

Planche n° 6. Espaces préhilbertiens

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (***) I (Polynômes de LEGENDRE)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire $P|Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

- Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, |)$.
- Déterminer $\|L_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2) Déterminer l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E .

3) Déterminer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice n° 2 (***) I (Polynômes d'HERMITE) (nécessite d'avoir traité le chapitre « Intégration sur un intervalle quelconque »).

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = (X^n e^{-X})^{(n)} e^X$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

- Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser les coefficients de h_n . Montrer que la famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de E .
- Montrer que la famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ) .
- Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|h_n\|$. En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien (E, φ) .

Exercice n° 3 (** I) (Polynômes de TCHEBYCHEV) (nécessite d'avoir traité le chapitre « Intégration sur un intervalle quelconque »).

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le n -ème polynôme de TCHEBYCHEV de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

- Montrer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ) .
- Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Exercice n° 4 (** I)

On note E l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-dire les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty.$$

1) Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

2) Pour $(u, v) \in E^2$, on pose $\varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

Exercice n° 5 (* I)

Soit Φ l'application qui à deux matrices carrées réelles A et B de format n associe $\text{Tr}(A^T \times B)$. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est ce que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice n° 6 (**)** Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une norme, notée $\| \cdot \|$, vérifiant l'identité du parallélogramme. Montrer que cette norme est hilbertienne.

Exercice n° 7 (** I)

Soit E un espace préhilbertien réel et (e_1, \dots, e_n) une famille de n vecteurs unitaires de E ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout vecteur x de E , on ait $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x|e_k)^2$. Montrer que la famille (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E .

Exercice n° 8 (*)**

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, non nulle à valeurs réelles positives. Pour P et Q polynômes donnés, on pose

$$\Phi(P, Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t) dt.$$

- 1) Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- 2) Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour Φ telle que, pour tout entier naturel n , $\deg(P_n) = n$.
- 3) (***) Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une telle base. Montrer que chaque polynôme P_n , $n \in \mathbb{N}^*$, a n racines réelles simples.

Exercice n° 9 (*) I** (Matrices et déterminants de GRAM) Soit E un espace préhilbertien réel.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et (x_1, \dots, x_n) dans E^n , on pose $G(x_1, \dots, x_n) = (x_i | x_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ (matrice de GRAM) puis $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n))$ (déterminant de GRAM).

- 1) Montrer que $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.
- 2) Montrer que la famille (x_1, \dots, x_n) est liée si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$ et que la famille (x_1, \dots, x_n) est libre si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$.
- 3) On suppose que la famille (x_1, \dots, x_n) est libre dans E . On pose $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x, F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2$). Montrer que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}.$$