Chapitre 6. « Petits » systèmes d'équations linéaires

Plan du chapitre

Nous avons déjà commencé à parler des systèmes d'équations linéaires dans le chapitre 2 : « Ensembles, relations, applications ». Avant de poursuivre la lecture (active) de ce chapitre, vous pouvez relire d'abord les pages 11 à 14 du chapitre 2.

1 Systèmes à deux inconnues

On se donne six nombres réels (ou complexes) a, b, c, a', b' et c' avec $(a,b) \neq (0,0)$ et $(a',b') \neq (0,0)$. On veut résoudre dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}^2$) le système de deux équations linéaires :

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right. \qquad (S).$$

L'inconnue de ce système est un couple de réels (x,y) (ou de complexes).

1.1 Interprétation géométrique

(Dans ce paragraphe, les nombres a, b, c, a', b', c', x et y sont des réels). Dans le plan rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère (D) et (D') les droites d'équations respectives $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$. Résoudre le système (S) est alors équivalent à trouver les coordonnées des éventuels points communs à (D) et (D'). Les différentes positions relatives de deux droits du plan étant connues, on obtient trois cas de figure :

- Si (D) et (D') ne sont pas parallèles, les droites (D) et (D') ont un et un seul point commun. Dans ce cas, le système (S) admet un et un seul couple solution.
- Si (D) et (D') sont parallèles et non confondues, les droites (D) et (D') n'ont aucun point commun. Dans ce cas, le système (S) n'admet aucun couple solution.
- Si (D) et (D') sont confondues, alors $(D) \cap (D') = (D)$. Dans ce cas, le système (S) admet une infinité de couples solutions. L'ensemble des couples solutions du système (S) est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la droite (D).

On sait qu'un vecteur directeur de la droite (D) (resp. (D')) est le vecteur $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{u}'$) de coordonnées $(-b,a)$ (resp. $(-b',a')$). On sait aussi que (D) et (D') sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont colinéaires ce qui équivaut à $(-b)a' - (-b')a = 0$ ou encore $ab' - a'b = 0$. On retrouve ainsi une partie des résultats du théorème 2 du chapitre 2. On appelle déterminant du système (S) le nombre

$$\Delta = \left|\begin{array}{cc} a & b \\ a' & b' \end{array}\right| = ab' - a'b$$

et on a :

Théorème 1. Le sytème (S) admet un et un seul couple solution si et seulement si le déterminant Δ du système n'est pas nul. Dans le cas où $\Delta = 0$, le système (S) admet soit une infinité de couples solutions, soit pas de couple solution.

1.2 Différentes techniques de résolution

1.2.1 Par substitution

Une méthode sûre en ce début d'année est la méthode par substitution. Dans une équation, on tire une inconnue en fonction de l'autre et on reporte l'expression obtenue dans l'autre équation.

Exemple. On veut résoudre le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=5 \\ 3x-y=13 \end{array}\right.$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=5 \\ 3x-y=13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=3x-13 \\ 2x+3(3x-13)=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 11x=44 \\ y=3x-13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=3\times 4-13 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=-1 \end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions du système (S) est $\mathcal{S} = \{(4,-1)\}$. ❏

⇨ **Commentaire** .

◇ *On a **choisi** d'exprimer y en fonction de x dans la deuxième équation pour éviter les fractions. Il aurait été bien plus maladroit de tirer x en fonction de y dans la première équation :* $x = \frac{1}{2}(-3y+5)$.

◇ *On rappelle que la méthode par substitution continue à fonctionner pour des systèmes d'équations non linéaires comme par exemple* $\left\{\begin{array}{l} x^2 = y \\ y^2 = x \end{array}\right.$.

1.2.2 Par combinaisons linéaires

On élimine une des inconnues dans une équation grâce à une combinaison linéaire des équations. Dans le chapitre 2, on a commencé à souligner les risques de la méthode en ce début d'année : par absence de maîtrise, on court le risque de transformer le système en un système non équivalent. Par exemple, le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{array}\right.$ n'est en aucun cas équivalent à l'unique équation $x - y = 0$ (obtenue en retranchant membre à membre les deux équations). Néanmoins, face à certains systèmes, c'est la méthode à adopter.

