# Chapitre 7. Nombres complexes

## Plan du chapitre



# 1 Bref historique

Les nombres complexes sont nés d'un problème algébrique : la résolution de l'équation de degré 3. Replaçons nous dans le contexte. Nous sommes au XVI ème siècle. L'imprimerie a entre cinquante et cent ans d'existence. On ne connaît pas les nombres complexes. Les grands noms des mathématiques de l'époque sont Girolamo Cardano (en français, Jerome Cardan) (1501-1576), Nicolo Tartaglia (1500-1557), Ludovico Ferrari (1522-1565) et Rafael Bombelli (1526-1573). Ils travaillent sur la résolution des équations, mais n'ont pas encore à disposition notre formalisme (la lettre $x$). Par exemple, le problème « $x^3 + 6x = 20$ » devient sous la plume de Cardan : « Soit le cube et six fois le côté égal 20 ».

On sait résoudre l'équation de degré 1 avec une idée simple. L'égalité $2x - 4 = 6$ signifie : en partant d'un nombre inconnu $x$, en le multipliant par 2 puis en retranchant 4, on trouve 6. Pour retrouver le nombre initial, on effectue **les opérations contraires en sens inverse**. On réajoute 4 au nombre 6, puis on redivise le résultat obtenu par 2 et on obtient $x = \dfrac{4+6}{2} = 5$.

Il en est de même pour l'équation de degré 2 : $x^2-4 = 12$. Effectuer les opérations contraires consiste à réajouter 4 à 12 pour obtenir 16 puis à faire le contraire de l'élévation au carré à savoir reprendre la racine carrée. On obtient $x = \sqrt{4+12} = 4$ (ou $x = -\sqrt{4+12} = -4$). Les choses se compliquent avec l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$. Il ne semble plus possible de trouver les opérations successives effectuées à partir de l'inconnue $x$. Le problème est que **l'inconnue apparaît deux fois**. Tout se passe comme si on avait en fait deux inconnues : $x$ et $x^2$. Mais une astuce algébrique (la transformation canonique) permet de se ramener à une équation où l'inconnue apparaît une seule fois et donc où l'on comprend les différentes étapes de calcul effectuées à partir de l'inconnue $x$.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = 0,$$

et pour obtenir l'inconnue $x$, il n'y a plus qu'à partir de 0, ajouter 1, prendre la racine carrée ($\pm$) et finalement ajouter 2 pour obtenir $x = 2 + \sqrt{1} = 3$ ou $x = 2 - \sqrt{1} = 1$.

Passons à l'équation de degré 3. Par exemple, soit l'équation

$$x^3 + 3x^2 - 21x - 95 = 0 \quad (E_1).$$

Comme pour l'équation de degré 2, on cherche à transformer le premier membre de sorte que l'inconnue n'apparaîsse qu'une seule fois. On espère parvenir à une équation du genre $(x+1)^3 - 27 = 0$. On peut commencer le travail :

$$x^3 + 3x^2 - 21x - 95 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 - 3x - 1 - 21x - 95 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 - 24x - 96 = 0.$$

Malheureusement, le terme $-24x$ persiste. Conservons néanmoins l'idée en considérant la nouvelle inconnue $y = x + 1$. L'équation $(E_1)$ s'écrit maintenant plus simplement :

$$(E_1) \Leftrightarrow y^3 - 24(y-1) - 96 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 24y - 72 = 0 \ (E_1').$$

La nouvelle équation est un peu plus simple car le terme de degré 2 a disparu, mais un terme de degré 1 est toujours écrit. Si maintenant, on cherche à le faire disparaître à l'aide d'un nouveau changement d'inconnue, on peut, mais on fera réapparaître un terme de degré 2. En fait, une manipulation algébrique ne fera pas, dans le cas général, disparaître à la fois le terme de degré 1 et le terme de degré 2 (même si pour l'équation $x^3 + 3x^2 + 3x - 26 = 0$, cela marche en l'écrivant successivement $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 27 = 0$ puis $(x+1)^3 - 27 = 0$). Pour continuer, il faut une idée neuve. Cardan a eu l'idée de chercher une solution de $(E_1')$ sous la forme $y = u + v$ (pourquoi pas ?). Cela donne

$$\begin{aligned}(E_1') &\Leftrightarrow (u+v)^3 - 24(u+v) - 72 = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - 24(u+v) - 72 = 0\\ &\Leftrightarrow u^3 + v^3 - 72 + (u+v)(3uv - 24) = 0 \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} u^3 + v^3 - 72 = 0\\ 3uv - 24 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u^3 + v^3 = 72\\ u^3v^3 = 8^3 = 512\end{array}\right.\end{aligned}$$

Il faut faire attention à l'implication $\Leftarrow$ intermédiaire. Ce n'est pas une équivalence. Cette implication doit être comprise sous la forme : si on trouve deux réels $u$ et $v$ tels que la somme $u^3 + v^3$ vaut 72 et le produit $u^3v^3$ vaut 512, alors le nombre $y = u + v$ est solution de $(E')$ puis le nombre $x = y - 1$ est solution de $(E)$.

$u^3$ et $v^3$ sont les solutions de l'équation de degré 2 : $X^2 - 72X + 512 = 0$ $(*)$. Tout est là. « L'idée de Cardan » (il semblerait que Cardan ait beaucoup volé à d'autres comme Scipio del ferro par exemple) a permis de ramener la résolution d'une équation de degré 3 à la résolution d'une autre équation, de degré 2 celle là. Le discriminant réduit de $(*)$ est $\Delta' = 36^2 - 512 = 784 = (28)^2$. Les solutions de cette dernière équation sont donc $u^3 = 36 - 28 = 8 = 2^3$ et $v^3 = 36 + 28 = 64 = 4^3$. Le nombre $y = 2 + 4 = 6$ est donc solution de $(E')$ puis le nombre $x = y - 1 = 5$ est solution de $(E)$. On peut alors achever la résolution de $(E)$ en mettant $(x-5)$ en facteur :

$$(E) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 21x - 95 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2 + 8x + 19) = 0 \Leftrightarrow (x-5)((x+4)^2 + 3) = 0,$$

et $(E)$ admet une et une seule solution (réelle) à savoir 5.

Réessayons tout ceci avec l'équation $x^3 - 54x + 108 = 0$ $(E_2)$. On pose $x = u + v$ et on obtient :

$$(E_2) \Leftrightarrow (u+v)^3 - 54(u+v) + 108 = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + 108 + (u+v)(3uv - 54) = 0 \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} u^3 + v^3 = -108 \\ u^3v^3 = 18^3 = 5832 \end{array} \right. .$$

$u^3$ et $v^3$ sont alors les solutions de l'équation $X^2 + 108X + 5832 = 0$ $(*)$ dont le discriminant réduit vaut cette fois-ci : $\Delta' = 54^2 - 5832 = -2916 = -(54^2)$. $(*)$ n'a donc pas de solution, si on ne connaît pas les complexes. Pourtant, le polynôme $x^3 - 54x + 108$, de degré 3, a forcément une racine car pour $x = -1000$, il prend une valeur négative alors que pour $x = 1000$, il prend une valeur positive, et il doit donc bien s'annuler quelque part (la notion de continuité et le théorème des valeurs intermédiaires ne seront connus que bien plus tard). Il n'y a pas de raison que la méthode ne fonctionne plus, simplement parce que $(*)$ n'a pas de solution. Cardan (ou un autre ?) décide de continuer :

$$\begin{aligned} X^2 + 108X + 5832 &= (X+54)^2 - 54^2 + 5832 = (X+54)^2 + 54^2 = \mathbf{(X+54)^2} - \left(\mathbf{54\sqrt{-1}}\right)^{\mathbf{2}} \\ &= \left(X + 54 + 54\sqrt{-1}\right)\left(X + 54 - 54\sqrt{-1}\right). \end{aligned}$$

On y est, les complexes sont en train de naître. L'expression $\sqrt{-1}$ apparaît comme un objet absurde qui plus tard s'écrira $i$ (initiale du mot <u>impossible</u> et non pas du mot « imaginaire ») (il faut noter qu'aujourd'hui la notation $\sqrt{-1}$ n'a aucun sens car on ne sait pas si elle désigne le nombre $i$ ou le nombre $-i$ et on n'écrit jamais $\sqrt{-1}$).

On a ainsi $u^3 = 54\left(-1 - \sqrt{-1}\right)$ et $v^3 = 54\left(-1 + \sqrt{-1}\right)$ et donc

$$x = \sqrt[3]{54\left(-1 - \sqrt{-1}\right)} + \sqrt[3]{54\left(-1 + \sqrt{-1}\right)} = 3\left(\sqrt[3]{2\left(-1 - \sqrt{-1}\right)} + \sqrt[3]{2\left(-1 + \sqrt{-1}\right)}\right)$$

est solution de $(E_2)$. Le résultat sous cette forme n'a évidemment aucun intérêt et il reste encore à découvrir que

$$\left(1 - \sqrt{-1}\right)^3 = 1 - 3\sqrt{-1} + 3\left(\sqrt{-1}\right))^2 - \left(\sqrt{-1}\right)^3 = 1 - 3\sqrt{-1} - 3 + \sqrt{-1} = -2 - 2\sqrt{-1},$$

de sorte que l'on peut prendre $u = 3\left(1 - \sqrt{-1}\right)$. De même, en remplaçant $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$ (là, c'est la notion de conjugué qui pointe son nez), $v = 3(1 + \sqrt{-1})$ et finalement, $x = u + v = 6$. On reporte alors le nombre 6 dans l'équation, un peu sceptique, et on constate émerveillé que çà marche : $6^3 - 54 \times 6 + 108 = 216 - 324 + 108 = \mathbf{0}$. En s'étant permis d'écrire $\sqrt{-1}$, on est allé au bout des calculs, le « nombre » $\sqrt{-1}$ disparaissant en fin de parcours et n'ayant donc été qu'un outil intermédiaire, sans statut propre.

Dans un premier temps, ce nouvel objet $(\sqrt{-1})$ effraie, et va mettre du temps à s'imposer. Pour preuve, constatons qu'il a fallu attendre encore longtemps pour voir se mettre en place le vocabulaire et les notations que nous connaissons aujourd'hui : Descartes empoie le mot *imaginaire* en 1637, Euler introduit la notation $i$ en 1777, et il faut attendre 1831 pour que Gauss parle de *nombre complexe*.

Revenons maintenant au programme des classes préparatoires. Si la méthode de Cardan n'a pas à être connue dans sa version générale, les manipulations précédentes fournissent des exercices classiques d'écrits ou d'oraux de concours :

**Exercice 1.** (E.S.T.P 1998) Simplifier le nombre $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}}$.

**Solution 1.** On se sert des idées précédentes.
Posons $u = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$, $v = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ puis $a = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = u + v$. On a $u^3 + v^3 = 7 + 5\sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2} = 14$ et $uv = \sqrt[3]{49 - 50} = -1$ puis

$$a^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = (u^3 + v^3) + 3uv(u+v) = 14 - 3a.$$

$a$ est donc l'une des solutions réelles de l'équation $x^3 + 3x - 14 = 0$ $(E)$. Or, pour tout réel $x$,

$$x^3 + 3x - 14 = (x-2)\left(x^2 + 2x + 7\right) = (x-2)\left((x+1)^2 + 6\right).$$

Ainsi, l'équation $(E)$ admet une et une seule solution réelle à savoir 2. Finalement,

$$\boxed{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}} = 2.}$$

# 2 Forme algébrique des nombres complexes

## 2.1 Définition de $\mathbb{C}$

### 2.1.1 Définitions des opérations

Aucune construction précise du « corps des complexes » n'est au programme des classes préparatoires. Donc, on admettra qu'il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, contenant l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, tel que :

- les éléments de $\mathbb{C}$, appelés **nombres complexes**, sont de la forme $a+ib$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels et $i$ est un nombre non réel.
- $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations $+$ et $\times$ définies par :

$$\forall (a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4,\ (a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b'),$$

et

$$\forall (a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4,\ (a+ib)\times(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+a'b).$$

En particulier,

$$i^2 = -1.$$

- Les réels sont les complexes de la forme $a+0i$ où $a$ est réel. Plus précisément, pour $a$ réel, $a+0i = a$.

⇨ **Commentaire** .

◇ *Dans ce qui précède, rien ne tient debout, car un nombre complexe* $a+ib$ *est défini à partir du nombre* $i$ *et le nombre* $i$ *est défini à partir de la multiplication de deux nombres complexes ... Une construction méticuleuse serait nécessaire pour rendre l'ensemble cohérent.*

◇ *Quand* $(a,b) = (a',b') = (0,1)$*, la formule* $(a+ib)\times(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+ba')$ *fournit* $i^2 = -1$.

### 2.1.2 Propriétés de l'addition et de la multiplication

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ « prolongent » l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ en ce sens que la somme et le produit de deux nombres complexes qui sont des réels sont la somme et le produit de ces réels dans $\mathbb{R}$. Le théorème suivant dit que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ ont les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ :

**Théorème 1.**

| | |
|---|---|
| $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ z+z' = z'+z$ | $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ z\times z' = z'\times z$ |
| $\forall (z,z',z'') \in \mathbb{C}^3,\ (z+z')+z'' = z+(z'+z'')$ | $\forall (z,z',z'') \in \mathbb{C}^3,\ (z\times z')\times z'' = z\times(z'\times z'')$ |
| $\forall z \in \mathbb{C},\ z+0 = z$ | $\forall z \in \mathbb{C},\ z\times 1 = z$ |
| $\forall z \in \mathbb{C},\ z+(-z) = 0$ | |

⇨ **Commentaire** .

◇ *La première propriété dit que l'addition et la multiplication des nombres complexes sont* ***commutatives****. La deuxième propriété dit que l'addition et la multiplication des nombres complexes sont* ***associatives****. La troisième propriété dit que* $0$ *(le nombre complexe* $0+0i$*) est* ***élément neutre*** *pour l'addition et* $1$ *(le nombre complexe* $1+0i$*) est élément neutre pour la multiplication. La dernière propriété dit que* $-z$ *(si* $z = x+iy$ *où* $x$ *et* $y$ *sont deux réels, alors* $-z = -x-iy$*) est l'****opposé*** *de* $z$*. Ce vocabulaire sera défini précisément dans le chapitre « Structures ».*

◇ *Dans le théorème ci-dessus, il manque la notion d'inverse d'un nombre complexe non nul. Ceci sera analysé dans le paragraphe suivant.*

**Démonstration .** Nous ne démontrerons à titre d'exemple que l'associativité de la multiplication.

Soient $x$, $x'$, $x''$, $y$, $y'$ et $y''$ six réels puis $z = x+iy$, $z' = x'+iy'$ et $z'' = x''+iy''$.

$$\begin{aligned}(z\times z')\times z'' &= \left[(x+iy)(x'+iy')\right](x''+iy'') = \left[(xx'-yy')+i(xy'+yx')\right](x''+iy'') \\ &= \left((xx'-yy')x''-(xy'+yx')y''\right)+i\left((xx'-yy')y''+(xy'+yx')x''\right) \\ &= (xx'x''-yy'x''-xy'y''-yx'y'')+i(xx'y''+xy'x''+yx'x''-yy'y'')\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
z\times(z'\times z'') &= (x+iy)\left[(x'+iy')(x''+iy'')\right] = (x+iy)\left[(x'x''-y'y'')+i(x'y''+y'x'')\right]\\
&= \left(x(x'x''-y'y'')-y(x'y''+y'x'')\right)+i\left(x(x'y''+y'x'')+y(x'x''-y'y'')\right)\\
&= (xx'x''-xy'y''-yx'y''-yy'x'')+i(xx'y''+xy'x''+yx'x''-yy'y'').
\end{aligned}
$$

Donc, $(z\times z')\times z'' = z\times(z'\times z'')$.

❑

**Théorème 2.** $\forall (z,z',z'')\in\mathbb{C}^3,\ (z+z')\times z'' = z\times z'' + z'\times z''$.

⇨ **Commentaire** . *On dit que la multiplication est* ***distributive*** *sur l'addition.*

**Démonstration .** Soient $x$, $x'$, $x''$, $y$, $y'$ et $y''$ six réels puis $z=x+iy$, $z'=x'+iy'$ et $z''=x''+iy''$.

$$
\begin{aligned}
(z+z')\times z'' &= \left[(x+iy)+(x'+iy')\right](x''+iy'') = \left[(x+x')+i(y+y')\right](x''+iy'')\\
&= \left((x+x')x''-(y+y')y''\right)+i\left((x+x')y''+(y+y')x''\right)\\
&= (xx''+x'x''-yy''-y'y'')+i(xy''+x'y''+yx''+y'x'')\\
&= \left[(xx''-yy'')+i(xy''+yx'')\right]+\left[(x'x''-y'y'')+i(x'y''+y'x'')\right]\\
&= z\times z''+z'\times z''.
\end{aligned}
$$

❑

Ces différentes propriétés de calcul permettent de généraliser les règles sur le symbole $\Sigma$ énoncées dans le chapitre 4 pour des suites réelles : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites complexes et $\lambda$ et $\mu$ sont deux nombres complexes, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k+v_k)=\sum_{k=0}^{n}u_k+\sum_{k=0}^{n}v_k$ et plus généralement, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k+\mu v_k)=\lambda\sum_{k=0}^{n}u_k+\mu\sum_{k=0}^{n}v_k$.

