

Si les points A, M et B sur la droite (AB) d'une part, et les points A, N et C sur la droite (AC) d'autre part sont dans le même ordre (c'est-à-dire si on est dans l'une des trois configurations ci-dessous) et si $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$. alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

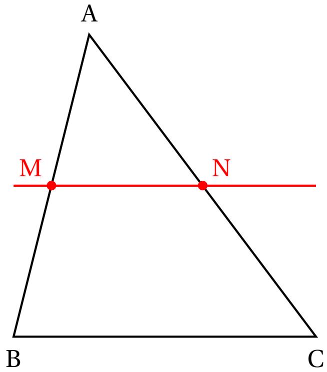


☞ *On note que si* $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} \neq \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$*, la droite* (MN) *n'est pas parallèle à la droite* (BC) *et si la droite* (MN) *n'est pas parallèle à la droite* (BC)*, alors* $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} \neq \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$.

Exercice 5

Soient ABC un triangle non aplati puis M le milieu de $[\mathrm{AB}]$ et N le milieu de $[\mathrm{AC}]$. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (BC).

Solution 5 : Le point M appartient au segment $[\mathrm{AB}]$ et le point N appartient au segment $[\mathrm{AC}]$. De plus, $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$. D'après le théorème de THALES, la droite (MN) est parallèle à la droite (BC).



■

On peut synthétiser le résultat précédent avec la phrase : « la droite des milieux est parallèle au troisième côté ».

5 Le triangle rectangle et le théorème de PYTHAGORE

Théoreme 4

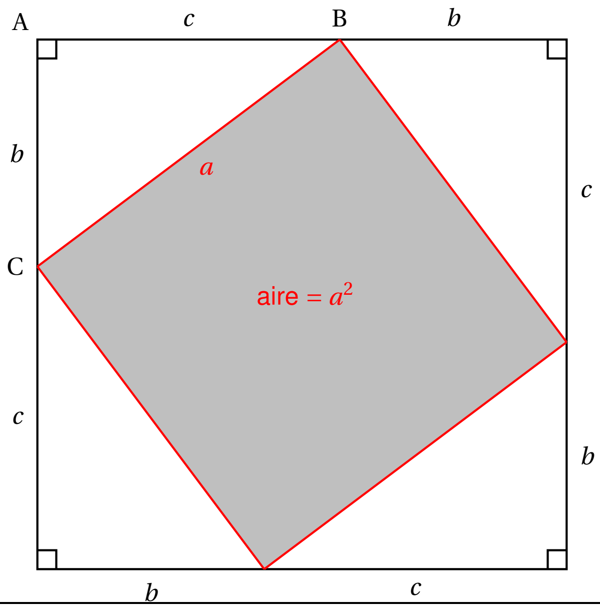
Soient A, B et C trois points deux à deux distincts et non alignés.

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$.

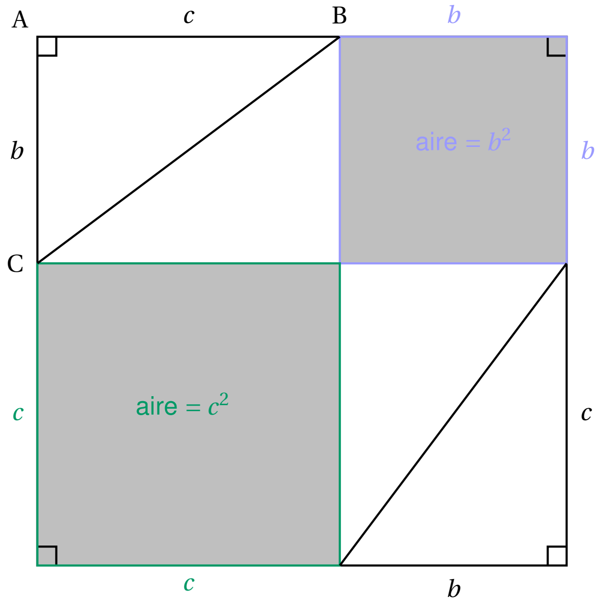
☞ *Par suite, si* $\mathrm{BC}^2 \neq \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$*, alors le triangle* ABC *n'est pas rectangle en* A *et si le triangle* ABC *n'est pas rectangle en* A*, alors* $\mathrm{BC}^2 \neq \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$.

Démonstration : On donne une démonstration d'une des implications du théorème de PYTHAGORE.

Ci-dessous, on montre que si le triangle ABC est rectangle en A, alors $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$. On pose $\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{AC} = b$ et $\mathrm{AB} = c$. Dans un carré dont le côté mesure $b + c$, on dispose 4 triangles rectangles identiques comme ci-dessous. On admet momentanément que l'on obtient un carré (en rouge) à l'intérieur du grand carré. Son aire est a^2.

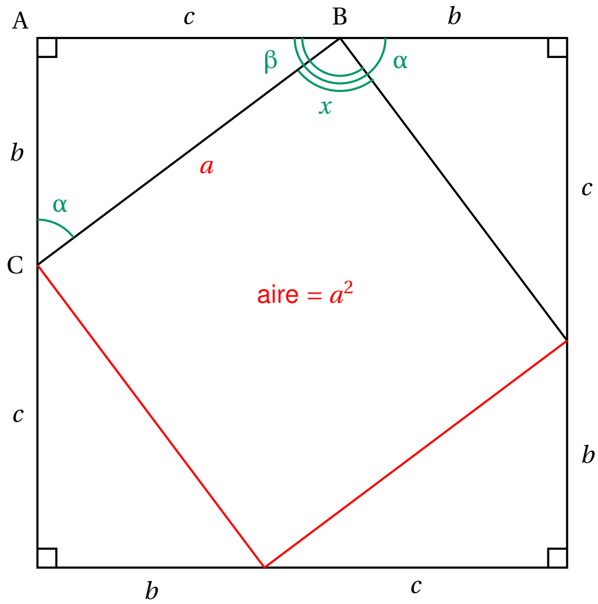


On redispose les quatre triangles à l'intérieur du grand carré de la façon suivante :



L'aire en grisé est conservée et donc $a^2 = b^2 + c^2$.

Il reste à vérifier que le carré rouge est effectivement un carré. Ses quatre côtés ont la même longueur et donc ce quadrilatère est un losange. Vérifions que chacun de ses angles est un angle droit. On a la figure suivante dans laquelle on veut connaître x :



α se lit « alpha »

β se lit « beta »

Dans le triangle ABC, rectangle en A, on a $\alpha+\beta+90° = 180°$. D'autre part, $\alpha+\beta+x = 180°$ et donc $\alpha+\beta+x = \alpha+\beta+90°$ puis $x = 90°$ (ce que l'on voulait démontrer).

■

Exercice 6

Un triangle ABC est rectangle en A. De plus, $\mathrm{BC} = 13$ et $\mathrm{AB} = 5$. Calculer l'aire du triangle ABC.

Solution 6 : Calculons AC. Puisque le triangle ABC est rectangle en A, d'après le théorème de PYTHAGORE, $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$ puis

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AB}^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2.$$

Ainsi, $\mathrm{AC}^2 = 12^2$ et donc $\mathrm{AC} = 12$ (car $\mathrm{AC} > 0$).

L'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est alors :

$$\mathscr{A} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{5 \times 12}{2} = 5 \times 6 = 30.$$

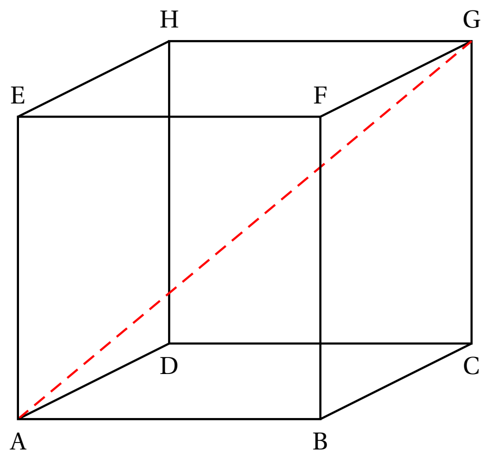
L'aire du triangle ABC est égale à 30.

■

Exercice 7

On considère un cube ABCDEFG de côté 8. On admet que le quadrilatère ACGE est un rectangle.

Calculer la longueur de la diagonale [AG] de ce cube. En donner une valeur arrondie au millième.