On met en place un codage qui permet de rédiger de manière synthétique la résolution d'un système. Ce codage est directement en relation avec les matrices qui sont des tableaux constitués d'un certain nombre de lignes (horizontales) et de colonnes (verticales). Quand on résout un système, on travaille sur les lignes. Le codage choisi pour explique que l'on remplacé l'équation 1 par l'équation obtenue en additionnant membre les équations 1 et 2 est $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ (à la place de ligne 1, on met la ligne 1+ la ligne 2 (d'où le sens de la flèche)). De manière générale, on a le codage suivant :

- $L_i \leftrightarrow L_j$ (échange des lignes i et j (on met L_i à la place de L_j et L_j à la place de L_i))
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$ (multiplication des deux membres de L_i par le nombre λ non nul)
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $(j \neq i)$ (à la ligne i, on ajoute λ fois la ligne j).

Chacune des transformations précédentes transforme le système (S) en un système équivalent. On peut rajouter une transformation plus générale mais dangereuse

- $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ $(j \neq i$ et $\lambda \neq 0)$.

On doit avoir conscience que chaque fois que l'on met en œuvre une des transformations précédentes, **une des équations disparait** et est remplacée par une nouvelle équation. Cette remarque est très importante si on cherche à effectuer plusieurs transformations en même temps, par impatience.

Exemple 1. On veut résoudre le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} 3x + 4y = 10 \\ 2x + 5y = 16 \end{array}\right.$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 4y = 10 \\ 2x + 5y = 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 7x = -14 & L_1 \leftarrow 5L_1 - 4L_2 \\ 2x + 5y = 16 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 4 \end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions du système (S) est $\mathcal{S} = \{(-2, 4)\}$. ❏

Exemple 2. On veut résoudre le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} x + y = -1 \\ x - y = 7 \end{array}\right.$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il est connu que $\left\{\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ L_1 - L_2 \end{array}\right.$. Donc,

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = -1 \\ x - y = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x = 6 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2y = -8 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -4 \end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions du système (S) est $\mathcal{S} = \{(3, -4)\}$. ❏

1.2.3 Formules de Cramer

Ces formules ont été énoncées et démontrées dans le chapitre 2, page 13. Il faut choisir d'utiliser les formules de Cramer quand le système contient un paramètre. Seul le calcul du déterminant du système donne les vrais cas particuliers.

Exemple. Pour $m \in \mathbb{R}$, soit (S_m) le système $\left\{\begin{array}{l} (2m - 3)x + my = 2m^2 - 2m \\ 4mx + (2m + 5)y = 4m^2 + 2m + 5 \end{array}\right.$. Le déterminant du système est

$$\Delta_m = (2m - 3)(2m + 5) - 4m^2 = 4m - 15.$$

1er cas. Si $m \neq \dfrac{15}{4}$, $\Delta_m \neq 0$ et donc (S_m) est un système de Cramer. Ce système admet dans ce cas un et un seul couple solution (x_0, y_0) fourni par les formules de Cramer :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{4m - 15} \left| \begin{array}{cc} 2m^2 - 2m & m \\ 4m^2 + 2m + 5 & 2m + 5 \end{array} \right| = \frac{\left(2m^2 - 2m\right)(2m + 5) - \left(4m^2 + 2m + 5\right) m}{4m - 15} = \frac{4m^2 - 15m}{4m - 15} \\ &= \frac{m(4m - 15)}{4m - 15} = m \end{aligned}$$

et

$$y_0=\frac{1}{4m-15}\begin{vmatrix} 2m-3 & 2m^2-2m \\ 4m & 4m^2+2m+5 \end{vmatrix}=\frac{(2m-3)\left(4m^2+2m+5\right)-4m\left(2m^2-2m\right)}{4m-15}=\frac{4m-15}{4m-15}=1.$$

Si $m\neq\frac{15}{4}$, l'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S}_m=\{(m,1)\}$.