### 2.1.3 Inverse d'un nombre complexe non nul.

**Théorème 3.** Tout nombre complexe non nul a un inverse pour la multiplication ou encore

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\ \exists! z'\in\mathbb{C}/\ z\times z'=1.$$

De plus, si $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, l'inverse $z'$ de $z$, noté $\dfrac{1}{z}$, est

$$\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

**Démonstration .** Soient $x$ et $y$ deux réels tels que $(x,y)\neq(0,0)$ puis $z=x+iy$. Tout d'abord, $x^2+y^2$ est la somme de deux réels positifs, l'un de ces deux réels étant strictement positif. Donc, $x^2+y^2$ est un réel strictement positif et en particulier $x^2+y^2$ n'est pas nul. Ensuite,

$$(x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\left(x\frac{x}{x^2+y^2}-y\frac{-y}{x^2+y^2}\right)+i\left(x\frac{-y}{x^2+y^2}+y\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1.$$

Ceci assure l'existence de $z'$ tel que $zz'=1$. Soit alors $z''$ un nombre complexe tel que $zz''=1$. On a donc $z''=z''(zz')=(z''z)z'=z'$. Ceci montre l'unicité de $z'$.

❑

⇨ **Commentaire** . *Nous reviendrons sur la notion d'inverse d'un nombre complexe dans le paragraphe « module d'un nombre complexe ».*

Par exemple, $\dfrac{1}{2+3i}=\dfrac{2-3i}{2^2+3^2}=\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}i$.

Une conséquence importante du théorème 3 pour la résolution des équations algébriques est

**Théorème 4.** Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

**Démonstration .** Soient $A$ et $B$ deux nombres complexes tels que $A\times B=0$.

Si $A\neq 0$ alors $A\times B=0\Rightarrow \dfrac{1}{A}\times A\times B=\dfrac{1}{A}\times 0\Rightarrow B=0$. Réciproquement, si $A=0$ ou $B=0$, alors $A\times B=0$.

❑

### 2.1.4 Identités usuelles

Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont donc exactement les mêmes que les règles de calcul dans $\mathbb{R}$. On a donc une généralisation à l'identique dans $\mathbb{C}$ des identités usuelles déjà connues dans $\mathbb{R}$. Commençons par la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique : si $z$ est un nombre complexe et $n$ est un entier naturel,

$$(1-z)\left(1+z+z^2+\ldots+z^n\right)=\left(1+z+z^2+\ldots+z^n\right)-\left(z+z^2+\ldots+z^n+z^{n+1}\right)=1-z^{n+1}$$

et donc (avec la convention : $\forall z\in\mathbb{C},\ z^0=1$, convention douteuse quand $z=0$),

**Théorème 5.**

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}z^k=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\text{ si }z\neq 1\\ n+1\text{ si }z=1\end{array}\right..$$

Comme dans $\mathbb{R}$, la formule précédente est un cas particulier de l'identité $a^n-b^n$ :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k=\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{n-k}b^k-a^{n-(k+1)}b^{k+1}\right)=a^n-b^n\text{ (somme télescopique).}$$

**Théorème 6.**

$$\forall(a,b)\in\mathbb{C}^2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k.$$

En particulier, $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$, $a^4-b^4=(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$, ...

Enfin, avec la même démonstration que celle déjà effectuée dans $\mathbb{R}$ (voir chapitre 4 « Les symboles $\Sigma$ et $\Pi$. Le binôme de Newton », page 22) :

**Théorème 7.** (formule du binôme de Newton)

$$\forall(a,b)\in\mathbb{C}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

### 2.1.5 Fonctions polynomiales. Factorisation de $P(z)$ par $z-a$

Une fonction polynomiale complexe est une fonction $P$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme :

$$P\ :\ z\mapsto a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$$

où $n$ est un entier naturel et $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$, sont des nombres complexes. Si $a_n$ est non nul, on dit que $P$ est une fonction polynomiale de degré $n$. On étudiera avec soin les fonctions polynomiales à la fin du premier semestre dans le chapitre « Polynômes ». On établira par exemple l'unicité des coefficients d'une fonction polynomiale avec le théorème : deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients. On peut d'ailleurs admettre ce théorème dès maintenant ce qui facilitera la rédaction de certains exercices. On établira également l'unicité du degré d'une fonction polynomiale non nulle.

Néanmoins, on commence dès aujourd'hui un travail sur ces fonctions polynomiales avec la notion de racine d'une fonction polynomiale et l'utilisation que l'on peut en faire pour factoriser une fonction polynomiale.

Définition 1. Soit $P$ une fonction polynomiale complexe. Soit $a$ un nombre complexe.

$a$ est **racine** de $P$ si et seulement si $P(a)=0$.

On note que tout nombre complexe est racine de la fonction nulle. Si $P$ est une fonction polynomiale non nulle, les racines de $P$ sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'**équation algébrique** $P(z)=0$. On verra dans le chapitre « Polynômes » que toute fonction polynomiale complexe de degré supérieur ou égal à $1$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss).

Pour l'instant, on peut énoncer :

**Théorème 8.** Soit $P$ une fonction polynomiale complexe non nulle de degré $n \geqslant 1$. Soit $a$ un nombre complexe.
$a$ est racine de $P$ si et seulement si il existe une fonction polynomiale non nulle $Q$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-a)Q(z)$.

**Démonstration .** Supposons qu'il existe une fonction polynomiale non nulle $Q$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-a)Q(z)$. Alors, $P(a) = (a-a)Q(a) = 0$ et donc $a$ est racine de $P$.

Inversement, posons : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ où $n \geqslant 1$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$, sont des nombres complexes. Supposons que $a$ soit un nombre complexe tel que $P(a) = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
P(z) &= P(z) - P(a) \text{ (puisque } P(a) = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k a^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(z^k - a^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(z^k - a^k\right) \text{ (c'est le moment où on voit qu'il y a } (z-a) \text{ en facteur)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k (z-a) \left(z^{k-1} - az^{k-2} - \ldots - a^{k-2}z - a^{k-1}\right) \\
&= (z-a)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \left(z^{k-1} - az^{k-2} - \ldots - a^{k-2}z - a^{k-1}\right)\right).
\end{aligned}$$

La fonction $Q \;:\; z \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \left(z^{k-1} - az^{k-2} - \ldots - a^{k-2}z - a^{k-1}\right)$ est une fonction polynomiale, non nulle car $P$ est non nulle et telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-a)Q(z)$ (on note au passage que le degré de $Q$ est $n-1$).

❏

La démarche ci-dessus fournit déjà une technique pour factoriser. Par exemple, pour $z \in \mathbb{C}$, posons $P(z) = z^2 - 6z + 8$. On a $P(2) = 0$ ou encore $2$ est racine de $P$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
P(z) = P(z) - P(2) &= \left(z^2 - 6z + 8\right) - \left(2^2 - 6 \times 2 + 8\right) \\
&= \left(z^2 - 2^2\right) - 6(z-2) = (z+2)(z-2) - 6(z-2) = (z-2)(z+2-6) \\
&= (z-2)(z-4).
\end{aligned}$$

Ce qui précède est déjà une première technique de factorisation. On dégagera petit à petit d'autre techniques. Une première nouvelle technique est la méthode d'identification des coefficients qui va être utilisée dans la question 3) de l'exercice suivant.
Pour traiter la question 2), on admet (très momentanément) des résultats exposés un peu plus loin : si $z = a + ib$ avec $a$ et $b$ **réels**, $a$ et $b$ sont uniquement définis et s'appellent respectivement la **partie réelle** et la **partie imaginaire** du nombre complexe $z$. Un réel est un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle et un imaginaire pur est un nombre complexe dont la partie réelle est nulle. Ceci vient du fait que si $a$ et $b$ sont deux **réels**, alors $a + ib = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$. Plus généralement, si $a$, $b$, $a'$ et $b'$ sont quatre **réels**, $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

**Exercice 2.** Soit $P$ la fonction polynomiale définie par : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 - 2(1+2i)z^2 + (-2+7i)z + 3(1-i)$.

**1)** Montrer que $P$ admet une racine réelle très simple.

**2)** Montrer que $P$ admet une racine imaginaire pure.

**3)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

**Solution 2.**

**1)** $P(1) = 1 - 2(1+2i) + (-2+7i) + 3(1-i) = 1 - 2 - 2 + 3 + i(-4+7-3) = 0$. Le nombre réel $z_1 = 1$ est racine de $P$.

**2)** Soient $y$ un réel puis $z = iy$. En regroupant les réels et les imaginaires purs, on obtient

$$\begin{aligned}
P(z) = P(iy) &= (iy)^3 - 2(1+2i)(iy)^2 + (-2+7i)(iy) + 3(1-i) = -iy^3 + 2(1+2i)y^2 - (7+2i)y + 3(1-i) \\
&= \left(2y^2 - 7y + 3\right) + i\left(-y^3 + 4y^2 - 2y - 3\right)
\end{aligned}$$

puis, par identification des parties réelles et imaginaires ($y$ étant un **réel**),

$$\begin{aligned}P(z)=0 &\Leftrightarrow \left(2y^2-7y+3\right)+i\left(-y^3+4y^2-2y-3\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2y^2-7y+3=0\\ -y^3+4y^2-2y-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=3 \text{ ou } y=\dfrac{1}{2}\\ -y^3+4y^2-2y-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow y=3.\end{aligned}$$

Le nombre $z_2=3i$ est racine de $P$

**3)** Puisque le nombre $z_1=1$ est racine de $P$, « on peut mettre $(z-1)$ en facteur dans $P(z)$ ». Il existe ainsi trois complexes $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-1)\left(az^2+bz+c\right)$. Pour $z\in\mathbb{C}$,

$$(z-1)\left(az^2+bz+c\right)=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c$$

puis, par identification des coefficients,

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z-1)\left(az^2+bz+c\right) &\Leftrightarrow \forall z\in\mathbb{C},\ z^3-2(1+2i)z^2+(-2+7i)z+3(1-i)=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=1\\ b-a=-2-4i\\ c-b=-2+7i\\ -c=3-3i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=1\\ b=-1-4i\\ c=-3+3i\\ c=-3+3i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=1\\ b=-1-4i\\ c=-3+3i\end{array}\right.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-1)\left(z^2-(1+4i)z-3+3i\right)$.

Le nombre $z_2=3i$ est racine du trinôme $z\mapsto z^2-(1+4i)z-3+3i$. Donc, il existe deux nombres complexes $a$ et $b$ tels que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $z^2-(1+4i)z-3+3i=(z-3i)(az+b)$. Pour $z\in\mathbb{C}$,

$$(z-3i)(az+b)=az^2+(-3ia+b)z-3ib$$

noindent puis, par identification des coefficients,

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C},\ z^2-(1+4i)z-3+3i=(z-3i)(az+b) &\Leftrightarrow \forall z\in\mathbb{C},\ z^2-(1+4i)z-3+3i=az^2+(-3ia+b)z-3ib\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=1\\ -3ia+b=-1-4i\\ -3ib=-3+3i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=1\\ b=-1-4i+3i\\ b=\dfrac{-3+3i}{-3i}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=1\\ b=-1-i\\ b=-1-i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=1\\ b=-1-i\end{array}\right..\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z-1)(z-3i)(z-1-i).$$

En particulier, pour $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=0\Leftrightarrow z=1$ ou $z=3i$ ou $z=1+i$ (puisque dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nuls si et seulement si l'un de ses facteurs est nul).

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est donc $\mathcal{S}=\{1,3i,1+i\}$.

---

## 2.2 Les différents ensembles de nombres

On démarre avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels qui permettent de compter des objets. Cet ensemble de nombres s'avère insuffisant pour parler de dettes ou de température en dessous de $0$. Il faut créer entre autres le nombre $-1$ car dans $\mathbb{N}$, l'équation $x+1=0$ n'a pas de solution.
On crée donc l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Cet ensemble de nombres est encore insuffisant pour diviser en $10$. Il faut créer le nombre $\dfrac{1}{10}=0,1$ car dans $\mathbb{Z}$, l'équation $10x=1$ n'a pas de solution.
On crée donc l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Ce sont les nombres de la forme $\dfrac{n}{10^p}$ où $n$ est un entier relatif et $p$ est un entier naturel. Dans ce nouvel ensemble de nombres, l'équation $3x=1$ n'a pas de solution. Dit autrement, on peut démontrer que le nombre $\dfrac{1}{3}$, une fois créé, n'est pas un nombre décimal.
On crée alors l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Ce sont les nombres de la forme $\dfrac{a}{b}$ où $a$ est un entier relatif et $b$ est un entier naturel non nul. Dans cet ensemble, l'équation $x^2=2$ ou encore le nombre $\sqrt{2}$, une fois créé, n'est pas un nombre rationnel.

On crée l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels comme $\pi$ ou $\sqrt{2}$ ou $e$ mais aussi $1$ ou $-1$ ou $\dfrac{1}{3}$. Dans cet ensemble de nombres, il reste encore des équations polynomiales qui n'ont pas de solution comme l'équation $x^2+1=0$ par exemple, ou encore il manque des nombres.
On crée un nombre $i$ vérifiant $i^2=-1$ puis on crée l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, nombres de la forme $a+ib$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels. Dans cet ensemble, l'équation $x^2+1=0$ a au moins solution. On démontre en algèbre que dans l'ensemble $\mathbb{C}$, toute équation polynomiale de degré supérieur ou égal à $1$ admet au moins une solution (théorème de d'Alembert-Gauss). D'un certain point de vue, on a donc enfin tous les nombres.

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{N} & \longrightarrow & \text{L'équation } x+1=0 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{N} \\
\subsetneq & & \\
\mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{L'équation } 10x=1 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{Z} \\
\subsetneq & & \\
\mathbb{D} & \longrightarrow & \text{L'équation } 3x=1 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{D} \\
\subsetneq & & \\
\mathbb{Q} & \longrightarrow & \text{L'équation } x^2=2 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{Q} \\
\subsetneq & & \\
\mathbb{R} & \longrightarrow & \text{L'équation } x^2=-1 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{R} \\
\subsetneq & & \\
\mathbb{C} & \longrightarrow & \text{Toute équation polynomiale a au moins une solution dans } \mathbb{C}
\end{array}$$

## 2.3 Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe

### 2.3.1 Egalité de deux nombres complexes sous forme algébrique

**Théorème 9.** Pour tous **réels** $a$ et $b$,

$$a+ib=0 \Leftrightarrow a=b=0.$$

Plus généralement, pour tous **réels** $a$, $a'$, $b$ et $b'$

$$a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow a=a' \text{ et } b=b'.$$

**Démonstration .**

• Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a+ib=0$. Supposons par l'absurde que $b\neq 0$. Alors, $i=-\dfrac{a}{b}$. En particulier, $i$ est un réel ce qui n'est pas (car aucun réel n'a pour carré le nombre $-1$).
Donc, $b=0$ puis $a=0$. Réciproquement, si $a=b=0$, alors $a+ib=0$.

• Soient $a$, $a'$, $b$ et $b'$ quatre réels.

$$a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow (a-a')+i(b-b')=0 \Leftrightarrow a-a'=b-b'=0 \Leftrightarrow a=a' \text{ et } b=b'.$$

❏

La propriété « $a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow a=a'$ et $b=b'$ » donne la possibilité d'**identifier** les coefficients quand ceux-ci sont **réels**. Par exemple, si $x$ et $y$ sont deux réels,

$$(x+y)+i(x-y)=4+2i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x+y)+(x-y)=4+2 \\ (x+y)-(x-y)=4-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right. .$$

Ceci devient complètement faux si l'un des nombres $a$, $a'$, $b$ ou $b'$ n'est plus réel. Plus précisément, si $a$, $a'$, $b$ ou $b'$ sont des nombres complexes quelconques,

$$a+ib=a'+ib' \not\Rightarrow a=a' \text{ et } b=b'.$$

Par exemple, $0+0\times i=0=1+i\times i$ et pourtant $0\neq 1$ et $0\neq i$. ❏

### 2.3.2 Partie réelle et partie imaginaire. Définitions et propriétés

Le théorème 9 dit que les deux nombres réels $a$ et $b$ définissant le nombre complexe $z = a + ib$ sont uniquement définis par le nombre complexe $z$. Ceci motive la définition suivante :

Définition 2. Soient $a$ et $b$ deux réels puis $z = a + ib$.

$a$ est la **partie réelle** du nombre complexe $z$ et se note $\mathrm{Re}(z)$. $b$ est la **partie imaginaire** du nombre complexe $z$ et se note $\mathrm{Im}(z)$.
Pour tout nombre complexe $z$, on a donc

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\ \mathrm{Im}(z).$$

L'expression « partie imaginaire » est piégeuse. On aurait envie de dire que la partie imaginaire du nombre complexe $a + ib$ (où $a$ et $b$ sont deux réels) est $ib$. Ce n'est pas le cas. La partie imaginaire du nombre complexe $a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, est $b$ et en particulier, **la partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel.**

Définition 3.

Les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle sont les **réels**.
Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle sont les **imaginaires purs**.

**Notation.** L'ensemble des réels est $\mathbb{R}$. L'ensemble des imaginaires purs, c'est-à-dire l'ensemble des nombres de la forme $iy$ où $y$ décrit $\mathbb{R}$, se note $i\mathbb{R}$.

**Théorème 10.**

- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{Re}\,(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}\,(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.
- $\forall (\lambda, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}\,(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$.

Démonstration .

- Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$z + z' = (\mathrm{Re}(z) + i\ \mathrm{Im}(z)) + (\mathrm{Re}(z') + i\ \mathrm{Im}(z')) = (\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')) + i(\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')).$$

Puisque $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z')$ sont deux réels, on a montré que $\mathrm{Re}\,(z + z') = \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}\,(z + z') = \mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z')$.

- Soit $(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

$$\lambda z = \lambda(\mathrm{Re}(z) + i\ \mathrm{Im}(z)) = \lambda \mathrm{Re}(z) + i\ \lambda \mathrm{Im}(z).$$

Puisque $\lambda \mathrm{Re}(z)$ et $\lambda \mathrm{Im}(z)$ sont deux réels, on a montré que $\mathrm{Re}\,(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}\,(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$.