Solution 7 : Calculons la longueur AC. Le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 8^2 = 2 \times 8^2$$

puis $AC = \sqrt{2 \times 8^2} = 8\sqrt{2}$.

Ensuite, le triangle ACG est rectangle en C. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 = 2 \times 8^2 + 8^2 = 3 \times 8^2$$

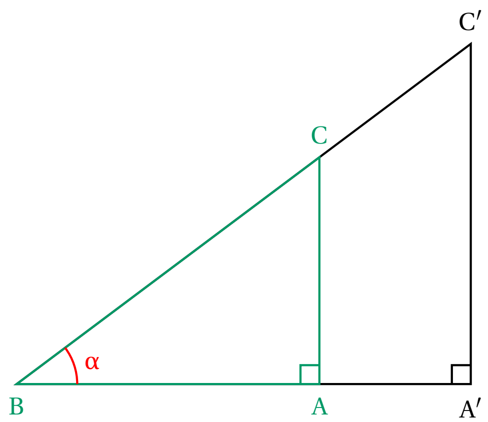
et donc $AG = \sqrt{3 \times 8^2} = 8\sqrt{3}$. La calculatrice fournit $8\sqrt{3} = 13,8564\ldots$ et donc $AG = 13,856$ arrondi au millième.

■

Dans l'exercice précédent, il faut noter que dans tous les **calculs intermédiaires**, nous avons travaillé avec des **valeurs exactes** et pas avec des valeurs approchées. On doit toujours agir ainsi.

6 Trigonométrie dans le triangle rectangle

Considérons la configuration suivante :



Les droites (AC) et (A′C′) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à la droite (AB). D'après le théorème de THALES, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BA}{BA'}$ et donc

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BA'}{BC'}.$$

Les deux rapports de distance $\frac{BA}{BC}$ et $\frac{BA'}{BC'}$, égaux l'un à l'autre, ne dépendent donc que de l'angle α. Chacun de ces deux rapports est par définition le **cosinus** de l'angle α. Il se note $\cos(\alpha)$.

De même, l'égalité $\frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'}$ fournit l'égalité

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{BC'}.$$

Chacun de ces deux rapports est par définition le **sinus** de l'angle α et se note $\sin(\alpha)$.

Enfin, l'égalité $\frac{BA}{BA'} = \frac{AC}{A'C'}$ fournit l'égalité

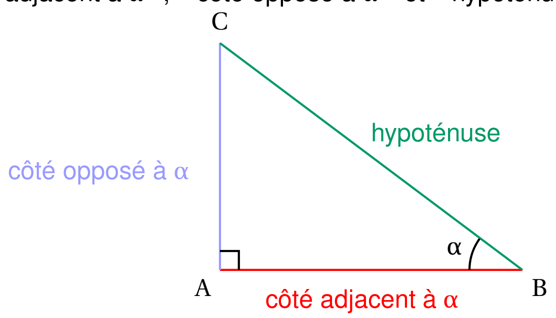
$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B}.$$

Chacun de ces deux rapports est par définition la **tangente** de l'angle α et se note $\tan(\alpha)$. On peut poser :

Définition 1

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts et non alignés tels que le triangle ABC est rectangle en A. On note α la mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ (donc $0° < \alpha < 90°$).

Les expressions « côté adjacent à α », « côté opposé à α » et « hypoténuse » sont définies ci-dessous



Le **cosinus**, le **sinus** et la **tangente** de α sont respectivement

$$\cos(\alpha) = \frac{BA}{BC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}},\ \sin(\alpha) = \frac{CA}{BC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \text{ et } \tan(\alpha) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Théoreme 5

Soit α un angle aigu. Alors, $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Démonstration : On reprend les notations de la définition. $\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC}$ et $\sin(\alpha) = \frac{AC}{BC}$. Donc,

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan(\alpha).$$

■

Théoreme 6

Soit α un angle aigu. Alors, $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

☞ *La notation* $\cos^2(\alpha)$ *signifie* $(\cos(\alpha))^2$ *ou encore* $\cos(\alpha) \times \cos(\alpha)$*. La notation* $\cos^2(\alpha)$ *est plus pratique et plus légère.*

Démonstration : (au programme)

On reprend les notations de la définition 1. Le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de PYTHAGORE, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. D'autre part, $\dfrac{AB}{BC} = \cos(\alpha)$ et $\dfrac{AC}{BC} = \sin(\alpha)$. Par suite,

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}\\ &= \frac{BC^2}{BC^2} = 1.\end{aligned}$$

■

☞ *Une conséquence du théorème 6 est que si α est un angle aigu ($0° < \alpha < 90°$), alors*

$$0 < \cos(\alpha) < 1 \text{ et } 0 < \sin(\alpha) < 1.$$

On note enfin que dans les classes suivantes, vous obtiendrez aussi $\cos(0°) = 1$, $\sin(0°) = 0$ et aussi $\cos(90°) = 0$, $\sin(90°) = 1$.

Exercice 8

1) a) En vous plaçant dans un triangle isocèle rectangle, montrer que $\cos(45°) = \sin(45°)$.

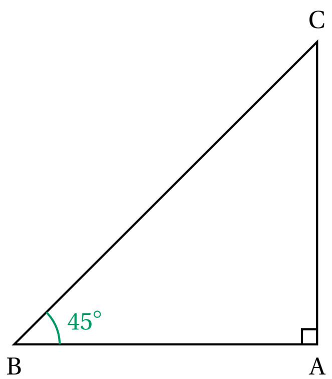
b) En déduire la valeur exacte de $\cos(45°)$, de $\sin(45°)$ et de $\tan(45°)$.

2) a) En vous plaçant dans un triangle équilatéral et en considérant une médiatrice de ce triangle, montrer que $\cos(60°) = \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire la valeur exacte de $\sin(60°)$ et de $\tan(60°)$.

Solution 8 :

1) a) On trouve un angle de mesure $45°$ dans un triangle ABC isocèle et rectangle en A :



Dans le triangle ABC, rectangle en A, on a $\cos(45°) = \dfrac{AB}{BC}$ et $\sin(45°) = \dfrac{AC}{BC}$.
Puisque le triangle ABC est isocèle en A, on a $AB = AC$ puis $\cos(45°) = \sin(45°)$.

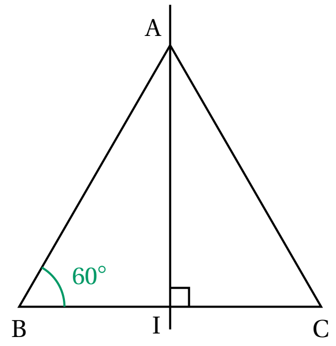
b) Posons $\alpha = 45°$. L'égalité $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ s'écrit $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ ou encore $2\cos^2(\alpha) = 1$ puis $\cos^2(\alpha) = \dfrac{1}{2}$. Puisque $\cos(\alpha)$ est un réel strictement positif, on en déduit que

$$\cos(45°) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi, $\cos(45°) = \sin(45°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit que $\tan(45°) = \dfrac{\sin(45°)}{\cos(45°)} = 1$. On a montré que

$$\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \tan(45°) = 1.$$

2) a) On trouve un angle de mesure $60°$ dans un triangle équilatéral ABC. On note I le milieu du segment $[BC]$:



Puisque le triangle ABC est équilatéral, la droite (AI), qui est la médiane issue de A du triangle ABC, est aussi la médiatrice du segment [BC]. En particulier, le triangle AIB est rectangle en I.
Dans ce triangle, $\cos(60°) = \dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BA}} = \dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{1}{2}$.

b) L'égalité $\cos^2(60°) + \sin^2(60°) = 1$ fournit

$$\sin^2(60°) = 1 - \cos^2(60°) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Puisque $\sin(60°) > 0$, on en déduit que

$$\sin(60°) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, $\tan(60°) = \dfrac{\sin(60°)}{\cos(60°)} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$. On a montré que

$$\cos(60°) = \frac{1}{2},\ \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \tan(60°) = \sqrt{3}.$$