2ème cas. Si $m=\frac{15}{4}$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l}\frac{9}{2}x+\frac{15}{4}y=\frac{165}{8}\\ 15x+\frac{25}{2}y=\frac{275}{4}\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l}12x+10y=55\\ 12x+10y=55\end{array}\right.$ (après multiplication des deux membres de chaque équation par respectivement $\frac{8}{3}$ et $\frac{4}{5}$) ou encore $12x+10y=55$ ou enfin $y=-\frac{6}{5}x+\frac{11}{2}$.

Si $m=\frac{15}{4}$, l'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S}_{\frac{15}{4}}=\left\{\left(x,-\frac{6}{5}x+\frac{11}{2}\right),\ x\in\mathbb{R}\right\}$. Dans ce cas, $\mathcal{S}_m$ contient une infinité de couples solutions.

❑

⇨ **Commentaire** .

◇ *Les cas* $m=0$ *ou* $m=\frac{3}{2}$ *ou* $m=-\frac{5}{2}$ *(cas où certains des coefficients du système sont nuls) n'étaient pas des cas particuliers. Le seul vrai cas particulier est le cas où le déterminant du système est nul, à savoir* $m=\frac{15}{4}$.

◇ *On note que dans le cas où* $m=\frac{15}{4}$, *le couple* $(m,1)$ *continue à être solution car* $x=\frac{15}{4}$ *fournit* $y=-\frac{6}{5}\times\frac{15}{4}+\frac{11}{2}=-\frac{9}{2}+\frac{11}{2}=1$.

1.2.4 Méthode du pivot de Gauss

Nous reparlons de cette méthode dans les deux chapitres sur les matrices. Il s'agit d'une méthode algorithmique consistant à transformer, à l'aide de combinaisons linéaires, le système en un système « triangulaire » équivalent du type $\left\{\begin{array}{r}a_1x+b_1y=c_1\\ b_1'y=c_1'\end{array}\right.$. On peut alors résoudre en remontant les équations à partir de la dernière.

Exemple. On veut résoudre le système (S) : $\left\{\begin{array}{l}3x+4y=10\\ 2x+5y=16\end{array}\right.$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{l}3x+4y=10\\ 2x+5y=16\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3x+4y=10\\ 7y=28\quad L_2\leftarrow 3L_2-2L_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=4\\ x=-2\end{array}\right..$$

L'aspect algorithmique apparaitra davantage avec la résolution des systèmes à 3 équations et 3 inconnues. ❑

2 Systèmes à trois inconnues

2.1 Interprétation géométrique

L'espace de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$. On sait que si a, b, c et d sont 4 réels tels que l'un au moins des trois réels a ou b ou c ne soit pas nuls, alors l'ensemble P d'équation $ax+by+cz=d$ est un plan. Donc, résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l}ax+by+cz=d\\ a'x+b'y+c'z=d'\\ a''x+b''y+c''z=d''\end{array}\right.\quad(S),$$

c'est encore déterminer l'intersection de 3 plans. On trouve assez souvent un point et un seul (mais pas toujours).

De même, résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l}ax+by+cz=d\\ a'x+b'y+c'z=d'\end{array}\right.\quad(S),$$

c'est encore déterminer l'intersection de 2 plans. Quand ces deux plans ne sont pas parallèles, on trouve une droite. On connaît une condition nécessaire et suffisante de parallélisme des deux P et P' d'équations respectives $ax+by+cz=d$ et $a'x+b'y+c'z=d'$: P et P' ne sont pas parallèles si et seulement si les deux vecteurs normaux $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires ce qui équivaut à la « non proportionnalité » des premiers membres de chaque équation.