❏

Ainsi, pour tout nombre complexe $z$, $\mathrm{Re}(2z + 3) = 2\mathrm{Re}(z) + 3$ et $\mathrm{Im}(2z + 3) = 2\mathrm{Im}(z)$.

Si $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes quelconques, en général $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z')$ (ou aussi $\mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$). Par exemple, $\mathrm{Re}(i \times i) = \mathrm{Re}(-1) = -1$ alors que $\mathrm{Re}(i) \times \mathrm{Re}(i) = 0$. Plus généralement, si $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ où $x$, $x'$, $y$ et $y'$ sont quatre réels, alors $\mathrm{Re}(zz') = xx'-yy'$ alors que $\mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Re}(z') = xx'$.

Le théorème 10 se généralise immédiatement par récurrence à $n$ nombres complexes, $n \geqslant 2$ (linéarité de la somme).

**Théorème 10 bis.** Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\,(u_k)$ et $\mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\,(u_k)$.

## 2.4 Représentation géométrique des nombres complexes

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

- A tout point du plan $M$ de coordonnées $(x, y)$, on peut associer le nombre complexe $z_M = x + iy$. Le nombre complexe $z_M$ s'appelle l'**affixe** du point $M$.

Inversement, à tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut associer le point $M(z)$ de coordonnées $(x, y)$. $M$ s'appelle l'**image ponctuelle** du nombre complexe $z$.

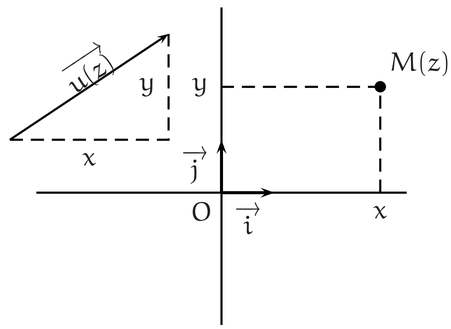
- A tout vecteur du plan $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(x, y)$, on peut associer le nombre complexe $z_{\overrightarrow{u}} = x + iy$. Le nombre $z_{\overrightarrow{u}}$ s'appelle l'**affixe** du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Inversement, à tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut associer le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(x, y)$. $\overrightarrow{u}$ s'appelle l'**image vectorielle** du nombre complexe $z$.

⇨ **Commentaire**. *Cette correspondance entre les points du plan ou les vecteurs du plan et les nombres complexes est bijective.*

*Ceci aura pour conséquence qu'en avançant dans les études, on aura de plus en plus tendance à identifier les points du plan et les nombres complexes. Par exemple, le plan muni d'un repère orthonormé (direct) est appelé le « plan complexe ». Quand on fera des dessins, on aura de plus en plus tendance à écrire z au dessus d'un point à la place de* $M(z)$ *(image ponctuelle du nombre complexe z).*

Si le point $M$ a pour affixe $z$, sur un dessin on peut écrire $M(z)$ ou si le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe $z$, sur un dessin on peut écrire $\overrightarrow{u}(z)$. Ainsi, si $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont deux réels, on a le dessin suivant




**Théorème 11.**

• Soient $A$ et $B$ deux points du plan. Le milieu $I$ du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

• Soient $A$ et $B$ deux points du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

**Démonstration.** Soient $A$ et $B$ deux points du plan de coordonnées respectives $(x_A, y_A)$ et $(x_B, y_B)$.

• On sait que $I$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$. Donc,

$$z_I = \frac{x_A + x_B}{2} + i\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2}\left((x_A + iy_A) + i(x_B + iy_B)\right) = \frac{1}{2}(z_A + z_B).$$

• On sait que $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. Donc,

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = z_B - z_A.$$

❏

**Exercice 3.** Pour tout nombre complexe $z$, on pose $Z = (1 + i)z + 1 - i$.

Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $Z$ soit un imaginaire pur.

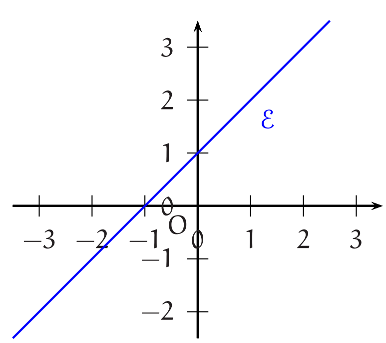
**Solution 3.** Soit $z$ un nombre complexe. Posons $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont deux réels.

$$Z = (1 + i)(x + iy) + 1 - i = x - y + 1 + i(x + y - 1).$$

Par suite, $\text{Re}(Z) = x - y + 1$ puis

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0.$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $Z$ soit un imaginaire pur est la droite d'équation $x - y + 1 = 0$.



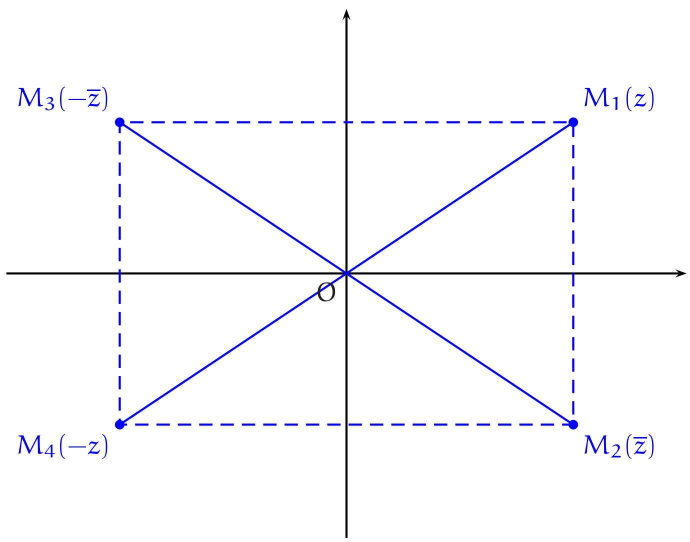
## 2.5 Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION 4.

Pour tout nombre complexe $z$, le **conjugué** de $z$ est le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par

$$\overline{z} = \text{Re}(z) - i\ \text{Im}(z).$$

Géométriquement, le point d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique du point d'affixe $z$ par rapport à l'axe des abscisses. Profitons-en pour signaler que le point d'affixe $-z$ est le symétrique du point d'affixe $z$ par rapport à l'origine et que le point d'affixe $-\overline{z}$ est le symétrique du point d'affixe $z$ par rapport à l'axe des ordonnées.




**Théorème 12.** $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{(\overline{z})} = z$.

L'application $z \mapsto \overline{z}$ est donc une involution et en particulier l'application $z \mapsto \overline{z}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur lui-même.

DÉMONSTRATION . Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\overline{(\overline{z})} = \overline{\text{Re}(z) - i\text{Im}(z)} = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z) = z.$$

❏

**Théorème 13.**

**1)** $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

**2) a)** $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

**b)** $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$.

**3) a)** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{z} \neq 0$ et $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

**b)** $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

**c)** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$.

DÉMONSTRATION .

**1)** Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où $x$, $y$, $x'$ et $y'$ sont quatre réels.

$$\overline{z + z'} = \overline{x + iy + x' + iy'} = \overline{(x + x') + i(y + y')} = (x + x') - i(y + y') = x - iy + x' - iy' = \overline{z} + \overline{z'}.$$

**2) a)** $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où $x$, $y$, $x'$ et $y'$ sont quatre réels.

$$\begin{aligned}\overline{z \times z'} &= \overline{(x + iy)(x' + iy')} = \overline{(xx' - yy') + i(xy' + yx')} = (xx' - yy') - i(xy' + yx')\\ &= (xx' - (-y)(-y')) + i(x(-y') + (-y)x') = (x - iy)(x' - iy')\\ &= \overline{z} \times \overline{z'}.\end{aligned}$$

**b)** Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$.

• Le résultat est vrai quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$. Alors,

$$\begin{aligned}\overline{(z^{n+1})} &= \overline{z^n \times z}\\ &= \overline{z^n} \times \overline{z} \text{ (d'après 2)a))}\\ &= \overline{z}^n \times \overline{z} \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= \overline{z}^{n+1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

**3) a)** Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z}} = \overline{1} = 1.$$

Ceci montre que $\overline{z} \neq 0$ et que $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

**b)** Soit $(z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

**c)** Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On sait déjà que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$. Soit $n \in \mathbb{Z}^{-*}$. Alors $-n > 0$ et

$$\overline{(z^n)} = \overline{\left(\frac{1}{z^{-n}}\right)} = \frac{1}{\overline{z}^{-n}} = \overline{z}^n.$$

❑

⇨ **Commentaire** .

◇ *On peut résumer le théorème précédent en disant que « le conjugué marche bien avec toutes les opérations ». Par exemple,* $\overline{\left(\frac{(1-i)z^2+3i}{(z-3+i)^2}\right)} = \frac{(1+i)\overline{z}^2-3i}{(\overline{z}-3-i)^2}$.

◇ *Le 1) du théorème 10 se généralise à une somme finie quelconque :* $\overline{\sum_{k=0}^{n} u_k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{u_k}$.

**Exercice 4.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

**1)** $(3-i)\overline{z} - 2 + 4i = 0$.
**2)** $(1+i)z + (3-i)\overline{z} = 1 + 2i$.

**Solution 4.**

**1)** Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(3-i)\overline{z} - 2 + 4i = 0 &\Leftrightarrow \overline{(3-i)\overline{z} - 2 + 4i} = 0 \Leftrightarrow (3+i)z - 2 - 4i = 0\\ &\Leftrightarrow z = \frac{2+4i}{3+i} \Leftrightarrow z = \frac{(2+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} \Leftrightarrow z = \frac{10+10i}{3^2+1^2}\\ &\Leftrightarrow z = 1 + i.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\{1+i\}$.

**2)** Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont deux réels.

$$\begin{aligned}(1+i)z + (3-i)\overline{z} = 1 + 2i &\Leftrightarrow (1+i)(x+iy) + (3-i)(x-iy) = 1 + 2i\\ &\Leftrightarrow (x-y) + i(x+y) + (3x-y) + i(-x-3y) = 1 + 2i\\ &\Leftrightarrow (4x-2y) + i(-2y) = 1 + 2i\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x - 2y = 1\\ -2y = 2 \end{array}\right. \text{ (par identification des parties réelles et imaginaires)}\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -1\\ x = -\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow z = -\frac{1}{4} - i.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{-\frac{1}{4} - i\right\}$.

**Théorème 14.**

**1)** $\forall z \in \mathbb{C}$, $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.

**2)** $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

**3)** $\forall z \in \mathbb{C}$, $(z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z)$ et $(z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z)$.

**Démonstration .**

**1)** et **2)** Soit $z \in \mathbb{C}$. $z + \overline{z} = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z) = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = 2i\mathrm{Im}(z)$.
Par suite, on a aussi $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

**3)** Soit $z \in \mathbb{C}$. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

❏

## 2.6 Module d'un nombre complexe

Définition 5.

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le **module** de $z$ est le nombre réel positif noté $|z|$ défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

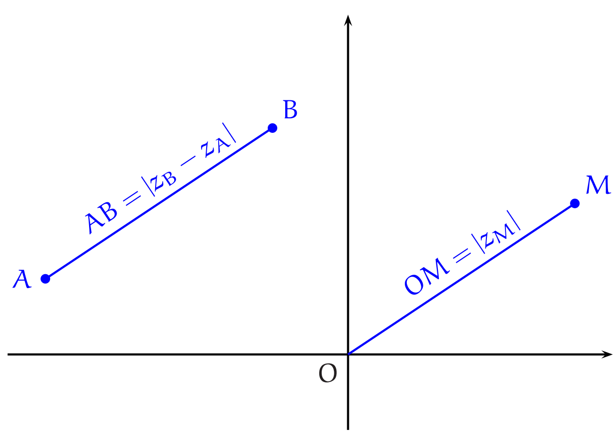
⇨ **Commentaire** . *Si $z$ est un nombre réel $x$, alors $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$ où $|x|$ désigne la valeur absolue du réel $x$. Le module d'un réel est donc la valeur absolue de ce réel.*

Le module d'un nombre complexe s'interprète bien sûr géométriquement. On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Si $M$ est un point du plan d'affixe $z_M$, alors immédiatement,

$$|z_M| = OM.$$

Plus généralement, si $A$ et $B$ sont deux points du plan,

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = |(x_B - x_A) + i(y_B - y_A)| = |z_B - z_A| = \left|z_{\overrightarrow{AB}}\right|.$$




Le module permet alors de décrire simplement les cercles et les disques du plan. Soit $\Omega$ un point du plan d'affixe $\omega$ et $R$ un réel positif.

- Le cercle de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et de rayon $R$ est l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $|z - \omega| = R$ ou encore, en identifiant un point et son affixe,

$$\mathcal{C}(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C} / \ |z - \omega| = R\}.$$

- Le disque fermé (resp. ouvert) de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et de rayon $R$ est l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $|z - \omega| \leqslant R$ (resp. $|z - \omega| < R$) ou encore,

$$\mathcal{D}_f(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C} / \ |z - \omega| \leqslant R\} \text{ (resp. } \mathcal{D}_o(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C} / \ |z - \omega| < R\}).$$

Nous allons maintenant fournir un certain nombre de propriétés algébriques du module. Commençons par signaler une écriture du module à l'aide du conjugué :

**Théorème 15.**

**1)** Pour tout nombre complexe $z$, $z\overline{z} = |z|^2$.

**2)** Pour tout nombre complexe $z$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

**Démonstration .** **1)** Soit $z$ un nombre complexe.

$$z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z))(\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)) = (\mathrm{Re}(z))^2 - i^2(\mathrm{Im}(z))^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 = |z|^2.$$

**2)** En particulier, $|z| = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$. ❏

⇨ **Commentaire** .

◇ *$z\overline{z}$ est un réel positif et on peut donc écrire $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.*

◇ *L'égalité $z\overline{z} = |z|^2$ nous permet aussi de reparler de l'inverse d'un nombre complexe non nul. D'après ce qui précède, si $z$ est un nombre complexe non nul, alors $|z| \neq 0$ et on peut écrire*

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

*Par exemple,* $\dfrac{1}{3-2i} = \dfrac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{3+2i}{3^2+(-2)^2} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i$ *ou aussi* $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i-1}{1^2+(-1)^2} = i$. *On a l'habitude de dire que l'on rend réel le dénominateur en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.*

Les égalités $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$ et $z\overline{z} = |z|^2$ permettent assez souvent de se passer de poser $z = x + iy$. C'est le cas dans l'exercice suivant.

**Exercice 5.** Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$. Déterminer et construire l'ensemble des points du plan d'affixe $z$ tels que $Z$ soit imaginaire pur.

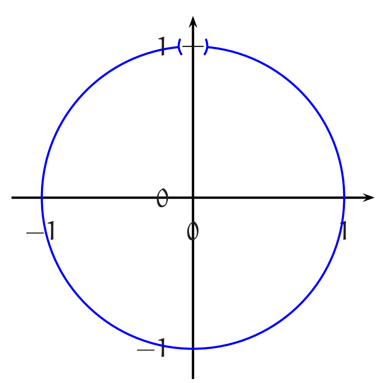
**Solution 5.** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}(Z) = Z + \overline{Z} &= \frac{z+i}{z-i} + \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i} = \frac{(z+i)(\overline{z}+i) + (\overline{z}-i)(z-i)}{(z-i)\overline{(z-i)}} \\ &= \frac{2|z|^2 - 2}{|z-i|^2} = \frac{2\left(|z|^2-1\right)}{|z-i|^2}. \end{aligned}$$

Par suite, pour $z \neq i$,

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(|z|^2-1\right)}{|z-i|^2} = 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ (et } z \neq i).$$

L'ensemble des points d'affixe $z$ tels que $Z$ soit imaginaire pur est le cercle de centre $O$ et de rayon $1$ privé du point de coordonnées $(0, 1)$.



**Théorème 16.**

**1) a)** $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

**b)** $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.

**2) a)** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

**b)** $\forall (z,z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

**c)** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$.

**Démonstration .**

**1) a)** Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes.

$$|zz'|^2 = zz'\overline{(zz')} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2 = \left(|z||z'|\right)^2.$$

Puisque $|zz'|$ et $|z||z'|$ sont deux réels positifs, on en déduit que $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

**b)** Le résultat se démontre par récurrence grâce à 1)a).

**2) a)** Soit $z$ un nombre complexe non nul. Tout d'abord, $|z| \neq 0$ puis $|z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z}\right| = |1| = 1$ et donc $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

**b)** Soient $z$ un nombre complexe puis $z'$ un nombre complexe non nul. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

**c)** Soit $z$ un nombre complexe non nul. On sait déjà que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$. Soit $n \in \mathbb{Z}^{-*}$. Alors, $-n > 0$ puis

$$|z^n| = \left|\frac{1}{z^{-n}}\right| = \frac{1}{|z|^{-n}} = |z|^n.$$

❏

⇨ **Commentaire** .