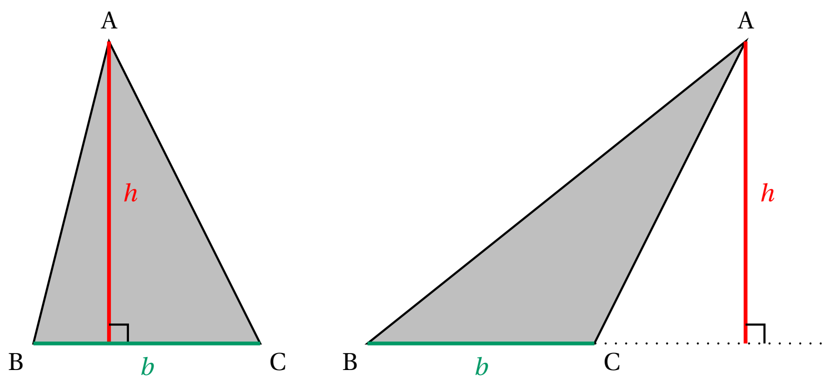
■

7 Aire d'un triangle

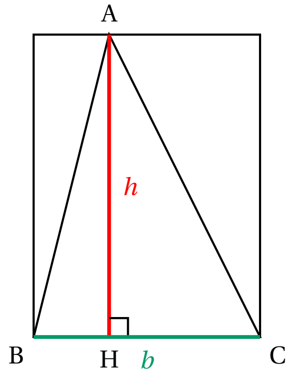
Théoreme 7

L'aire $\mathscr{A}$ d'un triangle ABC est

$$\mathscr{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{b \times h}{2}.$$

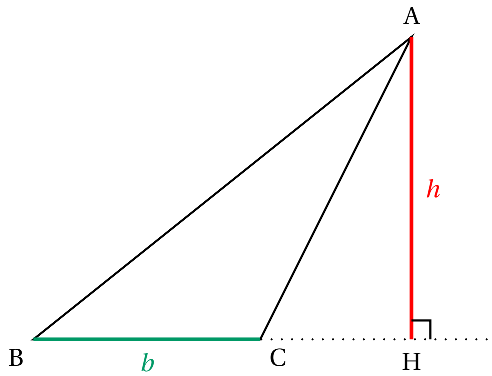


Démonstration : On a plusieurs situations à envisager. Il y a d'abord le cas où le projeté orthogonal H du point A sur la droite (BC) (le pied de la hauteur issue de A) appartient au segment [BC]. On complète le triangle ABC en un rectangle :



L'aire du rectangle, à savoir $b \times h$, est le double de l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC et donc $\mathscr{A} = \frac{b \times h}{2}$. Cette démonstration fonctionne y compris dans le cas où $\mathrm{H} = \mathrm{B}$ ou $\mathrm{H} = \mathrm{C}$ (cas où le triangle ABC est rectangle en B ou en C).

Il reste la situation où le projeté orthogonal H du point A sur la droite (BC) n'appartient pas au segment [BC] (cas où $\mathrm{H} \in (\mathrm{BC}) \setminus [\mathrm{BC}]$). Par exemple,

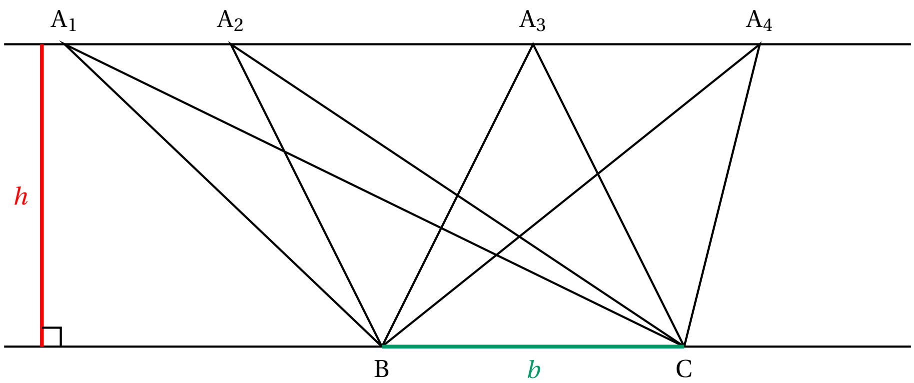


Dans ce cas, l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est égale à la différence entre l'aire du triangle ABH, à savoir $\frac{\mathrm{BH} \times h}{2}$ et l'aire du triangle ACH, à savoir $\frac{\mathrm{CH} \times h}{2}$. On en déduit que

$$\mathscr{A} = \frac{\mathrm{BH} \times h}{2} - \frac{\mathrm{CH} \times h}{2} = \frac{\mathrm{BH} \times h - \mathrm{CH} \times h}{2} = \frac{(\mathrm{BH} - \mathrm{CH}) \times h}{2} = \frac{b \times h}{2}.$$

■

Une conséquence est que les triangles $\mathrm{A_1BC}$, $\mathrm{A_2BC}$, $\mathrm{A_3BC}$ et $\mathrm{A_4BC}$ ci-dessous ont tous la même aire (les deux droites tracées sont parallèles) :



Le théorème qui suit (appelé **loi des sinus**) est un approfondissement prévu par le programme officiel.

Théoreme 8

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts et non alignés. On pose $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$ et $c = \mathrm{AB}$. On note toujours $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC.

1) $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}bc\sin\left(\widehat{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{1}{2}ac\sin\left(\widehat{\mathrm{B}}\right) = \dfrac{1}{2}ab\sin\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)$.

2) (la loi des sinus)

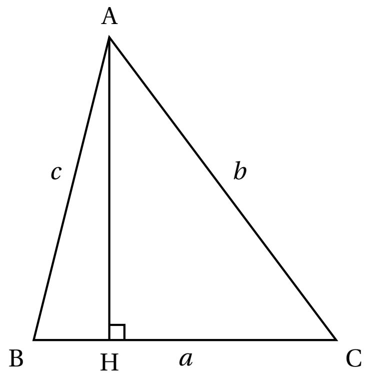
$$\frac{a}{\sin\left(\widehat{\mathrm{A}}\right)} = \frac{b}{\sin\left(\widehat{\mathrm{B}}\right)} = \frac{c}{\sin\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)} = \frac{abc}{2\mathscr{A}}.$$

Démonstration :

1) On note H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. L'aire du triangle ABC est $\mathscr{A} = \dfrac{\mathrm{AH}\times\mathrm{BC}}{2} = \dfrac{a\times\mathrm{AH}}{2}$. Ensuite, dans le triangle AHC, rectangle en H, on a $\sin\left(\widehat{\mathrm{C}}\right) = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{AH}}{b}$ et donc $\mathrm{AH} = b\sin\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)$. On a ainsi obtenu

$$\mathscr{A} = \frac{ab\sin\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)}{2} = \frac{1}{2}ab\sin\left(\widehat{\mathrm{C}}\right).$$

En échangeant les rôles des différentes lettres, on a aussi $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}ac\sin\left(\widehat{\mathrm{B}}\right)$ et $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}bc\sin\left(\widehat{\mathrm{A}}\right)$.



2) On multiplie les deux membres de l'égalité $\mathscr{A} = \dfrac{bc\sin\left(\widehat{\mathrm{A}}\right)}{2}$ par a. On obtient $a\mathscr{A} = \dfrac{abc\sin\left(\widehat{\mathrm{A}}\right)}{2}$ puis

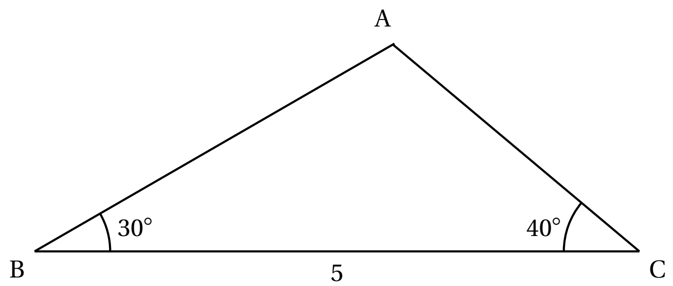
$$\frac{a}{\sin\left(\widehat{\mathrm{A}}\right)} = \frac{abc}{2\mathscr{A}}.$$

De même, $\dfrac{b}{\sin\left(\widehat{\mathrm{B}}\right)} = \dfrac{abc}{2\mathscr{A}}$ et $\dfrac{c}{\sin\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)} = \dfrac{abc}{2\mathscr{A}}$.

■

Exercice 9

On donne les informations suivantes :



Calculer AB et AC puis l'aire du triangle ABC (on donnera des valeurs arrondies à 10^{-2}).

Solution 9 : On pose $a = \mathrm{BC} = 5$, $b = \mathrm{AC}$ et $c = \mathrm{AB}$. Tout d'abord $\widehat{\mathrm{A}} = 180° - 30° - 40° = 110°$.