2.2 Différentes techniques de résolution

2.2.1 Par substitution

Exemple. On veut résoudre le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} 3x+4y+z=2 \\ 2x+2y+3z=3 \\ 4x-y+z=-4 \end{array}\right.$. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+4y+z=2 \\ 2x+2y+3z=3 \\ 4x-y+z=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-3x-4y+2 \\ 2x+2y+3(-3x-4y+2)=3 \\ 4x-y+(-3x-4y+2)=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-3x-4y+2 \\ 7x+10y=3 \\ x-5y=-6 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-3x-4y+2 \\ x=5y-6 \\ 7(5y-6)+10y=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 45y=45 \\ x=5y-6 \\ z=-3x-4y+2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=1 \\ x=-1 \\ z=1 \end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions du système (S) est $\mathcal{S}=\{(-1,1,1)\}$. ❏

2.2.2 Pivot de Gauss

Exemple. On veut de nouveau résoudre le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} 3x+4y+z=2 \\ 2x+2y+3z=3 \\ 4x-y+z=-4 \end{array}\right.$. On se sert du coefficient non nul 3 en haut à gauche pour annuler les coefficients 2 et 4 de x dans les deuxième et troisième équations.

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+4y+z=2 \\ 2x+2y+3z=3 \\ 4x-y+z=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 3x+4y+z=2 & \\ 2y-7z=-5 & L_2\leftarrow -3L_2+2L_1 \\ 19y+z=20 & L_3\leftarrow -3L_3+4L_1 \end{array}\right.$$

On recommence avec les deux dernières équations pour parvenir à la forme triangulaire.

$$\left\{\begin{array}{r} 3x+4y+z=2 \\ 2y-7z=-5 \\ 19y+z=20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 3x+4y+z=2 & \\ 2y-7z=-5 & \\ 135z=135 & L_3\leftarrow 2L_3-19L_2 \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{r} 3x+4y+z=2 \\ 2y-7z=-5 \\ 135z=135 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=1 \\ y=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système (S) est $\mathcal{S}=\{(-1,1,1)\}$. ❏

2.2.3 Utilisation des formules de Cramer

Les formules de Cramer sont pratiques quand il s'agit de résoudre des systèmes à 2 équations et 3 inconnues. On rappelle que cette résolution s'interprète géométriquement comme la détermination de l'intersection de deux plans. Quand ces plans ne sont pas parallèles, on trouve toujours une droite et donc un ensemble de solutions de la forme $\{(x_0+\lambda a, y_0+\lambda b, z_0+\lambda c),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ (un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a,b,c)\neq\overrightarrow{0}$ est $\left\{\begin{array}{l} x=x_0+\lambda a \\ y=y_0+\lambda b \\ z=z_0+\lambda c \end{array}\right.$, $\lambda\in\mathbb{R}$).

Quand on résout un système de deux équations cartésiennes à trois inconnues, la plupart du temps, on prend l'une des inconnues comme paramètre. Dit autrement, résoudre un système de deux équations à trois inconnues, c'est exprimer deux des trois inconnues en fonction de la troisième. Les formules de Cramer sont un outil pour choisir correctement l'inconnue qui va faire office de paramètre.

Exemple. On veut résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} 3x-y+5z=8 \\ -6x+2y-11z=-17 \end{array}\right.$. Ce système peut s'interpréter sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-y=-5z+8 \\ -6x+2y=11z-17 \end{array}\right. \text{ ou aussi } \left\{\begin{array}{l} 3x+5z=y+8 \\ 6x+11z=2y+17 \end{array}\right. \text{ ou aussi } \left\{\begin{array}{l} -y+5z=-3x+8 \\ 2y-11z=6x-17 \end{array}\right. .$$

Dans la première interprétation, on choisit x et y pour inconnues et on prend z comme paramètre. Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 0$.
Dans la deuxième interprétation, on choisit x et z pour inconnues et on prend y comme paramètre. Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 3$.
Dans la troisième interprétation, on choisit y et z pour inconnues et on prend x comme paramètre. Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -11 \end{vmatrix} = 1$.

Les formules de Cramer nous montrent que la meilleure interprétation est la troisième :

$$\begin{aligned}(S) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -y+5z=-3x+8 \\ 2y-11z=6x-17 \end{array}\right. \Leftrightarrow y=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} -3x+8 & 5 \\ 6x-17 & -11 \end{vmatrix} \text{ et } z=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} -1 & -3x+8 \\ 2 & 6x-17 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow y=3x-3 \text{ et } z=1\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système (S) est $\mathcal{S}=\{(x,3x-3,1),\ x\in\mathbb{R}\}$.