◇ *Le théorème 11 dit que « le module fonctionne bien avec la multiplication ». Si on veut calculer le module de* $\dfrac{(2+i)(3-2i)^2}{4+3i}$ *par exemple, il serait très maladroit de développer le carré puis de rendre réel le dénominateur. Ce module doit se calculer ainsi :*

$$\left|\frac{(2+i)(3-2i)^2}{4+3i}\right| = \frac{|2+i| \times |3-2i|^2}{|4+3i|} = \frac{\sqrt{5} \times 13}{\sqrt{25}} = \frac{13}{\sqrt{5}}.$$

◇ *Si on écrit explicitement l'égalité* $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ *en passant aux parties réelles et imaginaires, cela donne :*

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \ (\textit{identité de } \textsc{Lagrange}).$$

*Ce résultat a une application en arithmétique (en se restreignant au cas particulier où* $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$*) : si deux entiers sont somme de deux carrés parfaits, alors leur produit est somme de deux carrés parfaits. Par exemple,*

$$221 = 13 \times 17 = \left(3^2+2^2\right)\left(4^2+1^2\right) = (3 \times 4 - 2 \times 1)^2 + (3 \times 1 + 2 \times 4)^2 = 10^2 + 11^2.$$

*Cette constatation permet de ramener le problème de la décomposition d'un entier en somme de deux carrés parfaits (ce qui n'est pas toujours possible) au problème de la décomposition de chaque nombre premier en somme de deux carrés parfaits. Ceci n'est pas anecdotique. Il n'est pas rare que les nombres complexes soient un outil important pour faire de l'arithmétique.*

**Théorème 17.**

**1)** $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

**2)** $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $|\mathrm{Re}(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ et $|\mathrm{Im}(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

**Démonstration .** Soit $z$ un nombre complexe.

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} \geqslant \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + 0^2} = |\mathrm{Re}(z)|.$$

De plus, $|z| = |\mathrm{Re}(z)| \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(z))^2 = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ (on retrouve au passage le fait que le module d'un réel est sa valeur absolue.

De même,

$$|z|=\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2}\geqslant\sqrt{0^2+(\mathrm{Im}(z))^2}=|\mathrm{Im}(z)|.$$

De plus, $|z|=|\mathrm{Im}(z)|\Leftrightarrow(\mathrm{Re}(z))^2=0\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$.

❏

Ensuite, on a immédiatement

**Théorème 18.** $\forall z\in\mathbb{C}$, $|\overline{z}|=|-z|=|z|$.

On a dit que le module fonctionne bien avec la multiplication. Le théorème suivant montre que ce n'est pas du tout le cas avec l'addition. En général, on a $|z+z'|\neq|z|+|z'|$. Plus précisément :

**Théorème 19.**

**1)** $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire).

**2)** $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $|z+z'|=|z|+|z'|\Leftrightarrow z=0$ ou ($z\neq0$ et $\exists\lambda\in\mathbb{R}^+/\ z'=\lambda z$) (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire).

**Démonstration .** Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes.

$$\begin{aligned}|z+z'|^2&=\left(z+z'\right)\overline{\left(z+z'\right)}=\left(z+z'\right)\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)\\&=z\overline{z}+z'\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z'}=|z|^2+2\mathrm{Re}\left(\overline{z}z'\right)+|z'|^2\\&\leqslant|z|^2+2\left|\mathrm{Re}\left(\overline{z}z'\right)\right|+|z'|^2\\&\leqslant|z|^2+2\left|\overline{z}z'\right|+|z'|^2=|z|^2+2\left|\overline{z}\right|\left|z'\right|+|z'|^2=|z|^2+2\left|z\right|\left|z'\right|+|z'|^2\\&=\left(|z|+|z'|\right)^2,\end{aligned}$$

et donc $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$ puisque $|z+z'|$ et $|z|+|z'|$ sont deux réels positifs. Ensuite, cette inégalité est une égalité si et seulement si chacune des inégalités écrites ci-dessus est égalité. Donc,

$$\begin{aligned}|z+z'|=|z|+|z'|&\Leftrightarrow\left|\overline{z}z'\right|=\left|\mathrm{Re}\left(\overline{z}z'\right)\right|\text{ et }\left|\mathrm{Re}\left(\overline{z}z'\right)\right|=\mathrm{Re}\left(\overline{z}z'\right)\\&\Leftrightarrow\overline{z}z'\in\mathbb{R}\text{ et }\left|\mathrm{Re}\left(\overline{z}z'\right)\right|=\mathrm{Re}\left(\overline{z}z'\right)\text{ (d'après le théorème 13)}\\&\Leftrightarrow\overline{z}z'\in\mathbb{R}^+\\&\Leftrightarrow z=0\text{ ou }(z\neq0\text{ et }\frac{\overline{z}z'}{|z|^2}\in\mathbb{R}^+)\text{ (car si }z\neq0,\text{ alors }|z|^2>0)\\&\Leftrightarrow z=0\text{ ou }(z\neq0\text{ et }\frac{z'}{z}\in\mathbb{R}^+)\Leftrightarrow z=0\text{ ou }(z\neq0\text{ et }\exists\lambda\in\mathbb{R}^+,\ \frac{z'}{z}=\lambda)\\&\Leftrightarrow z=0\text{ ou }(z\neq0\text{ et }\exists\lambda\in\mathbb{R}^+,\ z'=\lambda z).\end{aligned}$$

❏

**Exercice 6.** Montrer par récurrence que pour tout entier $n\geqslant2$, « pour tous nombres complexes non nuls $z_1,\dots z_n$, on a $|z_1+\ldots+z_n|\leqslant|z_1|+\ldots+|z_n|$ avec égalité si et seulement si pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, il existe $\lambda_k\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $z_k=\lambda_kz_1$ ».

**Solution 6.** Montrons par récurrence que pour tout entier $n\geqslant2$, « pour tous nombres complexes non nuls $z_1,\dots z_n$, on a $|z_1+\ldots+z_n|\leqslant|z_1|+\ldots+|z_n|$ avec égalité si et seulement si pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, il existe $\lambda_k\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $z_k=\lambda_kz_1$ ($\mathcal{P}_n$) ».

- Le cas $n=2$ est le théorème 19 (dans le cas où $z_1\neq0$ et $z_2\neq0$).
- Soit $n\geqslant2$. Supposons ($\mathcal{P}_n$). Soient $z_1$, $z_2$, ..., $z_{n+1}$ $n+1$ nombres complexes tous non nuls. Déjà,

$$\begin{aligned}|z_1+\ldots+z_n+z_{n+1}|&\leqslant|z_1+\ldots+z_n|+|z_{n+1}|\\&\leqslant|z_1|+\ldots+|z_n|+|z_{n+1}|\text{ (par hypothèse de récurrence).}\end{aligned}$$

De plus, l'inégalité est une égalité si et seulement si chacune des deux inégalités écrites est une égalité. Si on a l'égalité, on ne peut avoir $z_1+\ldots+z_n=0$, (car $|z_1|+\ldots+|z_n|>0$) et donc, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}|z_1+\ldots+z_{n+1}| = |z_1|+\ldots+|z_{n+1}| &\Leftrightarrow |z_1+\ldots+z_n| = |z_1|+\ldots+|z_n| \text{ et } |z_1+\ldots+z_n+z_{n+1}| = |z_1+\ldots+z_n|+|z_{n+1}|\\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![2,n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*}/\ z_k = \lambda_k z_1 \text{ et } \exists \mu \in \mathbb{R}^{+*}/\ z_{n+1} = \mu\,(z_1+\ldots+z_n)\\
&\Rightarrow \forall k \in [\![2,n+1]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*}/\ z_k = \lambda_k z_1.\end{aligned}$$

Réciproquement, si $\forall k \in [\![2,n+1]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*}/\ z_k = \lambda_k z_1$, alors

$$\begin{aligned}|z_1+\ldots+z_{n+1}| &= |z_1\,(1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n+1})| = (1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n+1})\,|z_1|\\
&= |z_1|+\lambda_2\,|z_1|+\ldots+\lambda_{n+1}\,|z_1| = |z_1|+\ldots+|z_{n+1}|.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

---

Sinon, voici un exercice plus simple pour réviser.

**Exercice 7.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

**1)** $((1+i)z+1-i)(((2-i)\overline{z}-3+i)=0$.

**2)** $(3+2i)z-(1-i)\overline{z}=1-2i$.

**Solution 7.**

**1)** Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}((1+i)z+1-i)(((2-i)\overline{z}-3+i)=0 &\Leftrightarrow (1+i)z+1-i=0 \text{ ou } (2-i)\overline{z}-3+i=0\\
&\Leftrightarrow (1+i)z+1-i=0 \text{ ou } (2+i)z-3-i=0\\
&\Leftrightarrow z=\frac{-1+i}{1+i} \text{ ou } z=\frac{3+i}{2+i} \Leftrightarrow z=\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \text{ ou } z=\frac{(3+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\\
&\Leftrightarrow z=\frac{2i}{1^2+1^2} \text{ ou } z=\frac{7-i}{2^2+1^2} \Leftrightarrow z=i \text{ ou } z=\frac{7-i}{5}.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation proposée est $\mathcal{S}=\left\{i, \dfrac{7-i}{5}\right\}$.

**2)** Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z=x+iy$ où $x$ et $y$ sont deux réels.

$$\begin{aligned}(3+2i)z-(1-i)\overline{z}=1-2i &\Leftrightarrow (3+2i)(x+iy)-(1-i)(x-iy)=1-2i\\
&\Leftrightarrow (2x-y)+i(3x+4y)=1-2i\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x-y=1\\ 3x+4y=-2\end{array}\right. \text{ (par identification des parties réelles et imaginaires)}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=2x-1\\ 3x+4(2x-1)=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{11}\\ y=-\dfrac{7}{11}\end{array}\right. \Leftrightarrow z=\frac{2-7i}{11}.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation proposée est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{2-7i}{11}\right\}$.

---

# 3 Le second degré dans $\mathbb{C}$

## 3.1 Transformation canonique

Soient $a$, $b$ et $c$ trois nombres complexes tels que $a \neq 0$. Pour tout nombre complexe $z$,

$$
\begin{aligned}
az^2+bz+c &= a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)
\end{aligned}
$$

où on a posé $\Delta = b^2-4ac$. $\Delta$ est le **discriminant** du trinôme $z\mapsto az^2+bz+c$.

Nous voulons maintenant profiter du résultat de cette transformation canonique pour factoriser le trinôme $z\mapsto az^2+bz+c$ en produit de polynômes de degré $1$. Ceci sera rendu possible si on trouve un nombre complexe $\delta$ tel que $\delta^2=\Delta$. Si c'est le cas, pour tout nombre complexe $z$, on pourra écrire

$$az^2+bz+c = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) = a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)...$$

Le paragraphe suivant est consacré entre autres à l'équation $\delta^2=\Delta$ d'inconnue $\delta$.

## 3.2 Racines carrées d'un nombre complexe

Commençons par donner une nouvelle condition nécessaire et suffisante d'égalité de deux nombres complexes.

**Théorème 20.** Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes.

$$z=z' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')\\ |z|=|z'|\\ \mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}(z))=\mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}(z'))\end{array}\right. .$$

Dans le théorème ci-dessus, l'égalité $\mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}(z))=\mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}(z'))$ (signe de $\mathrm{Im}(z)$ égale signe de $\mathrm{Im}(z')$) signifie que $\mathrm{Im}(z)$ et $\mathrm{Im}(z')$ sont ou bien tous deux strictement positifs, ou bien tous deux strictement négatifs, ou bien tous deux nuls.

**Démonstration .** Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes. Il est clair que si $z=z'$, alors $\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')\\ |z|=|z'|\\ \mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}(z))=\mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}(z'))\end{array}\right.$.

Réciproquement, supposons que $\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')\\ |z|=|z'|\\ \mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}(z))=\mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}(z'))\end{array}\right.$. Posons $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où $x$, $x'$, $y$ et $y'$ sont quatre réels. Puisque $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$, on a $x=x'$. Puisque $|z|=|z'|$, on a $x^2+y^2=x'^2+y'^2$ puis $y^2=y'^2$ puis $|y|=|y'|$. Enfin, puisque $\mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}(z))=\mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}(z'))$, on en déduit dans tous les cas que $y=y'$ et donc que $z=z'$.

❏

On dispose maintenant de l'outil permettant de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe quelconque, ce nombre complexe étant fourni sous forme algébrique (et pas sous forme trigonométrique). Ce qui suit décrit la technique à mettre en œuvre pour trouver des racines carrées et est à connaître.

On se donne $Z$ un nombre complexe. On pose $Z=a+ib$ où $a$ et $b$ sont deux réels. On cherche les nombres complexes $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, tels que $z^2=Z$. D'après le théorème précédent,

$$
\begin{aligned}
z^2=Z &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathrm{Re}\left(z^2\right)=\mathrm{Re}(Z)\\ \left|z^2\right|=|Z|\\ \mathrm{sgn}\left(\mathrm{Im}\left(z^2\right)\right)=\mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}\,(Z))\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=a \text{ (I)}\\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \text{ (II)}\\ \mathrm{sgn}\,(2xy)=\mathrm{sgn}\,(b)\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\ \dfrac{1}{2}((\text{II})+(\text{I}))\\ y^2=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)\ \dfrac{1}{2}((\text{II})-(\text{I}))\\ \mathrm{sgn}\,(xy)=\mathrm{sgn}\,(b)\end{array}\right. \quad (S).
\end{aligned}
$$

Maintenant, $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\sqrt{a^2}=|a|$ et donc $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant a$ et $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant -a$ puis $\sqrt{a^2+b^2}-a\geqslant 0$ et $\sqrt{a^2+b^2}+a\geqslant 0$. On note de plus que $\sqrt{a^2+b^2}\pm a=0\Leftrightarrow b=0$. Par suite,

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right) \\ y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \\ y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \end{cases}.$$

Il reste à faire intervenir la condition $\text{sgn}(xy) = \text{sgn}(b)$.

**1er cas.** Si $b = 0$ (cas où $Z$ est réel), $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|a|+a)} \\ y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|a|-a)} \\ xy = 0 \end{cases}$.

Si $a > 0$, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{a} \\ y = 0 \end{cases}$. Ainsi, un réel strictement positif $a$ admet dans $\mathbb{C}$ deux racines carrées distinctes à savoir $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
Si $a < 0$, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{-a} \end{cases}$. Ainsi, un réel strictement négatif $a$ admet dans $\mathbb{C}$ deux racines carrées distinctes à savoir $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.
Si $a = 0$, $(S) \Leftrightarrow x = y = 0$. $0$ admet dans $\mathbb{C}$ une racine carrée et une seule, à savoir $0$.

**2ème cas.** Si $b \neq 0$ (cas où $Z$ n'est pas réel), le système $\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \\ y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \end{cases}$ admet quatre couples solutions deux à deux distincts (car si $b \neq 0$, $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} \pm a\right) \neq 0$ d'après une remarque faite plus haut). La condition $\text{sgn}(xy) = \text{sgn}(b)$ élimine deux de ces quatre couples pour n'en conserver que deux, opposés l'un à l'autre.

On peut énoncer

**Théorème 21.** Tout nombre complexe non nul admet dans $\mathbb{C}$ exactement deux racines carrées, opposées l'une à l'autre.

**Exercice 8.** Trouver les racines carrées de $8 - 6i$ dans $\mathbb{C}$.

**Solution 8.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont deux réels.

$$z^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}\left(z^2\right) = 8 \\ \left|z^2\right| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} \\ \text{sgn}(\text{Im}\left(z^2\right)) = \text{sgn}(-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(10+8) \\ y^2 = \frac{1}{2}(10-8) \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (3, -1) \text{ ou } (x, y) = (-3, 1) \Leftrightarrow z = 3 - i \text{ ou } z = -3 + i.$$

Les racines carrées de $8 - 6i$ sont $3 - i$ et $-3 + i$.

---

## 3.3 L'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

On utilise les résultats des deux paragraphes précédents pour résoudre l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$. On se donne trois nombres complexes $a$, $b$ et $c$ où $a \neq 0$. On considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (E),$$

d'inconnue le nombre complexe $z$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ puis on note $\delta$ **un** nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$ (d'après le paragraphe précédent, quelque soit $\Delta$, $\delta$ existe dans $\mathbb{C}$).

$$
\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\Leftrightarrow a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2=0 \text{ (car } a\neq 0)\\
&\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)=0 \Leftrightarrow \left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)=0\\
&\Leftrightarrow z=\frac{-b+\delta}{2a} \text{ ou } z=\frac{-b-\delta}{2a}.
\end{aligned}
$$

**Théorème 22.** Soient $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ puis $(E)\ :\ az^2+bz+c=0$ où $z\in\mathbb{C}$. On pose $\Delta=b^2-4ac$ puis on note $\delta$ un nombre complexe tel que $\delta^2=\Delta$.

L'équation $(E)$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions, distinctes ou confondues, à savoir

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b-\delta}{2a}.$$

De plus, dans le cas où $\Delta\neq 0$, ces deux solutions sont distinctes et dans le cas où $\Delta=0$, l'équation $(E)$ admet une seule solution dite double à savoir $z_1=-\dfrac{b}{2a}$.

**Exercice 9.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(4+i)z+5+5i=0$.

**Solution 9.** Le discriminant du trinôme $z^2-(4+i)z+5+5i$ est

$$\Delta=(4+i)^2-4(5+5i)=16+8i-1-20-20i=-5-12i.$$

$\Delta\neq 0$ et donc l'équation $(E)$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$.
Déterminons les racines carrées de $\Delta$ dans $\mathbb{C}$. Soient $a$ et $b$ deux réels puis $\delta=a+ib$.

$$
\begin{aligned}
\delta^2=\Delta &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2-b^2=-5\\ a^2+b^2=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}\\ ab<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2-b^2=-5\\ a^2+b^2=13\\ ab<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2=4\\ b^2=9\\ ab<0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \delta=2-3i \text{ ou } \delta=-2+3i.
\end{aligned}
$$

Ainsi, le nombre $\delta=2-3i$ est **un** nombre complexe tel que $\delta^2=\Delta$. L'équation $(E)$ admet deux solutions distinctes à savoir $z_1=\dfrac{(4+i)+(2-3i)}{2}=3-i$ et $z_2=\dfrac{(4+i)-(2-3i)}{2}=1+2i$.

## 3.4 Factorisation d'un trinôme du second degré

Avec les notations des paragraphes précédent, pour $z\in\mathbb{C}$, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]&=a\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\\
&=a\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right).
\end{aligned}
$$

Donc,

**Théorème 23.** Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Pour tout nombre complexe $z$,

$$az^2+bz+c=a\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right),$$

où $z_1$ et $z_2$ sont les deux solutions, distinctes ou confondues, de l'équation $az^2+bz+c=0$.