D'après la loi des sinus, $\dfrac{a}{\sin(\widehat{\mathrm{A}})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{\mathrm{B}})}$ puis

$$b = \frac{a\sin(\widehat{\mathrm{B}})}{\sin(\widehat{\mathrm{A}})} = \frac{5\times\sin(30°)}{\sin(110°)}.$$

La calculatrice fournit $b = 2,660\ldots$ et donc $\mathrm{AC} = 2,66$ arrondi à 10^{-2}.

Toujours d'après la loi des sinus, $\dfrac{a}{\sin(\widehat{\mathrm{A}})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{\mathrm{C}})}$ puis

$$c = \frac{a\sin(\widehat{\mathrm{C}})}{\sin(\widehat{\mathrm{A}})} = \frac{5\times\sin(40°)}{\sin(110°)}.$$

La calculatrice fournit $c = 3,420\ldots$ et donc $\mathrm{AB} = 3,42$ arrondi à 10^{-2}.

L'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{\mathrm{B}}) = \frac{1}{2}\times 5\times\frac{5\times\sin(40°)}{\sin(110°)}\times\sin(30°) = 12,5\times\frac{\sin(40°)\times\sin(30°)}{\sin(110°)}.$$

La calculatrice fournit $\mathscr{A} = 4,275\ldots$ et donc $\mathscr{A} = 4,28$ arrondi à 10^{-2}.

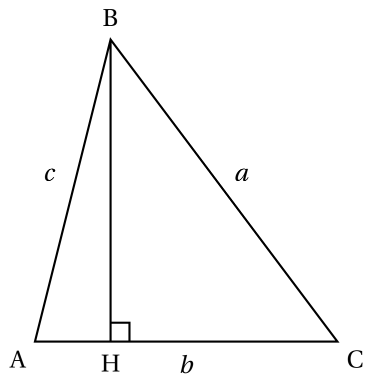
■

Encore une fois, nous avons effectué les calculs intermédiaires avec des valeurs exactes (en particulier pour le calcul de $\mathscr{A}$).

L'exercice qui suit est un approfondissement prévu par le programme officiel. On y établit la **formule d'AL-KASHI**. Cette formule est une généralisation du théorème de PYTHAGORE car elle est valable dans tout triangle et pas uniquement dans un triangle rectangle.

Exercice 10

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts et non alignés. On note H le pied de la hauteur issue de B du triangle ABC. On pose $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$ et $c = \mathrm{AB}$. On suppose dans cet exercice que le point H appartient au segment [AC] ou encore que l'angle $\widehat{\mathrm{B}}$ est aigu (mais la formule d'AL-KASHI est vraie dans tous les cas).



1) Exprimer a^2 en fonction de BH et HC puis exprimer a^2 en fonction de b, c et AH uniquement (on utilisera le triangle BAH, rectangle en H).

2) a) Exprimer AH en fonction de c et de $\widehat{\mathrm{A}}$.

b) En déduire la formule d'AL-KASHI : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{\mathrm{A}})$.

Solution 10 :

1) Dans le triangle BHC, rectangle en H, on a $a^2 = \mathrm{BC}^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{HC}^2$. Ensuite, dans le triangle ABH, rectangle en H, $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2$ et donc

$$\mathrm{BH}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AH}^2 = c^2 - \mathrm{AH}^2.$$

On en déduit que

$$a^2 = \mathrm{BC}^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{HC}^2 = c^2 - \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HC}^2.$$

Puisque le point H appartient au segment [AC], on en déduit encore que

$$a^2 = c^2 - \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HC}^2 = c^2 - \mathrm{AH}^2 + (\mathrm{AC} - \mathrm{AH})^2 = c^2 - \mathrm{AH}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \times \mathrm{AH} \times \mathrm{AC} + \mathrm{AH}^2 = b^2 + c^2 - 2b \times \mathrm{AH}.$$

2) a) Dans le triangle BHA, rectangle en H, on a $\cos\left(\widehat{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}}$ et donc $\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\cos\left(\widehat{\mathrm{A}}\right) = c\cos\left(\widehat{\mathrm{A}}\right)$.

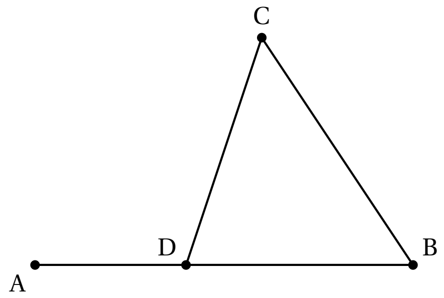
b) L'égalité de la question 1), à savoir $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times \mathrm{AH}$, s'écrit alors

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\widehat{\mathrm{A}}\right).$$

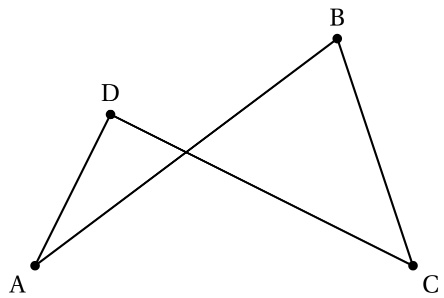
■

B Les quadrilatères

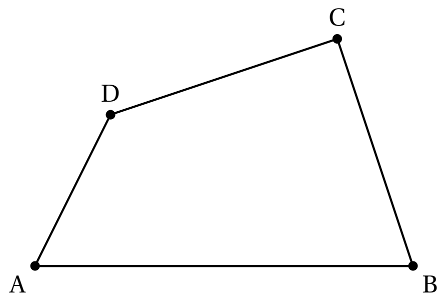
On rappelle maintenant les différents types de quadrilatère et les propriétés de ceux-ci. Un quadrilatère est constitué de quatre points deux à deux distincts. Les côtés du quadrilatère ABCD sont les segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. On appellera « vrai quadrilatère » un quadrilatère pour lequel il n'existe pas d'alignement de trois des quatre points comme ci-dessous.



Pour construire le quadrilatère ABCD, on place les points A, B, C et D puis on les relie par une ligne droite en suivant l'ordre des points : [AB], [BC], [CD] et [DA]. Les côtés opposés sont [AB] et [CD] d'une part et [AD] et [BC] d'autre part. Le quadrilatère ABCD est dit « croisé » quand deux côtés « opposés » se coupent :



Le quadrilatère est dit non croisé dans le cas contraire.

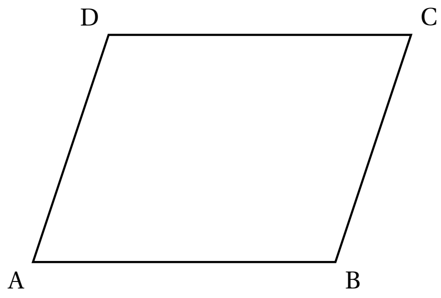


1 Les parallélogrammes

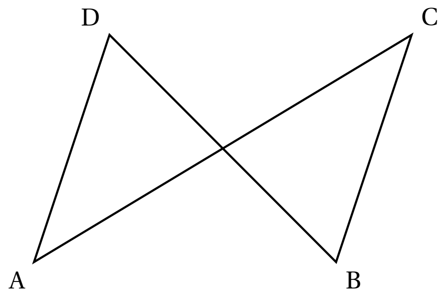
Définition 2

Un parallélogramme est un vrai quadrilatère non croisé dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

On redit que quand on écrit que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme, l'ordre des lettres est important : cela signifie que la droite (AB) est parallèle à la droite (CD) et que la droite (AD) est parallèle à la droite (BC). Le quadrilatère ABCD et le quadrilatère ACBD ne sont pas le même quadrilatère.



quadrilatère ABCD



quadrilatère ACBD

On rappelle alors les différentes situations dans lesquelles un quadrilatère est un parallélogramme :

Théoreme 9

Soit ABCD un vrai quadrilatère non croisé.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si les diagonales $[\mathrm{AC}]$ et $[\mathrm{BD}]$ se coupent en leur milieu.

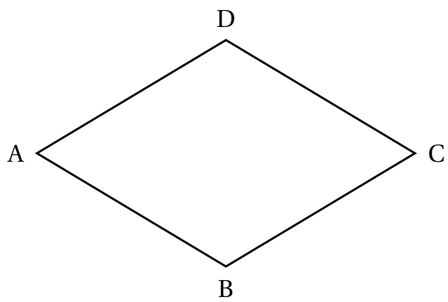
ABCD est un parallélogramme si et seulement si ABCD possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si les côtés opposés ont même longueur deux à deux.

2 Rectangles, losanges et carrés

Définition 3

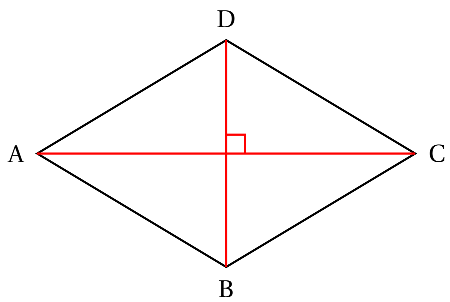
Un losange est un vrai quadrilatère non croisé dont les quatre côtés ont la même longueur.

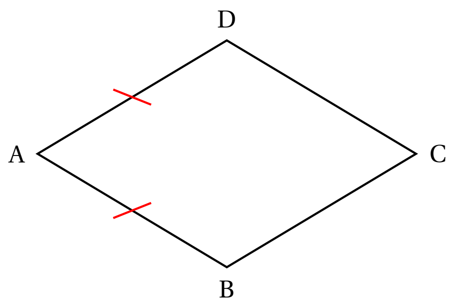


Théoreme 10

Soit ABCD un (vrai) parallélogramme.

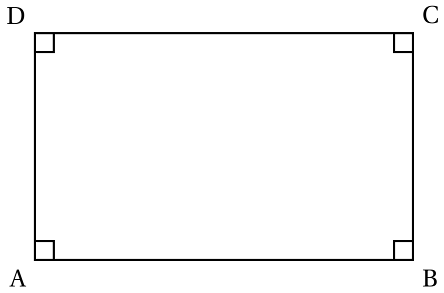
ABCD est un losange si et seulement si ses diagonales $[\mathrm{AC}]$ et $[\mathrm{BD}]$ sont perpendiculaires.
ABCD est un losange si et seulement si ABCD possède deux côtés consécutifs de même longueur.





Définition 4

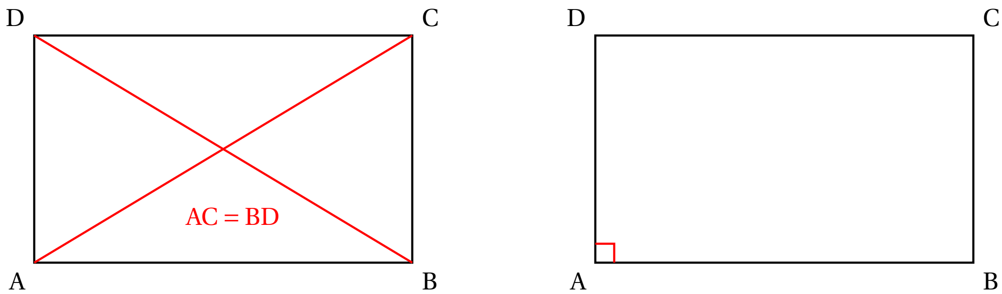
Un rectangle est un vrai quadrilatère non croisé dont les côtés consécutifs sont perpendiculaires.



Théoreme 11

Soit ABCD un (vrai) parallélogramme.

ABCD est un rectangle si et seulement si ses diagonales [AC] et [BD] ont la même longueur.
ABCD est un rectangle si et seulement si ABCD possède deux côtés consécutifs perpendiculaires (ou encore ABCD possède un angle droit).



Définition 5

Un carré est un vrai quadrilatère non croisé dont les côtés consécutifs sont perpendiculaires et dont les quatre côtés ont la même longueur. Dit autrement, un carré est un quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange.

Théoreme 12

Soit ABCD un rectangle.

ABCD est un carré si et seulement si ses diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires.
ABCD est un carré si et seulement si ABCD possède deux côtés consécutifs de même longueur.

Théoreme 13

Soit ABCD un losange.

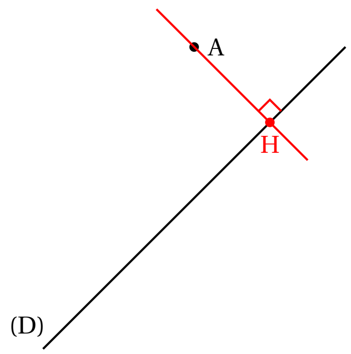
ABCD est un carré si et seulement si ses diagonales [AC] et [BD] ont la même longueur.
ABCD est un carré si et seulement si ABCD possède deux côtés consécutifs perpendiculaires (ou encore ABCD possède un angle droit).

C Distance d'un point à une droite

1 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition 6

Soient A un point et (D) une droite. Le projeté orthogonal H du point A sur la droite (D) est le point d'intersection de la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (D).



On note que si le point A appartient à la droite (D), le projeté orthogonal de A sur (D) est A lui-même.

2 Distance d'un point à une droite

Théoreme 14

Soient A un point et (D) une droite. Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (D).

H est le point de (D) le plus proche de A. Dit autrement, pour tout point M de (D), $\mathrm{AM} \geqslant \mathrm{AH}$ et de plus, $\mathrm{AM} = \mathrm{AH}$ si et seulement si $\mathrm{M} = \mathrm{H}$.

Démonstration : (au programme) Lé résultat est immédiat si A appartient à (D). Dorénavant, A n'appartient pas à (D).

Soit M un point de la droite (D), distinct du point H. Le triangle AHM est rectangle en H. D'après le théorème de PYTHAGORE, $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HM}^2$. Puisque $\mathrm{H} \neq \mathrm{M}$, on a $\mathrm{HM}^2 > 0$ et donc $\mathrm{AM}^2 > \mathrm{AH}^2$. On en déduit que $\mathrm{AM} > \mathrm{AH}$.

D'autre part, si $\mathrm{M} = \mathrm{H}$, alors $\mathrm{AM} = \mathrm{AH}$. Ainsi, dans tous les cas, $\mathrm{AM} \geqslant \mathrm{AH}$ et de plus, $\mathrm{AM} = \mathrm{AH}$ si et seulement si $\mathrm{M} = \mathrm{H}$.

■

Définition 7

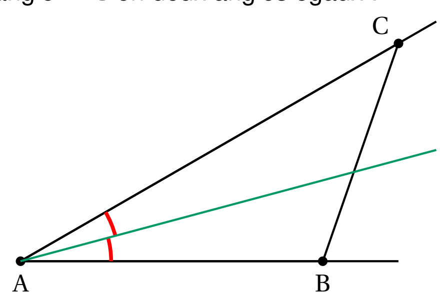
Soient A un point et (D) une droite. La distance du point A à la droite (D) est la plus courte distance du point A à un point de la droite (D).

Théoreme 15

Soient A un point et (D) une droite. La distance du point A à la droite (D) est la distance du point A à son projeté orthogonal sur la droite (D).

3 Bissectrices d'un angle

Dans ce paragraphe, l'expression « **bissectrice** de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ » désignera la **demi-droite** d'origine A située à l'intérieur de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ qui partage l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ en deux angles égaux :



Théoreme 16

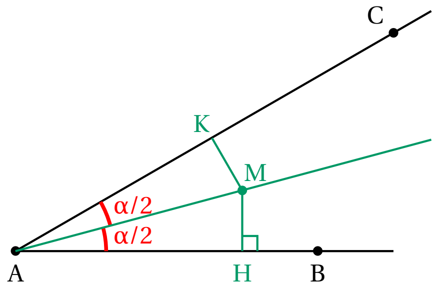
Soient A, B et C trois points deux à deux distincts et non alignés tels que la mesure en degré de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ soit comprise strictement entre $0°$ et $180°$.

La bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est l'ensemble des points intérieurs à l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ qui sont à égale distance des droites (AB) et (AC).

Démonstration :

• On note α la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$ Soit M un point du plan. Supposons que M appartienne à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

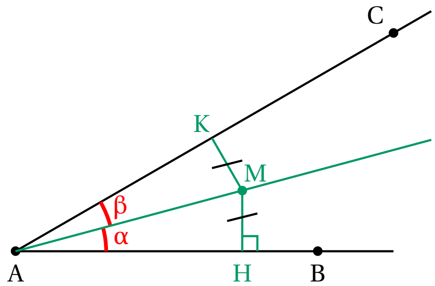
On note H et K les projetés orthogonaux respectifs du point M sur les droites (AB) et (AC). La distance du point M à la droite (AB) est MH et la distance du point M à la droite (AC) est MK.