Ainsi, par exemple, pour tout nombre complexe $z$, $z^2-(4+i)z+5+5i=(z-3+i)(z-1-2i)$. Pour le cas général, on rappelle que puisque que le trinôme $az^2+bz+c$ admet $z_1$ (ou $z_2$) pour racine, on peut mettre $z-z_1$ (ou $z-z_2$) en facteur.

## 3.5 Le discriminant réduit

Avec les notations des paragraphes précédents, si $\Delta = b^2 - 4c$ et $\delta$ est un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$, alors les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$. De plus, ces deux solutions sont confondues si et seulement si $\Delta = 0$.

On suppose alors que $b$ est le double d'un nombre $b'$, « plus simple que $b$ ». C'est le cas des trinômes $z^2 - 4z + 3$ ou $z^2 - (4+2i)z + 1 - i$ ou $z^2 - 2\sqrt{2}z + \sqrt{2} + 3i$ ou $z^2 - 2z\cos\theta + 1$ mais pas de $z^2 - 3z + 2$ ou $z^2 - (1+i)z + 1 + 2i$.

Puisque $b = 2b'$, on a $\Delta = b^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4\left(b'^2 - ac\right)$. On pose alors $\Delta' = b'^2 - ac$. $\Delta'$ est le **discriminant réduit** du trinôme $az^2 + bz + c$ et on a $\Delta = 4\Delta'$.
On pose encore $\delta' = \dfrac{\delta}{2}$ de sorte que $\delta = 2\delta'$. On a $\delta'^2 = \dfrac{\delta^2}{4} = \dfrac{\Delta}{4} = \Delta'$ et donc $\delta'$ est une racine carrée de $\Delta'$ dans $\mathbb{C}$.
Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ s'écrivent alors

$$\frac{-b \pm \delta}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\delta'}{2a} = \frac{-b' \pm \delta'}{a}.$$

On peut énoncer

**Théorème 24.** Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ puis $(E)\ :\ az^2 + bz + c = 0$ où $z \in \mathbb{C}$. On pose $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$ puis on note $\delta'$ un nombre complexe tel que $\delta'^2 = \Delta'$.

L'équation $(E)$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions, distinctes ou confondues, à savoir

$$z_1 = \frac{-b' + \delta'}{a} \text{ et } z_2 = \frac{-b' - \delta'}{a}.$$

De plus, dans le cas où $\Delta' \neq 0$, ces deux solutions sont distinctes et dans le cas où $\Delta' = 0$, l'équation $(E)$ admet une seule solution dite double à savoir $z_1 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{b'}{a}$.

Par exemple, considérons le trinôme $z^2 - 2z\cos\theta + 1$ où $\theta$ est un nombre réel donné. Le discriminant réduit de ce trinôme est

$$\Delta' = (-\cos\theta)^2 - 1 \times 1 = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta = (i\sin\theta)^2.$$

On peut prendre $\delta' = i\sin\theta$. L'équation $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions à savoir $z_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ et $z_2 = \cos\theta - i\sin\theta$. De plus, ces deux solutions sont confondues si et seulement si $\sin\theta = 0$ ce qui équivaut à $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.

## 3.6 Somme et produit des racines

Dans ce qui suit, on donne les relations existant entre les coefficients et les racines d'un trinôme du second degré. Le théorème 25 est un cas particulier d'un théorème plus général donnant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme de degré $n$, théorème énoncé dans le chapitre « Polynômes ».

**Théorème 25.** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Soient $z_1$ et $z_2$ les deux solutions, distinctes ou confondues, de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Alors

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}.$$

**Démonstration .** Les solutions $z_1$ et $z_2$ de l'équation $az^2 + bz + c$ sont $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$. Donc,

$$z_1 + z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} + \frac{-b-\delta}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

et

$$z_1 \times z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} \times \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{(-b)^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

❑

**Exercice 10.** On note $z_1$ et $z_2$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - (1-i)z + 2 + 3i = 0$.

Calculer $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$ et $z_1^2 + z_2^2$.

**Solution 10.** On a $z_1 + z_2 = 1 - i$ et $z_1 z_2 = 2 + 3i$ (en particulier, $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$). Donc,

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \frac{1 - i}{2 + 3i} = \frac{(1 - i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{-1 - 5i}{13}$$

et

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = (1 - i)^2 - 2(2 + 3i) = -4 - 8i.$$

---

⇨ **Commentaire** . *Il serait bien sûr très maladroit de chercher explicitement* $z_1$ *et* $z_2$.

Le théorème admet la « réciproque » suivante : deux nombres $z_1$ et $z_2$ ont une somme $S$ et un produit $P$ si et seulement si ces deux nombres sont les solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ (car $(X - z_1)(X - z_2) = X^2 - (z_1 + z_2)X + z_1 z_2$).

### 3.7 Le cas particulier de l'équation à coefficients réels

On détaille maintenant le cas où $a$, $b$ et $c$ sont trois réels tels que $a \neq 0$. Dans ce cas particulier,

- si $\Delta > 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions réelles distinctes à savoir $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- si $\Delta = 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ une solution réelle double à savoir $z_1 = \frac{-b}{2a}$.
- si $\Delta < 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions **non réelles conjuguées** à savoir $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ où $\delta$ est un imaginaire pur tel que $\delta^2 = \Delta$ (par exemple $\delta = i\sqrt{-\Delta}$).

# 4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

A partir de maintenant, le plan est orienté dans le sens trigonométrique et muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On rappelle que le plan muni d'un repère orthonormé direct est parfois appelé le « plan complexe ».

### 4.1 Nombres complexes de module 1. La notation $e^{i\theta}$

L'ensemble des nombres complexes de module 1 se note $U$ (initiale de unité). Donc,

$$U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}.$$

On a le résultat fondamental suivant :

**Théorème 26.** Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / z = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

**Démonstration .** Soit $z$ un nombre complexe de module 1. Le point $M$ d'affixe $z$ est sur le cercle trigonométrique. Donc, si $\theta$ est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$, alors $M$ a pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Pour ce réel $\theta$, on a effectivement $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Réciproquement, soient $\theta$ un réel puis $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Alors, $|z| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$.

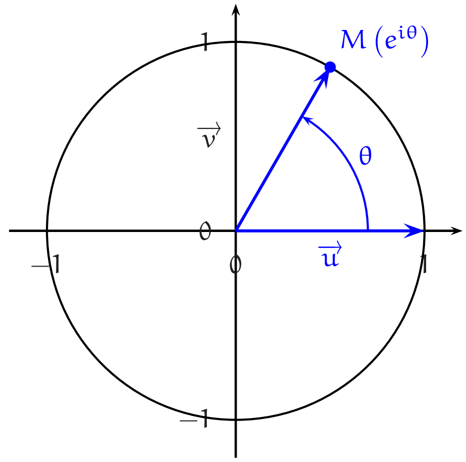
❑

En préjugeant du comportement algébrique de l'expression $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$, on décide de la définition suivante

Définition 6. Pour tout réel $\theta$,

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}.$$

Donc, $U = \left\{e^{i\theta}, \ \theta \in \mathbb{R}\right\}$. Si $z = e^{i\theta}$, le réel $\theta$ s'interprète géométriquement. Notons $M$ le point d'affixe $z$. Le point $M$ a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$. Le point $M$ est sur le cercle trigonométrique et le nombre $\theta$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.

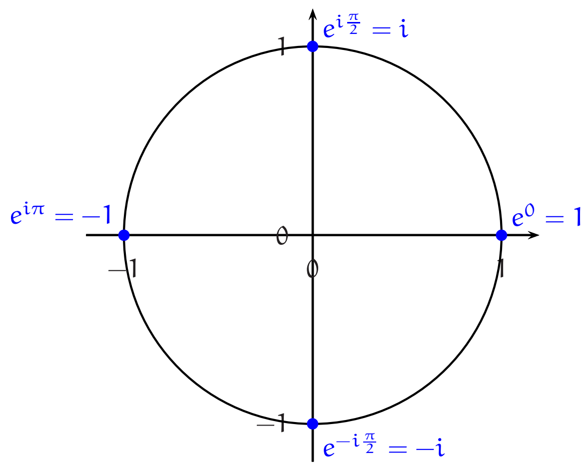



Commençons par donner quelques valeurs usuelles de la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

$$e^0 = 1 \quad e^{2i\pi} = 1 \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

et la merveilleuse formule due à Euler

$$e^{i\pi} = -1.$$




La fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ obéit aux règles de calcul suivantes :

**Théorème 27.**

**1)** $\forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

**2)** $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

**3)** $\forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

**4)** $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ (formule de Moivre).

**Démonstration .**

**1)** Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \times e^{i\theta'} &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))\left(\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right) \\ &= \left(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')\right) + i\left(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')\right) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')}. \end{aligned}$$

**2)** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et en particulier, $e^{i\theta} \neq 0$. Ensuite,

$$e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^0 = 1$$

et donc $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. Ensuite, $\left|e^{i\theta}\right| = 1 \Rightarrow e^{i\theta} \times \overline{e^{i\theta}} = 1$ et donc $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

**3)** Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times \dfrac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$.

**4)** La formule de Moivre se montre immédiatement par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ puis si $n < 0$, on a

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = \frac{1}{\left(e^{i\theta}\right)^{-n}} = \frac{1}{e^{-in\theta}} = e^{in\theta}.$$

❑

Un moment important du théorème précédent est que l'inverse d'un nombre complexe de module 1 est son conjugué $\left(\dfrac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}\right)$. Ceci peut s'obtenir directement sans connaître la notation $e^{i\theta}$ :

$$|z| = 1 \Rightarrow z \times \overline{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \overline{z}.$$

Par exemple

$$\frac{1}{i} = -i$$

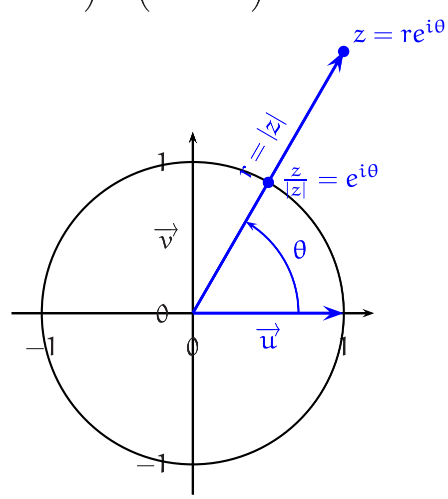
## 4.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul. Arguments d'un nombre complexe non nul

Soit $z$ un nombre complexe non nul. Le nombre $\dfrac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1 car

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{1}{|z|}|z| = 1.$$

On en déduit qu'il existe un réel $\theta$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$. Par suite, si on pose $r = |z|$, on obtient $z = re^{i\theta}$ où $r$ est un réel strictement positif et $\theta$ est un réel. De nouveau, les réels $r$ et $\theta$ s'interprètent géométriquement. On note $M$ le point d'affixe $z = re^{i\theta}$ et $M_1$ le point d'affixe $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Le réel $r$ est le module de $z$ ou encore la distance $OM$. Ensuite, l'égalité $z = re^{i\theta}$ s'écrit encore $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OM_1}$ où $r$ est un réel strictement positif. On en déduit que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}\right)$ et donc $\theta$ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.




Le réel $\theta$ n'est pas uniquement défini par $z$ car par exemple, si $z = re^{i\theta}$ où $r$ est un réel strictement positif et $\theta$ est un réel, alors

$$re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i\theta} \times e^{2i\pi} = re^{i\theta}$$

et le réel $\theta' = \theta + 2\pi$ est un autre réel tel que $z = re^{i\theta'}$. On va voir que néanmoins, d'un certain point de vue, l'écriture $z = re^{i\theta}$ est unique.

**Théorème 28.** Soient $r$ et $r'$ deux réels strictement positifs et $\theta$ et $\theta'$ deux réels.

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r' \text{ et } e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta' = \theta + 2k\pi.$$

**Démonstration .** Soient $r$ et $r'$ deux réels strictement positifs et $\theta$ et $\theta'$ deux réels.

Si $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$, alors $\left|re^{i\theta}\right| = \left|r'e^{i\theta'}\right|$ puis $r = r'$ (car $r > 0$ et $r' > 0$). Puisque $r \neq 0$, on en déduit que $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$.
Réciproquement, si $r = r'$ et $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, alors $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$. Ensuite,

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \cos(\theta') + i\sin(\theta') \Leftrightarrow \cos(\theta) = \cos(\theta') \text{ et } \sin(\theta) = \sin(\theta') \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta' = \theta + 2k\pi.$$

❏

On peut maintenant donner la « définition » suivante.

Définition 7. Soit $z$ un nombre complexe **non nul**. On note $M$ le point d'affixe $z$. L'écriture

$$z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \text{ avec } (r, \theta) \in ]0, +\infty[\times\mathbb{R},$$

s'appelle **la forme trigonométrique** de $z$. Cette écriture est unique c'est-à-dire que $r$ et $e^{i\theta}$ (mais pas $\theta$) sont uniquement définis par $z$.

$r$ est le module de $z$ ou encore la distance $OM$.

$\theta$ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ et s'appelle **un argument** de $z$. On note $\arg(z)$ tout argument de $z$.

⇨ **Commentaire** . *Pour tout réel $\theta$, on a $0 = 0 \times e^{i\theta}$. Le nombre complexe $0$ peut donc lui aussi « s'écrire $re^{i\theta}$ » mais en aucun cas, on ne parle de la forme trigonométrique de $0$ car le nombre complexe $e^{i\theta}$, de module 1, n'est pas uniquement défini. Le réel $\theta$ ne s'interprète plus comme une mesure d'angle. Le nombre complexe $0$ n'a pas d'argument.*

Les calculs précédents fournissent la démarche pour trouver la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul : on met le module en facteur de sorte que $z$ s'écrit $z = r(\alpha + i\beta)$ avec $r > 0$ et $\alpha$ et $\beta$ réels tels que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ puis on cherche un réel $\theta$ tel que $\cos\theta = \alpha$ et $\sin\theta = \beta$.

Trouvons par exemple la forme trigonométrique de $-\sqrt{3} + i$ :

$$-\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

De manière générale, si $z = a + ib = re^{i\theta}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $(r, \theta) \in ]0, +\infty[\times\mathbb{R}$, alors

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{r} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{r}.$$

**Exercice 11.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Trouver la forme trigonométrique de $z_\theta = 1 + e^{i\theta}$.

**Solution 11.**

**1ère solution (maladroite).** Calculons le module de $z_\theta$ :

$$|z_\theta|^2 = |1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta)|^2 = (1 + \cos(\theta))^2 + \sin^2\theta = 2 + 2\cos(\theta) = 4\frac{1 + \cos(\theta)}{2} = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Par suite, $|z_\theta| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$. Ensuite,

$$z_\theta = 1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

**1er cas.** Si $\theta \in (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$, alors $z_\theta = 1 - 1 = 0$ et $z_\theta$ n'admet pas de forme trigonométrique.

**2ème cas.** Si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ]-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi[$, alors $\frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ puis $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$. Dans ce cas, la forme trigonométrique de $z_\theta$ est $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$ ($|z_\theta| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z_\theta) = \frac{\theta}{2}$ $[2\pi]$).

**3ème cas.** Si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ]\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi[$, alors $\frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$ puis $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$. Dans ce cas,

$$z_\theta = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}} = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)}.$$

La forme trigonométrique de $z_\theta$ est $-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$ ($|z_\theta| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z_\theta) = \frac{\theta}{2}+\pi\ [2\pi]$).

**2ème solution (la meilleure).** $z_\theta = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$. La discussion est alors la même que précédemment.

---

Les différentes formules concernant $e^{i\theta}$ fournissent immédiatement :

**Théorème 29.**
**1)** $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.
**2)** $\forall (\lambda, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$, $\arg(\lambda z) = \left\{\begin{array}{l}\arg(z)\ [2\pi] \text{ si } \lambda > 0\\ \arg(z) + \pi\ [2\pi] \text{ si } \lambda < 0\end{array}\right.$.
**3)** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(\overline{z}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$.
**4)** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$.
**5)** $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.
**6)** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$.

## 4.3 Application à la trigonométrie

L'outil fondamental de la trigonométrie est l'exponentielle. On a établi que $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$ à partir des formules d'addition $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$. On peut dorénavant tout penser dans l'autre sens et se dire que la formule $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$ permet de retrouver les formules d'addition. Signalons qu'en maths spé, on définit de manière générale l'exponentielle d'un nombre complexe indépendamment de toute référence à la trigonométrie :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!},$$

et en particulier,

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}.$$

On démontre à partir de cette définition l'égalité fondamentale : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$. Avec cette définition de l'exponentielle, on pourra entièrement reconstruire la trigonométrie à partir de l'exponentielle et pas l'inverse.

### 4.3.1 Les formules d'Euler

Nous donnons maintenant les formules exprimant $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$ en fonction de $e^{i\theta}$. Ces formules sont connues sous le nom de **formules d'Euler**.

**Théorème 30.**
**1)** $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \text{ et } \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

et donc aussi

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad \text{et} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta.$$

**2)** $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\tan\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)} = \frac{e^{2i\theta} - 1}{i\left(e^{2i\theta} + 1\right)} = \frac{1 - e^{-2i\theta}}{i\left(1 + e^{-2i\theta}\right)}.$$

**Démonstration .**

**1)** Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\cos\theta = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$

et

$$\sin\theta = \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right).$$

Les formules pour tangente sont immédiates.