Dans le triangle AHM rectangle en H, on a $\dfrac{MH}{MA} = \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ et donc $MH = MA\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. De même, dans le triangle AKM rectangle en K, on a $MK = MA\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. On en déduit que $MH = MK$ et donc que M est à égale distance des droites (AB) et (AC).

• On suppose maintenant que le point M est à égale distance des droites (AB) et (AC) et strictement à l'intérieur de cet angle. On note toujours H et K les projetés orthogonaux respectifs du point M sur les droites (AB) et (AC). On a donc $MH = MK$.

On note α une mesure en degrés de l'angle $\widehat{MAB}$ et β une mesure en degrés de l'angle $\widehat{MAC}$.



Dans le triangle AHM rectangle en H, on a $\sin(\alpha) = \dfrac{MH}{MA}$ et dans le triangle AKM rectangle en K, on a $\sin(\beta) = \dfrac{MK}{MA}$. Puisque $MH = MK$, on en déduit que $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$ puis que $\alpha = \beta$ (on admet que l'égalité $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$ entraine l'égalité $\alpha = \beta$, ce qui est intuitif).
Mais alors, le point M est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

On a montré que M est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ si et seulement si M est à égale distance des droites (AB) et (AC) (pour un point M intérieur à cet angle).

■

D Cercles et disques

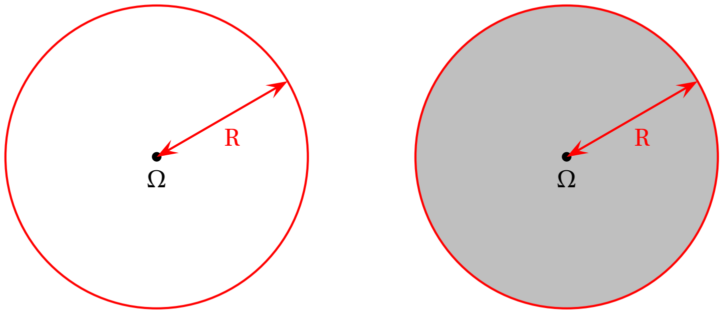
1 Définition

Définition 8

Soient Ω un point du plan et R un réel positif.

Le **cercle** de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$.

Le **disque** de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $\Omega M \leqslant R$.



L'expression « **diamètre** D du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R » peut désigner aussi bien la longueur égale au double du rayon $(D = 2R)$ qu'un segment $[AB]$ où A et B sont deux points du cercle, symétriques l'un de l'autre par rapport à Ω le centre du cercle (on dit alors que A et B sont diamétralement opposés ou aussi que $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$).

2 Cercles et triangles rectangles

On rappelle que :

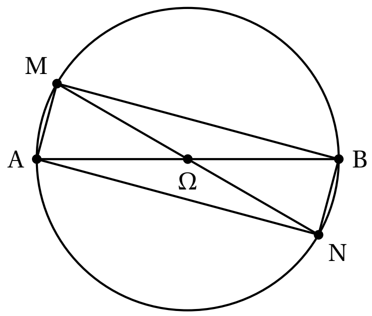
Théoreme 17

Soient A et B deux points distincts puis $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point du plan n'appartenant pas à la droite (AB).

Le triangle AMB est rectangle en M si et seulement si le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ privé des points A et B.

Démonstration : On note Ω le milieu du segment $[AB]$ de sorte que $\mathscr{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $R = \dfrac{AB}{2}$.

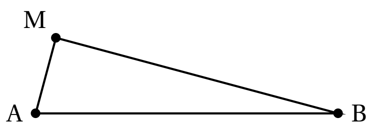
• Supposons que le point M appartienne au cercle $\mathscr{C}$ privé des points A et B. On note N le symétrique de M par rapport à Ω.

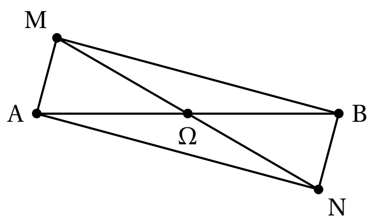


Puisque Ω est le milieu du segment $[AB]$ et le milieu du segment $[MN]$, les diagonales du quadrilatère AMBN se coupent en leur milieu. Donc le quadrilatère AMBN est un parallélogramme.

Ensuite, $MN = M\Omega + \Omega N = M\Omega + \Omega M = 2\Omega M = 2R = AB$. On en déduit que $MN = AB$. Ainsi, les diagonales du parallélogramme AMBN ont la même longueur et on en déduit que AMBN est un rectangle. En particulier, le triangle AMB est rectangle en M.

• Inversement, supposons que le triangle AMB est rectangle en M. On note toujours N le symétrique du point N par rapport au milieu Ω du segment $[AB]$.





Les diagonales $[MN]$ et $[AB]$ du quadrilatère AMBN ont le même milieu Ω et donc le quadrilatère AMBN est un parallélogramme qui possède un angle droit. On en déduit que le quadrilatère AMNB est un rectangle. Mais alors, ses diagonales ont la même longueur. On en déduit que

$$\Omega M = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}AB = \Omega A = R.$$

Par suite, M appartient au cercle de centre Ω et de rayon R ou encore M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

On a montré que pour tout point M n'appartenant pas à la droite (AB), le triangle AMB est rectangle en M si et seulement si le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

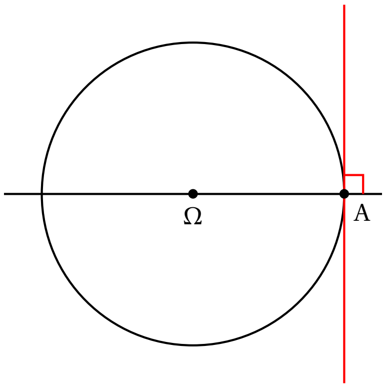
■

3 Tangente à un cercle en un point

Définition 9

Soient Ω un point et R un réel strictement positif. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R.

Soit A un point du cercle $\mathscr{C}$. La tangente à $\mathscr{C}$ en A est la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (ΩA).



Théoreme 18

Soient Ω un point et R un réel strictement positif. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R.

La distance de Ω à l'une de ses tangentes est égale au rayon R.

Démonstration : Soient A un point du cercle $\mathscr{C}$ puis (T) la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A. Par définition, le projeté orthogonal du point Ω sur la tangente (T) est le point A. La distance du point Ω à la droite (T) est donc égale à ΩA c'est-à-dire au rayon du cercle.

■

Théoreme 19

Soient Ω un point et R un réel strictement positif. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R.

Soit A un point de $\mathscr{C}$ puis (T) la tangente à $\mathscr{C}$ en A. Le cercle $\mathscr{C}$ et la tangente (T) ont en commun un point et un seul, le point A.

Démonstration : Le point A est commun au cercle $\mathscr{C}$ et à la tangente (T).

Soit B un point commun au cercle $\mathscr{C}$ et à la tangente (T). On va montrer que $B = A$. Puisque B appartient au cercle $\mathscr{C}$, $\Omega B = R$ et donc la distance ΩB est égale à la distance du point Ω à la droite (T). D'après le théorème 14, page 22, le point B est le projeté orthogonal du point Ω sur la tangente (T) ou encore $B = A$.

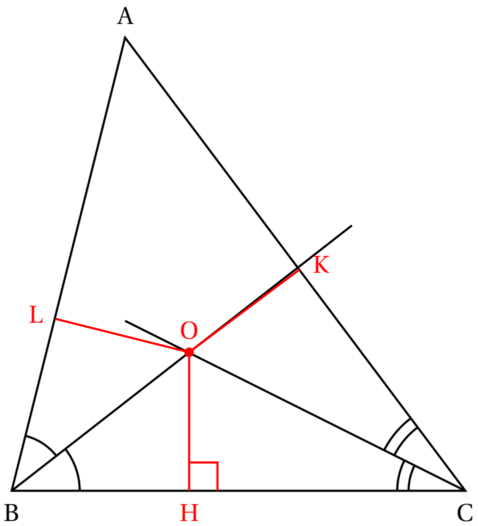
On a montré que la tangente (T) et le cercle $\mathscr{C}$ ont en commun un point et un seul à savoir le point A.

■

Exercice 11

Montrer que les bissectrices d'un triangle sont concourantes en le centre du cercle inscrit dans ce triangle (on admettra pour cela que deux bissectrices données sont sécantes sans chercher à le démontrer).