❑

A titre de premier exemple d'utilisation des formules d'EULER, transformons les expressions $1+e^{i\theta}$, $1-e^{i\theta}$ et $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$.

$$1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}},$$

puis

$$1-e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}},$$

et

$$e^{i\theta}+e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}.$$

Dans les trois cas, nous avons mis en facteur l'exponentielle de « l'exposant milieu ». Dans les deux premiers cas, le milieu de $\theta$ et $0$ est $\dfrac{\theta}{2}$ et nous avons mis en facteur $e^{i\frac{\theta}{2}}$ et dans le dernier cas, le milieu de $\theta$ et $\theta'$ est $\dfrac{\theta+\theta'}{2}$ et nous avons mis en facteur $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.

### 4.3.2 Polynômes de TCHEBYCHEV

Dans ce paragraphe, nous cherchons à donner une expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Soient $\theta$ un réel et $n$ un entier naturel.

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{in\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(i\sin\theta)^{2k} + \sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}(\cos\theta)^{n-(2k+1)}(i\sin\theta)^{2k+1}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta + i\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}}(-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}\theta\sin^{2k+1}\theta\right),
\end{aligned}$$

et donc

$$\cos(n\theta) = \sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta\left(\sin^2\theta\right)^k = \sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^k.$$

De même,

$$\begin{aligned}
\sin(n\theta) &= \mathrm{Im}\left(e^{in\theta}\right) \\
&= \sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}}(-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}\theta\sin^{2k+1}\theta \\
&= \sin\theta\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}}(-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^k
\end{aligned}$$

(dans la première somme, $0\leqslant 2k\leqslant n \Leftrightarrow 0\leqslant k\leqslant\dfrac{n}{2}$ et dans la deuxième, $0\leqslant 2k+1\leqslant n \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leqslant k\leqslant\dfrac{n-1}{2} \Leftrightarrow 0\leqslant k\leqslant\dfrac{n-1}{2}$). On a montré que

$\forall(n,\theta)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$,

$$\cos(n\theta)=\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^k$$

et

$$\sin(n\theta)=\sin\theta\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-1}{2}}(-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^k.$$

Ainsi, si pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$T_n(x)=\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}(-1)^k\binom{n}{2k}x^{n-2k}\left(1-x^2\right)^k \text{ et } U_n(x)=\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-1}{2}}(-1)^k\binom{n}{2k+1}x^{n-(2k+1)}\left(1-x^2\right)^k,$$

alors

$$\forall(n,\theta)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R},\ \cos(n\theta)=T_n(\cos\theta)\text{ et }\sin(n\theta)=\sin\theta\times U_n(\cos\theta).$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, $T_n$ (resp. $U_n$) est un polynôme appelé $n$-ème **polynôme de Tchebychev** de première espèce (resp. deuxième espèce). Ces polynômes seront étudiés plus en détail dans le chapitre « Polynômes ». Donnons déjà les premières valeurs de $T_n$ et $U_n$.

• Pour tout réel $x$, $T_2(x)=x^2-(1-x^2)=2x^2-1$ ce qui correspond à : $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$.
Pour tout réel $x$, $U_2(x)=2x$ ce qui correspond à : $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$.

• Pour tout réel $x$, $T_3(x)=x^3-3x(1-x^2)=4x^3-3x$ ce qui correspond à : $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.
Pour tout réel $x$, $U_3(x)=3x^2-(1-x^2)=4x^2-1$ ce qui correspond à : $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\sin(3\theta)=\sin\theta\left(4\cos^2\theta-1\right)=3\sin\theta-4\sin^3\theta$.

• Pour tout réel $x$, $T_4(x)=x^4-6x^2(1-x^2)+(1-x^2)^2=8x^4-8x^2+1$ ce qui correspond à : $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(4\theta)=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$.
Pour tout réel $x$, $U_4(x)=4x^3\left(1-x^2\right)-4x\left(1-x^2\right)=8x^3-4x$ ce qui correspond à : $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\sin(4\theta)=\sin\theta\left(8\cos^3\theta-4\cos\theta\right)$.

En résumé, pour tout réel $x$,

| $n$ | $T_n$ | $U_n$ |
|---|---|---|
| 0 | $1$ | $0$ |
| 1 | $x$ | $1$ |
| 2 | $2x^2-1$ | $2x$ |
| 3 | $4x^3-3x$ | $4x^2-1$ |
| 4 | $8x^4-8x^2+1$ | $8x^3-4x$ |

### 4.3.3 Linéarisation de polynômes trigonométriques

Les formules $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$ et $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$ transforment les produits en somme. Ce sont des formules de **linéarisation**. En tenant compte des formules d'Euler, $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$ et $\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$, on a maintenant tous les outils pour linéariser tout polynôme trigonométrique c'est-à-dire transformer tout produit de cos et/ou de sin en somme. Ci-dessous, on donne quelques exemples de linéarisation.

**Exemple 1.** Linéarisons $\cos^3\theta\sin^2\theta$. Pour tout réel $\theta$,

$$\begin{aligned}\cos^3\theta\sin^2\theta&=\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)^3\left(\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)^2\\&=-\frac{1}{32}\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\left(e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}\right)\\&=-\frac{1}{32}\left(e^{5i\theta}+e^{3i\theta}-2e^{i\theta}-2e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}+e^{-5i\theta}\right)\\&=-\frac{1}{32}\left(2\cos(5\theta)+2\cos(3\theta)-4\cos(\theta)\right)=\frac{1}{16}\left(-\cos(5\theta)-\cos(3\theta)+2\cos(\theta)\right).\end{aligned}$$

**Exemple 2.** Linéarisons $\cos^3\theta\sin^3\theta$. Pour tout réel $\theta$,

$$\begin{aligned}\cos^3\theta\sin^3\theta &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)^3\left(\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)^3\\ &= -\frac{1}{64i}\left(\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)^3 = -\frac{1}{64i}\left(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}\right)^3\\ &= -\frac{1}{64i}\left(e^{6i\theta}-3e^{2i\theta}+3e^{-2i\theta}-e^{-6i\theta}\right)\\ &= -\frac{1}{64i}\left(2i\sin(6\theta)-6i\sin(2\theta)\right) = \frac{1}{32}\left(-\sin(6\theta)+3\sin(2\theta)\right).\end{aligned}$$

**Exemple 3.** Linéarisons $\cos^2\theta\sin^4\theta$. Pour tout réel $\theta$,

$$\begin{aligned}\cos^2\theta\sin^4\theta &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)^2\left(\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)^4\\ &= \frac{1}{64}\left(e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}\right)\left(e^{4i\theta}-4e^{2i\theta}+6-4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{64}\left(e^{6i\theta}-2e^{4i\theta}-e^{2i\theta}+4-e^{-2i\theta}-2e^{4i\theta}+e^{-6i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{64}\left(2\cos(6\theta)-4\cos(4\theta)-2\cos(2\theta)+4\right) = \frac{1}{32}\left(\cos(6\theta)-2\cos(4\theta)-\cos(2\theta)+2\right).\end{aligned}$$

Dans les trois exemples précédents, nous avons transformés des produits de fonctions trigonométriques en sommes de fonctions trigonométriques. Cette transformation servira par exemple plus tard dans l'année à calculer des intégrales. Par exemple,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\sin^4x\,dx &= \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(6x)-2\cos(4x)-\cos(2x)+2\right)dx\\ &= \frac{1}{32}\left(\left[\frac{\sin(6x)}{6}-2\frac{\sin(4x)}{4}-\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\times\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{1}{32}(0+\pi) = \frac{\pi}{32}.\end{aligned}$$

## 4.4 Applications à la géométrie

### 4.4.1 Cercles et disques

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soient $\Omega$ un point du plan d'affixe $\omega$ et $R$ un réel positif ou nul.

En identifiant un point et son affixe, on note $C(\omega,R)$ (resp. $D_f(\omega,R)$, $D_o(\omega,R)$) le cercle (resp. le disque fermé, le disque ouvert) de centre $\omega$ et de rayon $R$. On a immédiatement

$$C(\omega,R)=\{z\in\mathbb{C}/\ |z-\omega|=R\},$$

et

$$D_f(\omega,R)=\{z\in\mathbb{C}/\ |z-\omega|\leqslant R\},$$

et

$$D_o(\omega,R)=\{z\in\mathbb{C}/\ |z-\omega|<R\}.$$

A l'aide de la forme trigonométrique d'un nombre complexe, on peut donner chacun de ces trois ensembles en extension. Par exemple, pour $z\in\mathbb{C}$, $z\in C(\omega,R)\Leftrightarrow\exists\theta\in\mathbb{R}/\ z-\omega=Re^{i\theta}\Leftrightarrow\exists\theta\in\mathbb{R}/\ z=\omega+Re^{i\theta}$. Ainsi,

$$C(\omega,R)=\{\omega+Re^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}\},$$

et

$$D_f(\omega,R)=\{\omega+re^{i\theta},\ (r,\theta)\in[0,R]\times\mathbb{R}\},$$

et

$$D_o(\omega,R)=\{\omega+re^{i\theta},\ (r,\theta)\in[0,R[\times\mathbb{R}\}.$$

### 4.4.2 Interprétation géométrique d'un argument de $\dfrac{d-c}{b-a}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On sait déjà que pour tout point $M$ distinct de $O$,

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg\left(z_M\right)\ [2\pi].$$

Plus généralement, si $A$ et $B$ sont deux points distincts d'affixes respectives $a$ et $b$ et si $M$ est le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, alors $z_M = b - a$ puis

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg\left(z_M\right) = \arg(b-a)\ [2\pi].$$

Soient alors $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, d'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \arg(d-c) - \arg(b-a)\ [2\pi]\\ &= \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)\ [2\pi].\end{aligned}$$

On a montré que :

**Théorème 31.** Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)\ [2\pi].$$

⇨ **Commentaire** . *On notera que les lettres* $A$, $B$, $C$ *et* $D$ *apparaissent dans l'ordre inverse* $d$, $c$, $b$ *et* $a$ *dans arg*$\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)$.

En particulier, si $A$, $B$ et $C$ sont trois points tels que $A \neq B$ et $A \neq C$, alors

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi].$$

A partir de cette formule, on peut obtenir une caractérisation de l'alignement des trois points deux à deux distincts $A$, $B$ et $C$ ou de l'orthogonalité des droites $(AB)$ et $(AC)$ (quand $B \neq A$ et $C \neq A$).

$$\begin{aligned}A,\ B \text{ et } C \text{ alignés} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0\ [\pi]\\ &\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}^*.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}(AB)\perp(AC) &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\\ &\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*.\end{aligned}$$

On a montré que

**Théorème 32.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan.

Si $A$, $B$ et $C$ sont deux à deux distincts, $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si $\Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}^*$.

Si $B \neq A$ et $C \neq A$, les droites $(AB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires si et seulement si $\Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$.

**Exercice 12.** Pour $z \neq 1 + 2i$, on pose $Z = \dfrac{z+1+i}{z-1-2i}$.

Déterminer et construire l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que

**1)** $Z$ est réel.

**2)** $Z$ est imaginaire pur.

**Solution 12.** Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note A et B les points d'affixes respectives $-1-i$ et $1+2i$.

**1ère solution.** On pose $z = x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, et on note M l'image ponctuelle de $z$. Pour $z \neq 1+2i$,

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{x+iy+1+i}{x+iy-1-2i} = \frac{(x+1)+i(y+1)}{(x-1)+i(y-2)} = \frac{((x+1)+i(y+1))((x-1)-i(y-2))}{((x-1)+i(y-2))((x-1)-i(y-2))} \\
&= \frac{(x+1)(x-1)+(y+1)(y-2)+i(-(x+1)(y-2)+(y+1)(x-1))}{(x-1)^2+(y-2)^2} \\
&= \frac{x^2+y^2-y-3+i(3x-2y+1)}{(x-1)^2+(y-2)^2}
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{3x-2y+1}{(x-1)^2+(y-2)^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow 3x-2y+1 \text{ et } (x,y) \neq (1,2).
\end{aligned}$$

L'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que Z soit réel est la droite d'équation $3x-2y+1=0$ privée du point B. On note que $3x_A - 2y_A + 1 = -3+2+1 = 0$ et donc que le point A appartient à cette droite (ou encore si $z = z_A$, alors $Z = 0 \in \mathbb{R}$). Finalement, l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que Z soit réel est la droite (AB) privée du point B.

De même,

$$\begin{aligned}
Z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-y-3}{(x-1)^2+(y-2)^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2-y-3 = 0 \text{ et } (x,y) \neq (1,2) \\
&\Leftrightarrow x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \text{ et } (x,y) \neq (1,2).
\end{aligned}$$

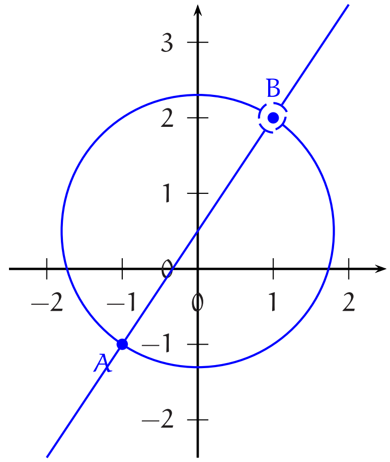
L'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que Z soit imaginaire pur est le cercle d'équation $x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$ privé du point B ou encore le cercle de centre $\Omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$. On note que que le point A appartient à ce cercle. Plus précisément, $\Omega$ est le milieu du segment [AB] et donc, l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que Z soit imaginaire pur est le cercle de diamètre [AB] privé du point B.

**2ème solution.** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1+2i\}$. On note M le point d'affixe $z$. On a donc $M \neq B$ puis

$$\begin{aligned}
Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z = z_A \text{ ou } \left(z \neq z_A \text{ et } \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = 0\ [\pi]\right) \\
&\Leftrightarrow M = A \text{ ou } \left(M \neq A \text{ et } \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = 0\ [\pi]\right) \\
&\Leftrightarrow A,\ B \text{ et } M \text{ alignés} \\
&\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow z = z_A \text{ ou } \left(z \neq z_A \text{ et } \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right) \\
&\Leftrightarrow M = A \text{ ou } \left(M \neq A \text{ et } \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right) \\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre [AB] privé du point B.}
\end{aligned}$$




## 5 Racines $n$-èmes d'un nombre complexe

### 5.1 Racines $n$-ème de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines $n$-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ sont les nombres complexes $z$ tels que $z^n = 1$. On note $U_n$ l'ensemble des racines $n$-èmes de l'unité. Donc,

$$U_n = \{z \in \mathbb{C}/\ z^n = 1\}.$$

On détermine maintenant ces nombres. Le cas $n = 1$ étant immédiat, on suppose dorénavant $n \geqslant 2$. Déjà, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^n = 1 \Rightarrow |z^n| = 1 \Rightarrow |z|^n = 1 \Rightarrow |z| = 1 \text{ (car} |z| \text{ est un réel positif).}$$

Donc $U_n \subset U$. Soit alors $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = 1 \Leftrightarrow e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ n\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

On a montré que

$$\boxed{U_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

Un nouveau problème se pose : ces nombres ne sont pas deux à deux distincts. On détermine maintenant combien de racines $n$-èmes deux à deux distinctes possède le nombre $1$ dans $\mathbb{C}$ ou encore on détermine le **cardinal** de $U_n$.

Nous avons besoin d'un peu d'arithmétique pour résoudre ce problème. Nous donnons sans démonstration un résultat (résultat qui sera énoncé et démontré dans le chapitre « arithmétique ») : (division euclidienne d'un entier relatif par un entier naturel non nul) si $a$ est un entier relatif et $b$ un entier naturel non nul, il existe un couple d'entiers relatifs $(q, r)$ et un seul tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r \leqslant b - 1$.

Soit $k$ un entier relatif. La division euclidienne de $k$ par $n$ s'écrit $k = qn + r$ où $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0, n-1]\!]$. On a alors

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i(qn+r)\pi}{n}} = e^{\frac{2ir\pi}{n} + 2iq\pi} = e^{\frac{2ir\pi}{n}}.$$

Ceci montre que le nombre complexe $1$ admet dans $\mathbb{C}$ au plus $n$ racines $n$-èmes deux à distinctes à savoir les nombres de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Vérifions maintenant que ces nombres sont deux à deux distincts. Soit $(k, l) \in [\![0, n-1]\!]^2$ tel que $k < l$. Alors, $1 \leqslant l - k \leqslant n - 1$ puis $\dfrac{2(l-k)\pi}{n} \in \left[\dfrac{2\pi}{n}, \dfrac{2(n-1)\pi}{n}\right] \subset ]0, 2\pi[$ et donc $e^{\frac{2i(l-k)\pi}{n}} \neq 1$. On en déduit que $e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq e^{\frac{2il\pi}{n}}$ (car $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2il\pi}{n}} \Leftrightarrow e^{\frac{2i(l-k)\pi}{n}} = 1$). Ceci montre que les $n$ nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont deux à deux distincts.

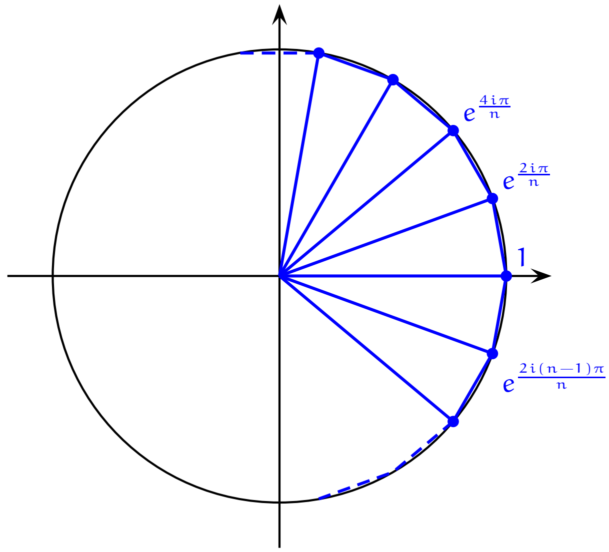
Signalons enfin que pour $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$,

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2il\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}/\ \frac{2l\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} + 2q\pi \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}/\ l = k + qn \Leftrightarrow k \equiv l\ [n].$$

On peut énoncer :

**Théorème 33.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- $U_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Le nombre 1 admet dans $\mathbb{C}$ exactement $n$ racines $n$-èmes deux à deux distinctes. Ce sont les nombres de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$ et donc on a aussi $U_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.
- $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2$, $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2il\pi}{n}} \Leftrightarrow k \equiv l\ [n]$.