Solution 11 : Soient A, B et C trois points deux à deux distincts et non alignés. Dans le triangle ABC, on trace les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. On admet qu'elles sont sécantes en un point que l'on note O. On note encore H, K et L les projetés orthogonaux respectifs du point O sur les droites (BC), (CA) et (AB).

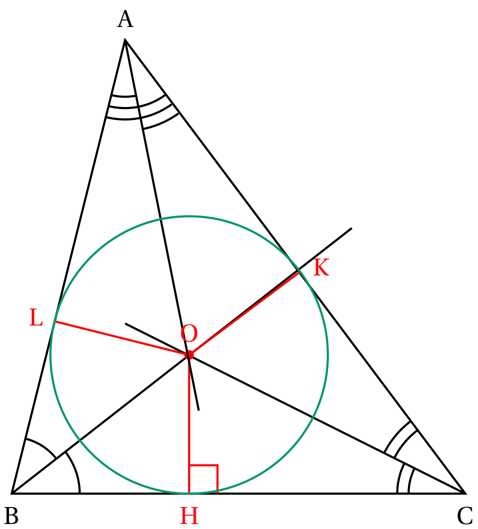


Puisque le point O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, le point O est à égale distance des droites (BA) et (BC) et puisque le point O est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$, le point O est à égale distance des droites (CA) et (CB).

Mais alors, la distance de O à la droite (AB) est égale à la distance de O à la droite (BC) et donc à la distance de O à la droite (AC). Ainsi, le point O est à égale distance des droites (AB) et (AC) et donc le point O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

On a montré que les trois bissectrices du triangle ABC sont concourantes.

On note alors R la valeur commune des trois distances OH, OK et OL puis on note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon R.



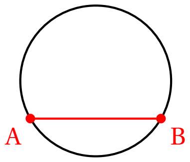
La droite (BC) est la perpendiculaire à la droite (OH) passant par H et donc la droite (BC) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en H. De même, la droite (CA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en K et la droite (AB) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en L.

Ainsi, le cercle $\mathscr{C}$ est le cercle tangent intérieurement aux trois côtés du triangle ABC ou encore le cercle $\mathscr{C}$ est le cercle inscrit dans le triangle ABC.

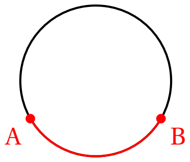
■

4 Le théorème de l'angle inscrit

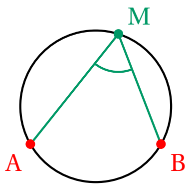
Un peu de vocabulaire :



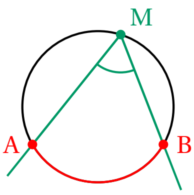
$[AB]$ est une **corde**



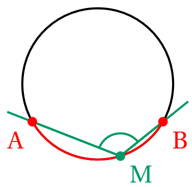
$\overset{\frown}{AB}$ est un **arc**



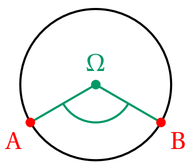
L'angle $\widehat{AMB}$ est un **angle inscrit** dans le cercle



L'angle $\widehat{AMB}$ **intercepte** l'arc $\overset{\frown}{AB}$



L'angle $\widehat{AMB}$ **n'intercepte pas** l'arc $\overset{\frown}{AB}$

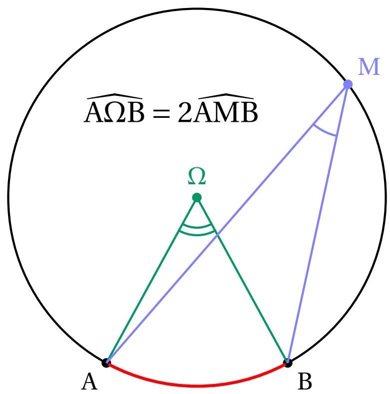


L'angle $\widehat{A\Omega B}$ est un **angle au centre**

Théoreme 20

Soient $\mathscr{C}$ un cercle puis A et B deux points distincts du cercle $\mathscr{C}$. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct des points A et B tel que l'angle au centre $\widehat{A\Omega B}$ et l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$.

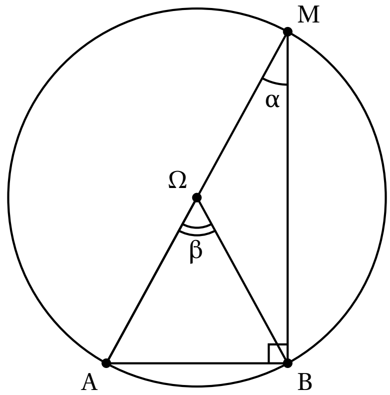
Alors, $\widehat{A\Omega B} = 2 \times \widehat{AMB}$ ou aussi $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2} \times \widehat{A\Omega B}$ (l'angle au centre est le double de l'angle inscrit).



Démonstration : On note R le rayon du cercle $\mathscr{C}$. On pose $\alpha = \widehat{AMB}$ et $\beta = \widehat{A\Omega B}$. On veut montrer que $\beta = 2\alpha$.

On envisage 3 situations :

Situation 1 : le point Ω appartient au segment $[AM]$ ou encore le point M est diamétralement opposé au point A.

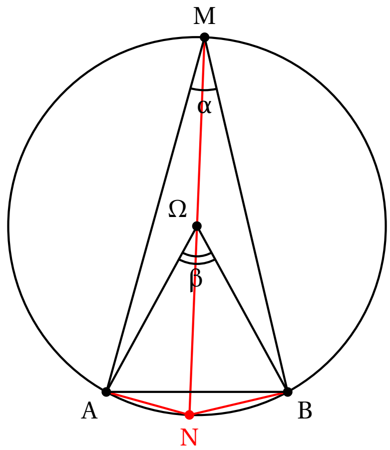


Dans ce cas, le triangle ABM est rectangle en B. On a donc $\widehat{\Omega AB} = 180° - 90° - \widehat{AMB} = 90° - \alpha$.

D'autre part, puisque $\Omega A = \Omega B = R$, le triangle $A\Omega B$ est isocèle en Ω. Donc, $\beta = 180° - \widehat{\Omega AB} - \widehat{\Omega BA} = 180° - 2\widehat{\Omega AB}$. On en déduit que

$$\beta = 180° - 2\widehat{\Omega AB} = 180° - 2(90° - \alpha) = 180° - 180° + 2\alpha = 2\alpha.$$

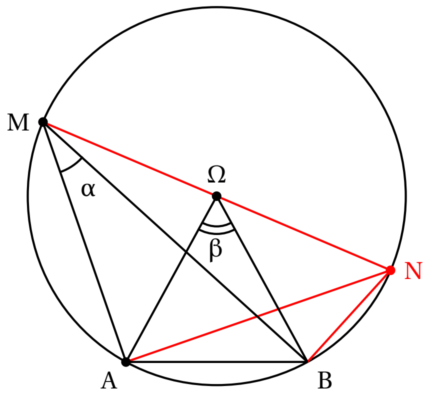
Situation 2 : le point Ω est à l'intérieur de l'angle $\widehat{AMB}$. On place le point N diamétralement opposé à M de sorte que le triangle MAN est rectangle en A et le triangle MBN est rectangle en B.



D'après la première situation, $\widehat{A\Omega N} = 2\widehat{AMN}$ et $\widehat{N\Omega B} = 2\widehat{NMB}$. En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$\beta = \widehat{A\Omega N} + \widehat{N\Omega B} = 2\widehat{AMN} + 2\widehat{NMB} = 2\left(\widehat{AMN} + \widehat{NMB}\right) = 2\alpha.$$

Situation 3 : le point Ω est à l'extérieur de l'angle $\widehat{AMB}$. On place encore le point N diamétralement opposé au point N. Par exemple, dans le cas où M est plus proche de A que de B :



Dans le triangle MAN rectangle en A, $\widehat{A\Omega N} = 2\widehat{AMN}$ (toujours d'après la situation 1) et dans le triangle MBN rectangle en B, $\widehat{B\Omega N} = 2\widehat{BMN}$. En retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$\beta = \widehat{A\Omega N} - \widehat{B\Omega N} = 2\widehat{AMN} - 2\widehat{BMN} = 2\left(\widehat{AMN} - \widehat{BMN}\right) = 2\alpha.$$

La situation où M est plus proche de B que de A est analogue.

Le théorème de l'angle inscrit est démontré dans tous les cas.