Les images des racines $n$-èmes de l'unité dans le plan forment (pour $n \geqslant 3$) un **polygone régulier convexe** $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ à $n$ côtés inscrit dans le cercle de centre $O$ et de rayon 1 c'est-à-dire que $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-2}A_{n-1} = A_{n-1}A_0$ et $\widehat{A_0A_1A_2} = \widehat{A_1A_2A_3} = \ldots = \widehat{A_{n-1}A_0A_1}$ et que tous les angles sont saillants et pas rentrants.

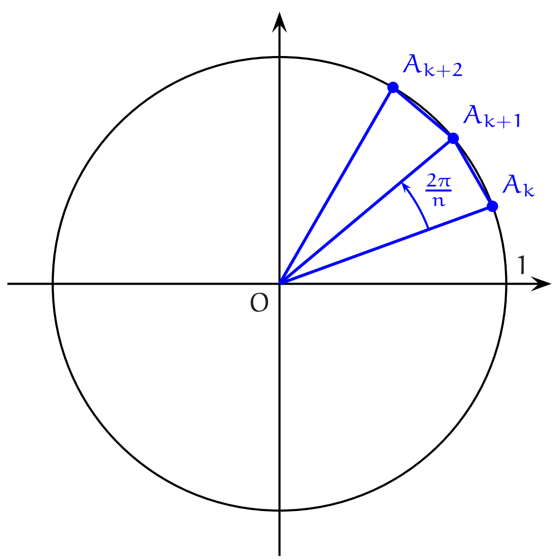



La longueur d'un côté est

$$\left|e^{\frac{2i(k+1)\pi}{n}} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = \left|e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}}\left(e^{\frac{i\pi}{n}} - e^{-\frac{i\pi}{n}}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

En ce qui concerne les angles aux sommets, puisque le triangle $OA_kA_{k+1}$ est isocèle en $O$ (voir figure page suivante),

$$A_k\widehat{A_{k+1}}A_{k+2} = 2A_k\widehat{A_{k+1}}O = \pi - A_k\widehat{O}A_{k+1} = \pi - \frac{2\pi}{n} = \frac{(n-2)\pi}{n}.$$




Signalons enfin une propriété importante des racines $n$-èmes de l'unité :

**Théorème 34.** Pour $n \geqslant 2$, la somme des racines $n$-èmes de l'unité est nulle.

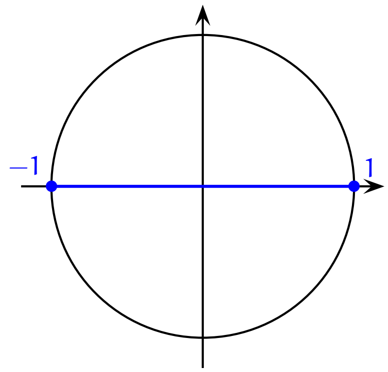
**Démonstration .** Soit $n \geqslant 2$. Les racines $n$-èmes deux à deux distinctes de 1 dans $\mathbb{C}$ sont les nombres de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$. Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On a $\omega \neq 1$ (car $n \geqslant 2$) et $\omega^n = 1$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0.$$

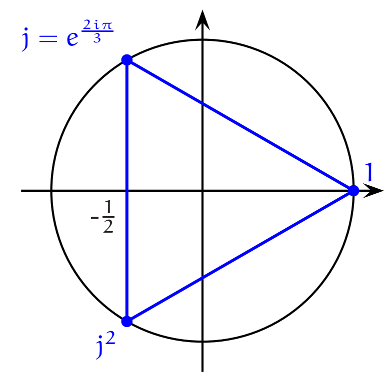
❑

On détaille maintenant les cas $n \in \{2,3,4,5,6\}$.

• L'équation $z^2 = 1$ admet pour ensemble de solutions $\{-1,1\}$. Donc, $U_2 = \{1,-1\}$. La somme des deux racines carrées de $1$ est effectivement nulle.




• On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a alors $U_3 = \left\{1, j, j^2\right\}$.




Le nombre $j$ vérifie

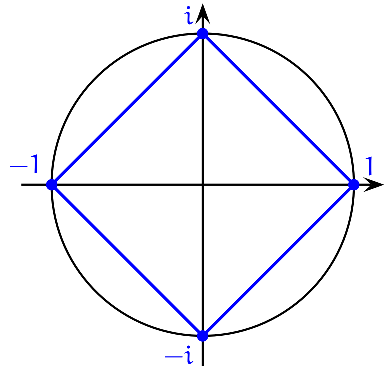
| |
|---|
| • $j^3 = 1$ |
| • $j^2 = \dfrac{1}{j} = \bar{j} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ |
| • $1 + j + j^2 = 0$ et donc $1 + j = -j^2$, $1 + j^2 = -j$ et $j + j^2 = -1$ |
| • $\forall n \in \mathbb{Z}$, $j^{3n} = 1$, $j^{3n+1} = j$ et $j^{3n+2} = j^2$. |

Les solutions de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ sont $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = j$ et $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j} = j^2$. On a donc la factorisation valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ :

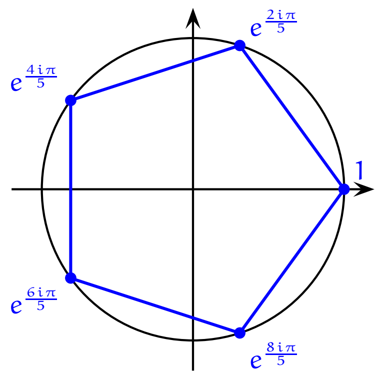
$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1) = (z-1)(z-j)\left(z-j^2\right).$$

• Immédiatement, $U_4 = \left\{e^{\frac{ik\pi}{2}}, k \in [\![0,3]\!]\right\} = \{1, i, -1, -i\}$. Ce résultat peut aussi s'obtenir directement à partir de la factorisation valable pour tout $z$ dans $\mathbb{C}$ :

$$z^4 - 1 = \left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i).$$




- $\mathbb{U}_5 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}}\right\}$.




On se propose de déterminer les valeurs explicites de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ puis de fournir une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ puis $a = \omega + \omega^4$ et $b = \omega^2 + \omega^3$. Puisque $\omega^5 = 1$, on a $\omega^4 = \frac{1}{\omega} = \overline{\omega}$ et de même $\omega^3 = \frac{1}{\omega^2} = \overline{\omega^2}$. Donc, $a = \omega + \overline{\omega} = 2\mathrm{Re}(\omega) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et de même $b = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Ensuite,

$$a + b = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$$

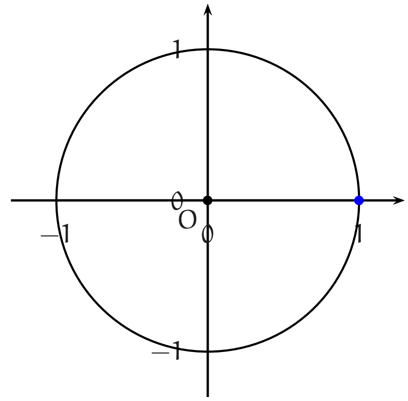
(car $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$) et

$$ab = \left(\omega + \omega^4\right)\left(\omega^2 + \omega^3\right) = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1.$$

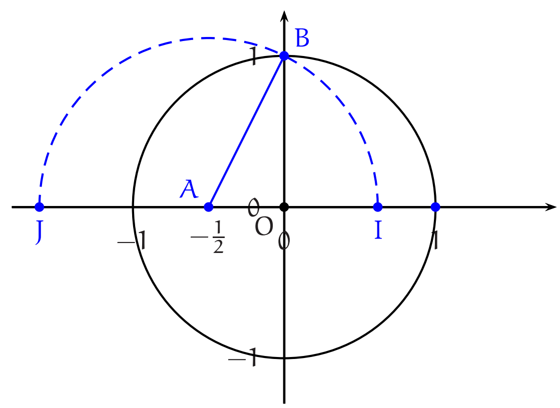
On en déduit que $a$ et $b$ sont les deux solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$. Donc, $\{a, b\} = \left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$. Enfin, $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $a > 0$. On en déduit que $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et que $b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ puis que

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ et } \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}.}$$

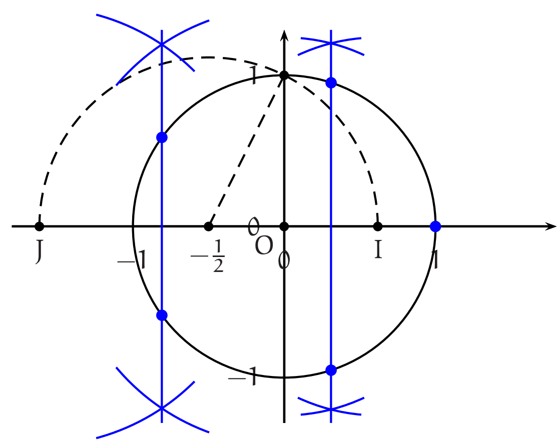
Ces résultats permettent de fournir une construction du pentagone régulier à la règle et au compas. On part d'un cercle et on fixe l'unité de longueur égale à son rayon. On munit le plan d'un repère orthonormé adapté et on place le point de coordonnées $(1, 0)$ qui est l'un des cinq sommet du pentagone à construire :



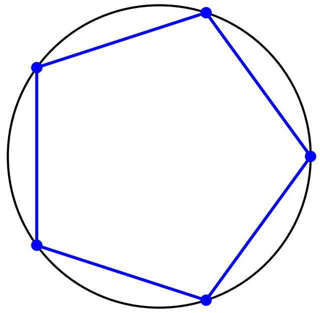

On place le point $A$ de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et le point $B$ de coordonnées $(0, 1)$. La distance $AB$ est égale à $\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$ ou encore $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. On rabat cette distance au compas pour obtenir les nombres $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ sur l'axe des abscisses. On note I et J les points obtenus :

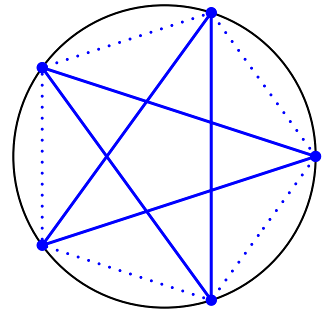



Les médiatrices des segments $[OI]$ et $[OJ]$ ont pour équations respectives $x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$ et $x = -\dfrac{\sqrt{5} + 1}{4}$ ou encore $x = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $x = \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$. Ces deux médiatrices coupent donc le cercle en les quatre autres sommets du pentagone à construire.

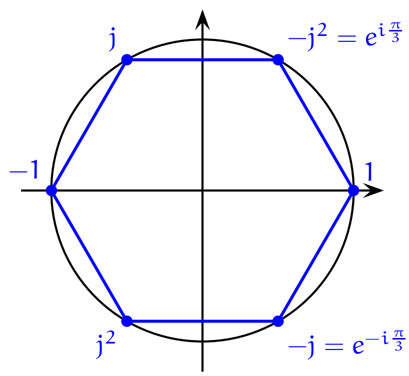



On efface (éventuellement) les traits de construction et on trace le pentagone. Si on trace les diagonales du pentagone et que l'on efface les côtés, on obtient l'étoile à 5 branches dans laquelle on voit apparaître un pentagone régulier ...





• Les racines 6-èmes de l'unité sont deux à deux opposées car $\forall z \in \mathbb{C}$, $(-z)^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^6 - 1 = 0$. D'autre part, $U_3 \subset U_6$ car $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^3 = 1 \Rightarrow z^6 = 1$. $U_6$ contient donc $1$, $j$ et $j^2$ et les opposés de ces nombres. Tous ces nombres étant deux à deux distincts (ce qui est géométriquement clair), on a donc $U_6 = \left\{1, -j^2, j, -1, j^2, -j\right\}$.




## 5.2 Racines n-èmes d'un nombre complexe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $z^n = 0$ admet une solution et une seule à savoir $z = 0$ ou encore le nombre $0$ admet exactement une racine $n$-ème à savoir $0$.

On se donne dorénavant un nombre complexe non nul $A$ et on cherche à résoudre l'équation

$$z^n = A \ (E).$$

On pose $A = Re^{i\theta}$ où $R \in ]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

**1ère résolution.** Le nombre complexe $a = \sqrt[n]{R}e^{\frac{i\theta}{n}}$ est un nombre complexe non nul tel que $a^n = Re^{i\theta} = A$. Par suite, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} z^n = A \Leftrightarrow z^n = a^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^n = 1 \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/ \ \frac{z}{a} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/ \ z = \sqrt[n]{R}e^{\frac{i\theta}{n}} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}}. \end{aligned}$$

**2ère résolution.** On pose $z = re^{i\alpha}$ où $r \in ]0, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z^n = A \Leftrightarrow r^n e^{in\alpha} = Re^{i\theta} \Leftrightarrow r^n = R \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/ \ n\alpha = \theta + 2k\pi \\ \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{R} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/ \ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/ \ z = \sqrt[n]{R}e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Ainsi, les racines $n$-èmes de $A$ sont les nombres de la forme $\sqrt[n]{R}e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Comme dans le paragraphe précédent, les nombres $\sqrt[n]{R}e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont deux à deux distincts et sont toutes les racines $n$-èmes de $A$ dans $\mathbb{C}$. La présentation de ces racines $n$-èmes sous la forme $\sqrt[n]{R}e^{\frac{i\theta}{n}} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$ montre qu'on obtient toutes les racines $n$-èmes de $A$ en multipliant l'une d'entre elles par les racines $n$-èmes de l'unité. On peut énoncer :

**Théorème 35.**

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout nombre complexe non nul admet exactement $n$ racines $n$-èmes deux à deux distinctes.

• Si $A = Re^{i\theta}$ où $(R, \theta) \in ]0, +\infty[\times\mathbb{R}$, les racines $n$-èmes de $A$ sont les nombres complexes de la forme $\sqrt[n]{R}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

• On obtient toutes les racines $n$-èmes d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une d'entre elles par les racines $n$-èmes de l'unité.

Par exemple, puisque $-16 = 16e^{i\pi}$, une racine quatrième de $-16$ dans $\mathbb{C}$ est $2e^{\frac{i\pi}{4}}$ ou encore $\sqrt{2}(1+i)$. Les racines quatrièmes de $-16$ dans $\mathbb{C}$ sont alors

$$z_0 = \sqrt{2}(1+i),\ z_1 = z_0 \times i = \sqrt{2}(-1+i),\ z_2 = z_0 \times i^2 = \sqrt{2}(-1-i) \text{ et } z_3 = z_0 \times i^3 = \sqrt{2}(1-i).$$

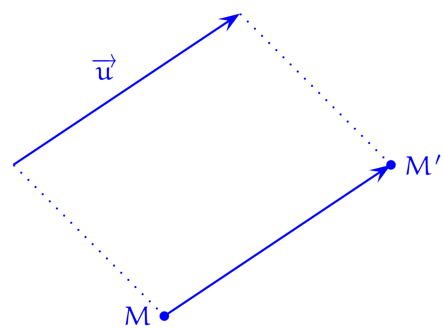
# 6 Similitudes planes directes

## 6.1 Translations, homothéties, rotations

### 6.1.1 Translations

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. La **translation** de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application du plan dans lui-même qui, à un point $M$ du plan, associe de point $M'$ du plan tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ se note $t_{\overrightarrow{u}}$. On a donc

$$\forall (M, M') \in \mathcal{P}^2,\ t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}.$$




Le théorème suivant est immédiat :

**Théorème 36.**

• Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan, $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$.

• Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, $t_{\overrightarrow{u}}$ est une bijection du plan sur lui-même et $\left(t_{\overrightarrow{u}}\right)^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$.

On veut réécrire l'égalité $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. On note $z$, $z'$ et $z_{\overrightarrow{u}}$ les affixes respectives de $M$, $M'$ et $\overrightarrow{u}$. On obtient

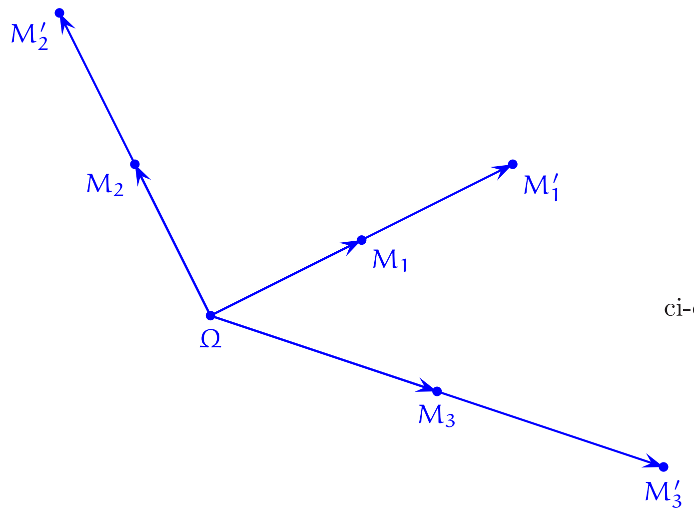
$$z' = z + z_{\overrightarrow{u}}.$$

L'égalité ci-dessus signifie que si $M$ est un point du plan d'affixe $z$, alors son image $M'$ par $t_{\overrightarrow{u}}$ est le point d'affixe $z'$ où $z' = z + z_{\overrightarrow{u}}$. L'écriture $z' = z + z_{\overrightarrow{u}}$ s'appelle l'**expression complexe** de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Cette expression est du type $z' = az + b$ avec $a = 1$ et $b$ est complexe.

### 6.1.2 Homothéties

Soit $\Omega$ un point du plan et $k$ un réel. L'**homothétie** de centre $\Omega$ et de rapport $k$ est l'application du plan dans lui-même qui, à un point $M$ du plan, associe de point $M'$ du plan tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. L'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ se note $h_{\Omega,k}$ ou $\text{hom}_{\Omega,k}$. On a donc

$$\forall (M, M') \in \mathcal{P}^2,\ h_{\Omega,k}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$




ci-contre, $k = 2$

Quand $k = 1$, $h_{\Omega,k}$ est l'identité du plan. Quand $k \neq 1$, on verra plus loin que $h_{\Omega,k}$ admet un et un seul **point invariant** (c'est-à-dire un point $M$ tel que $h_{\Omega,k}(M) = M$) à savoir le centre de l'homothétie $h_{\Omega,k}$. Quand $k = -1$, $h_{\Omega,k}$ est la **symétrie centrale de centre** $\Omega$ (dans ce cas, pour tout $M$, $\Omega$ est le milieu du segment $[MM']$).

Le théorème suivant est immédiat :

**Théorème 37.**

- Pour tout point du plan $\Omega$ et tous réels $k$ et $k'$, $h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k'} = h_{\Omega,kk'}$.
- Pour tout point $\Omega$ du plan et tout réel **non nul** $k$, $h_{\Omega,k}$ est une bijection du plan sur lui-même et $\left(h_{\Omega,k}\right)^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}$.

Déterminons maintenant l'expression complexe de l'homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et de rapport $k (\in \mathbb{R})$. Si $M$ est un point du plan, on note toujours $z$ son affixe puis on pose $M' = h_{\Omega,k}(M)$ et on note $z'$ l'affixe de $M'$. L'égalité $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ s'écrit $z' - \omega = k(z - \omega)$ ou encore

**Théorème 38.** Soient $\Omega$ un point du plan d'affixe $\omega$ et $k$ un réel.

L'expression complexe de l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ est $z' = \omega + k(z - \omega)$.

Cette expression complexe est du type $z' = az + b$ où $b$ est un nombre complexe et $a$ est un réel ($a = k$ est le rapport de l'homothétie).

Déterminons maintenant les points invariants par $h_{\Omega,k}$ c'est-à-dire les points $M$ du plan tels que $h_{\Omega,k}(M) = M$. Si $k = 1$, immédiatement $h_{\Omega,k} = Id_{\mathcal{P}(E)}$ ou encore tout point du plan est invariant par $h_{\Omega,k}$. Si $k \neq 1$, pour tout point $M$ du plan,

$$M' = M \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow (1 - k)\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow M = \Omega.$$

Donc

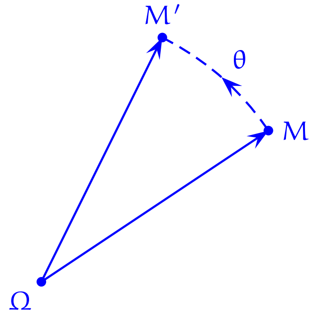
**Théorème 39.** Soient $\Omega$ un point du plan et $k$ un réel.

- Si $k = 1$, $h_{\Omega,k} = Id_{\mathcal{P}}$.
- Si $k \neq 1$, $h_{\Omega,k}$ admet un point invariant et un seul, son centre $\Omega$.

### 6.1.3 Rotations

On se donne un point $\Omega$ (le centre de la rotation) et un nombre réel $\theta$. On définit alors la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$, notée $r_{\Omega,\theta}$. Soit $M$ un point du plan. On note $M' = r_{\Omega,\theta}(M)$.

- Si $M = \Omega$, alors on pose $M' = \Omega$.
- Si $M \neq \Omega$, alors $M'$ est le point du plan tel que $\Omega M' = \Omega M$ (ce qui impose $M' \neq \Omega$) et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi]$.




Déterminons l'expression complexe de $r_{\Omega,\theta}$. Soit $M$ un point du plan distinct de $\Omega$ dont l'affixe est notée $z$ et soit $M'$ un point du plan dont l'affixe est noté $z'$.

$$\begin{aligned}M' = r_{\Omega,\theta}(M) &\Leftrightarrow \Omega M' = \Omega M \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow |z'-\omega| = |z-\omega| \text{ et } \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}\\ &\Leftrightarrow z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega).\end{aligned}$$

Cette dernière égalité reste valable quand $M = \Omega$ ou encore quand $z = \omega$. Donc,

**Théorème 40.** Soient $\Omega$ un point du plan d'affixe $\omega$ et $\theta$ un réel.

L'expression complexe de la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ est $z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$.

Cette expression complexe est du type $z' = az + b$ où $b$ est un nombre complexe et $a$ est un nombre complexe de module $1$ ($a = e^{i\theta}$ où $\theta$ est une mesure de l'angle de la rotation). Sinon, les deux théorèmes suivants sont immédiats.

**Théorème 41.**

- Pour tout point du plan $\Omega$ et tous réels $\theta$ et $\theta'$, $r_{\Omega,\theta} \circ r_{\Omega,\theta'} = r_{\Omega,\theta+\theta'}$.
- Pour tout point $\Omega$ du plan et tout réel $\theta$, $r_{\Omega,\theta}$ est une bijection du plan sur lui-même et $\left(r_{\Omega,\theta}\right)^{-1} = r_{\Omega,-\theta}$.

**Théorème 42.** Soient $\Omega$ un point du plan et $\theta$ un réel.

- Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, $r_{\Omega,\theta} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.
- Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $r_{\Omega,\theta}$ admet un point invariant et un seul, son centre $\Omega$.

## 6.2 Etude des transformations $z \mapsto az + b$

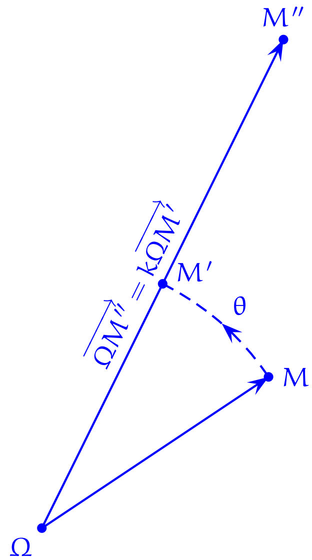
Soient $\Omega$ un point du plan, $k$ un réel positif et $\theta$ un réel tels que $ke^{i\theta} \notin \{0, 1\}$ ($ke^{i\theta} \in \{0, 1\}$ équivaut à $k = 0$ ou ($k = 1$ et $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$) et donc $ke^{i\theta} \notin \{0, 1\}$ équivaut à ($k \neq 0$ et ($k \neq 1$ ou $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$)). Effectuons successivement la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ puis l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$. La transformation obtenue s'appelle la **similitude directe de centre $\Omega$, de rapport $k$ et d'angle $\theta$** et note $s_{\Omega,\theta,k}$ la transformation ainsi obtenue.

Soit $M$ un point du plan dont l'affixe est notée $z$. On pose $M' = r_{\Omega,\theta}(M)$ et $M'' = h_{\Omega,k}(M')$ de sorte que $M'' = s_{\Omega,\theta,k}(M)$. On note $z'$ et $z''$ les affixes respectives de $M'$ et $M''$. On a

$$z'' - \omega = e^{i\theta}(z' - \omega) = ke^{i\theta}(z - \omega),$$

et donc $z'' = \omega + ke^{i\theta}(z - \omega)$.

L'écriture précédente s'écrit sous la forme $z'' = az + b$ où $a$ est un nombre complexe distinct de $0$ et de $1$ et $b$ est un nombre complexe.




On a obtenu

**Théorème 43.** Soient $\Omega$ un point du plan, $k$ un réel et $\theta$ un réel tels que $ke^{i\theta} \notin \{0, 1\}$.

L'expression complexe de la similitude directe de centre $\Omega$, d'angle $\theta$ et de rapport $k$ est $z' = \omega + ke^{i\theta}(z - \omega)$.

Effectuons maintenant le travail inverse. On se donne deux nombres complexes $a$ et $b$ et on considère l'application $f$ du plan dans lui-même d'expression complexe $z' = az + b$. On va analyser la nature de $f$ en fonction de $a$ et $b$.

**1er cas.** Si $a = 0$, alors pour tout $z$ dans $\mathbb{C}$, $z' = b$. Dans ce cas, l'application $f$ est constante et en particulier, l'application $f$ n'est pas une bijection du plan sur lui-même.

**2ème cas.** On suppose $a \neq 0$. Déterminons les points invariants par $f$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z' = z \Leftrightarrow az + b = z \Leftrightarrow (1 - a)z = b.$$

**1er sous-cas.** Si $a = 1$, alors pour tout $z$ dans $\mathbb{C}$, $z' = z + b$. Dans ce cas, $f$ est la translation de vecteur d'affixe $b$ et en particulier, si $a = 1$ et $b = 0$, $f$ est l'identité du plan.

**2ème sous-cas.** Si $a \neq 1$, $f$ admet un point invariant et un seul à savoir le point $\Omega$ d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1 - a}$ (ce qui est aussi le cas quand $a = 0$). Puisque $\Omega$ est invariant par $f$, on a $\omega = a\omega + b$ et pour $z$ dans $\mathbb{C}$, on peut écrire en posant $a = re^{i\theta}$ où $r \in ]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$z' - \omega = (az + b) - (a\omega + b) = a(z - \omega) = re^{i\theta}(z - \omega).$$

Dans ce cas, $f$ est la composée de l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k = |a|$ et de la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta = \arg(a)$ $[2\pi]$ c'est-à-dire la similitude directe de centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1 - a}$, de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta = \arg(a)$ $[2\pi]$.

On a (presque) montré que

**Théorème 44.** Soient $a$ et $b$ deux nombres complexes. Soit $f$ l'application du plan dans lui-même d'expression complexe $z' = az + b$.

- Si $a = 0$, $f$ est constante.
- Si $a = 1$, $f$ est la translation de vecteur d'affixe $b$.
- Si $a \notin \{0, 1\}$, $f$ est la similitude directe centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1 - a}$, de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta = \arg(a)$ $[2\pi]$.

De plus,

- $f$ a un unique point invariant si et seulement si $a \neq 1$.
- $f$ est une translation si et seulement si $a = 1$.
- $f$ est une homothétie si et seulement si $a \in \mathbb{R}$.
- $f$ est une rotation si et seulement si $|a| = 1$.

**Exemple.** Considérons les trois applications $f_1$, $f_2$ et $f_3$ du plan dans lui-même d'expressions complexes respectives $z' = 3z - 1 + 2i$, $z' = -iz - 3 - i$ et $z' = (1 + i)z - 1$.

- $f_1$ est une homothétie de rapport 3. Le centre de $f_1$ est son unique point invariant. Or, pour $z \in \mathbb{C}$, $z = 3z - 1 + 2i \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2} - i$.

$f_1$ est donc l'homothétie de centre $\Omega\left(\frac{1}{2},-1\right)$ et de rapport $k=3$.

• $f_2$ est une rotation d'angle $\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Le centre de $f_2$ est son unique point invariant. Or, pour $z\in\mathbb{C}$,

$$z=-iz-3-i\Leftrightarrow z=-\frac{3+i}{1+i}\Leftrightarrow z=-\frac{(3+i)(1-i)}{2}\Leftrightarrow z=-2+i.$$

$f_2$ est donc la rotation de centre $\Omega(-2,1)$ et d'angle $\theta=-\frac{\pi}{2}$ ou encore le quart de tour indirect de centre $\Omega$.

• $f_3$ est une similitude directe de rapport $|1+i|=\sqrt{2}$ et d'angle $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$. Le centre de $f_3$ est son unique point invariant. Or, pour $z\in\mathbb{C}$,

$$z=(1+i)z-1\Leftrightarrow iz=1\Leftrightarrow z=-i.$$

$f_3$ est donc la similitude directe de centre $\Omega(0,-1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\theta=\frac{\pi}{4}$.

# 7 Exponentielle d'un nombre complexe

## 7.1 Définition

Définition 8. Pour tout nombre complexe $z$, on pose

$$e^z=e^{\mathrm{Re}(z)}\times e^{i\mathrm{Im}(z)}.$$

Puisque $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont des réels, le nombre $e^{\mathrm{Re}(z)}$ etant strictement positif, $e^{\mathrm{Re}(z)}\times e^{i\mathrm{Im}(z)}$ est la **forme trigonométrique** de $e^z$. On a donc immédiatement

**Théorème 45.**

• $\forall z\in\mathbb{C},\ e^z\neq 0$,

• $\forall z\in\mathbb{C},\ |e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg(e^z)=\mathrm{Im}(z)$ $[2\pi]$.

On prendra garde de ne pas remplacer « $e^z\neq 0$ » par « $e^z>0$ ». $z$ est maintenant un nombre complexe quelconque et pas obligatoirement un réel. Par exemple, $e^{i\pi}=-1$ est un réel strictement négatif et $e^j=e^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ n'est pas un réel.

## 7.2 Propriétés

On commence par les cas d'égalité des exponentielles de deux nombres complexes.

**Théorème 46.**

• $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\ e^z=e^{z'}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ z'=z+2ik\pi$.

• $\forall z\in\mathbb{C},\ e^z=1\Leftrightarrow z\in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes. La condition nécessaire et suffisante d'égalité de deux nombres complexes non nuls sous forme trigonométrique donnée dans le théorème 28 page 25 fournit

$$\begin{aligned}e^z=e^{z'}&\Leftrightarrow\left|e^{z'}\right|=|e^z|\text{ et }\arg\left(e^{z'}\right)=\arg(e^z)\ [2\pi]\\&\Leftrightarrow e^{\mathrm{Re}(z')}=e^{\mathrm{Re}(z)}\text{ et }\exists k\in\mathbb{Z}/\ \mathrm{Im}(z')=\mathrm{Im}(z)+2k\pi\\&\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z')=\mathrm{Re}(z)\text{ et }\exists k\in\mathbb{Z}/\ \mathrm{Im}(z')=\mathrm{Im}(z)+2k\pi\\&\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ z'=z+2ik\pi.\end{aligned}$$

En particulier,

$$e^z=1\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ z=2ik\pi\Leftrightarrow z\in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

❏

Une conséquence importante du théorème 42 est que l'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & e^z\end{array}$ **n'est pas injective** alors que l'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & e^x\end{array}$ est injective.

Le théorème qui suit donne les propriétés algébriques de l'exponentielle d'un nombre complexe : il s'agit une nouvelle fois des règles de calcul usuelles sur les exposants.

**Théorème 47.**

**1)** $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$.

**2)** $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

**3)** $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$.

**4)** $\forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^z)^n = e^{nz}$.

**Démonstration .**

**1)** Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où $x$, $x'$, $y$ et $y'$ sont quatre réels.

$$\begin{aligned} e^z \times e^{z'} &= e^x \times e^{iy} \times e^{x'} \times e^{iy'} = e^x \times e^{x'} \times e^{iy} \times e^{iy'} \\ &= e^{x+x'} \times e^{i(y+y')} = e^{(x+x')+i(y+y')} \\ &= e^{z+z'}. \end{aligned}$$

**2)** Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$e^z \times e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1.$$

Par suite, $e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

**3)** Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\frac{e^z}{e^{z'}} = e^z \times \frac{1}{e^{z'}} = e^z \times e^{-z'} = e^{z-z'}.$$

**4)** Soit $z \in \mathbb{C}$. Par récurrence, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(e^z)^n = e^{nz}$.
Si $n$ est un entier relatif strictement négatif, alors $-n > 0$ et

$$(e^z)^n = \frac{1}{(e^z)^{-n}} = \frac{1}{e^{-nz}} = e^{nz}.$$

❏

Il reste à se préoccuper de la surjectivité de l'exponentielle. On sait déjà que l'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & e^z\end{array}$ n'est pas surjective car le nombre $0$ n'a pas d'antécédent par cette application ($\forall z \in \mathbb{C},\ e^z \neq 0$). On va voir par contre que l'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}^*\\ z & \mapsto & e^z\end{array}$ est surjective.

Soit $Z$ un nombre complexe non nul. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} e^z = Z &\Leftrightarrow |e^z| = |Z| \text{ et } \arg(e^z) = \arg(Z))\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow e^{\mathrm{Re}(z)} = |Z| \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/\ \mathrm{Im}(z) = \arg(Z) + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \ln(|Z|) \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/\ \mathrm{Im}(z) = \arg(Z) + 2k\pi \text{ (car } |Z| \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ z = \ln(|Z|) + i\arg(Z) + 2ik\pi. \end{aligned}$$

On a montré que

**Théorème 48.**

• L'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}^*\\ z & \mapsto & e^z\end{array}$ est surjective.

• Si $Z \in \mathbb{C}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $e^z = Z$ sont les nombres de la forme $z = \ln(|Z|) + i\arg(Z) + 2ik\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Par exemple, les nombres complexes $z$ tels que $e^z = 1$ sont les nombres de la forme $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et les nombres complexes $z$ tels que $e^z = i$ sont les nombres de la forme $i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

De manière générale, si $Z$ est un nombre complexe non nul, l'équation $e^z = Z$ a toujours une infinité de solutions. Pour cette raison, on ne définit pas en classe préparatoire le logarithme d'un nombre complexe et on n'écrit jamais $\ln(Z)$ quand $Z$ est un nombre complexe qui n'est pas un réel strictement positif. Pour les mêmes raisons, on n'écrit jamais $\sqrt{Z}$ quand $Z$ est un nombre complexe qui n'est pas un réel positif ou aussi, on n'écrit jamais $Z^\alpha$ quand $\alpha$ n'est pas entier.