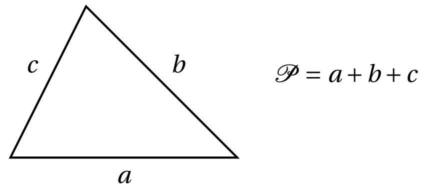
■

II Périmètres, aires et volumes usuels

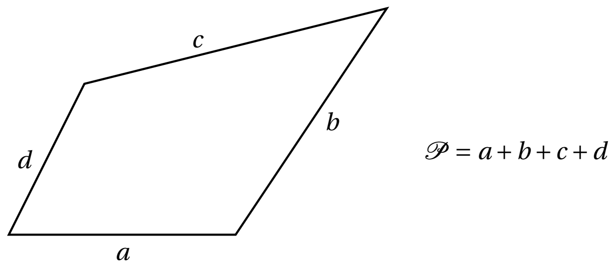
On rappelle enfin les périmètres, aires et volumes usuels. Le périmètre est noté $\mathscr{P}$, l'aire est notée $\mathscr{A}$ et le volume est noté $\mathscr{V}$.

A Périmètres

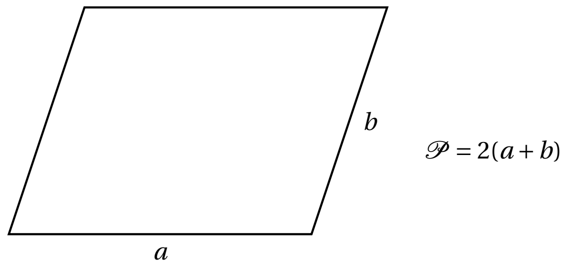
Périmètre d'un triangle dont les côtés ont pour longueur a, b et c :



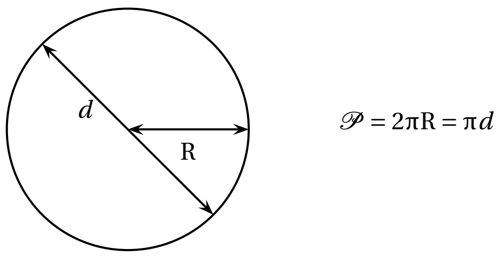
Périmètre d'un quadrilatère dont les côtés ont pour longueur a, b, c et d : $\mathscr{P} = a + b + c + d$.



Périmètre d'un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont pour longueur a et b : $\mathscr{P} = 2(a + b)$.

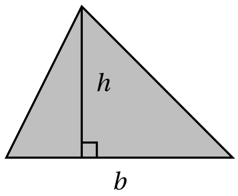


Périmètre d'un cercle de rayon R ou de diamètre $d = 2R$:



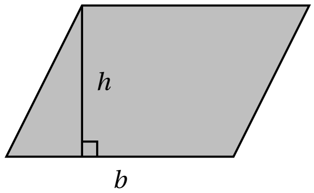
B Aires

Aire d'un triangle de base b et de hauteur h :



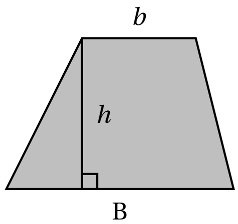
$$\mathscr{A} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Aire d'un parallélogramme de base b et de hauteur h :



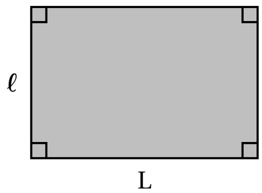
$$\mathscr{A} = b \times h = \text{base} \times \text{hauteur}$$

Aire d'un trapèze de petite base b, de grande base B et de hauteur h :



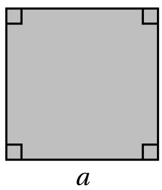
$$\mathscr{A} = \frac{(b+\mathrm{B}) \times h}{2} = \frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$$

Aire d'un rectangle longueur L et de largeur ℓ :



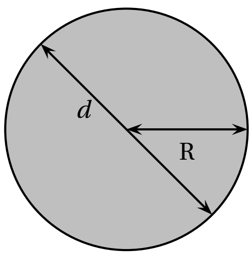
$$\mathscr{A} = \mathrm{L} \times \ell = \text{longueur} \times \text{largeur}$$

Aire d'un carré de côté de longueur a :



$$\mathscr{A} = a^2$$

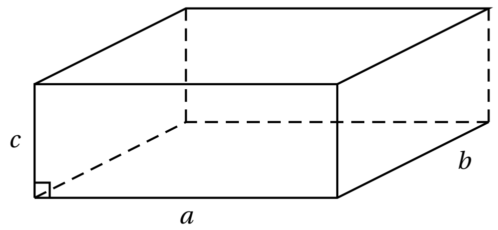
Aire d'un disque de rayon R ou de diamètre $d = 2\mathrm{R}$:



$$\mathscr{A} = \pi \mathrm{R}^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

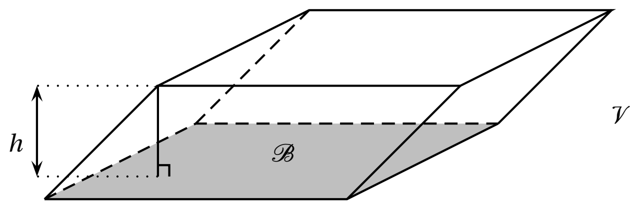
C Volumes

Volume d'un pavé droit :



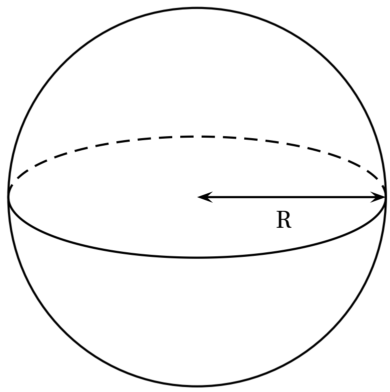
$\mathcal{V} = a \times b \times c$

Volume d'un parallélépipède :



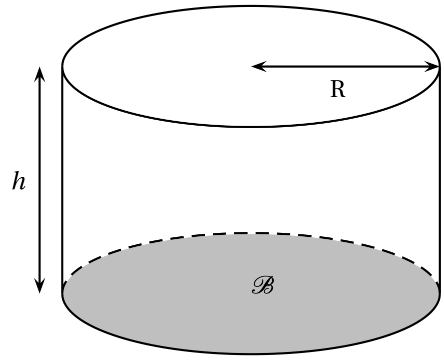
$\mathcal{V} = \mathscr{B} \times h =$ aire de la base × hauteur

Volume d'une sphère de rayon R :



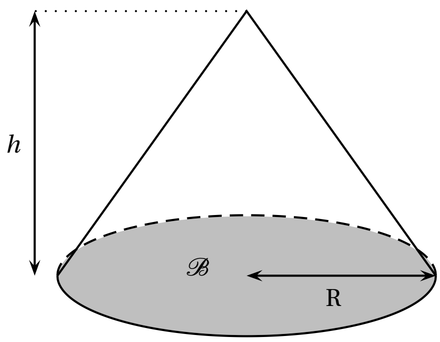
$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Volume d'un cylindre de révolution de rayon R et de hauteur h :



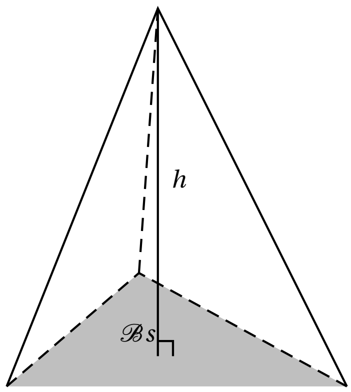
$\mathcal{V} = \mathscr{B} \times h = \pi R^2 h$

Volume d'un cône de révolution :



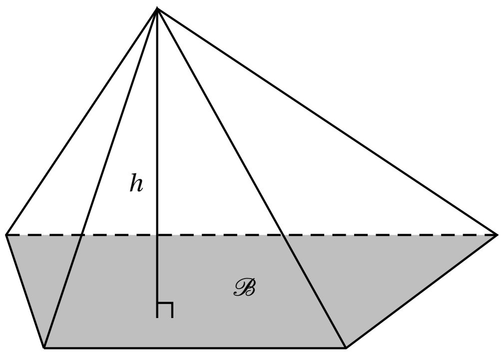
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Volume d'un tétraèdre :



$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$$

Volume d'une pyramide :



$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$$

