6

Equations et inéquations

Au programme

- √ Résoudre des équations du premier degré.
- √ Résoudre des équations plus générales en factorisant.
- √ Résoudre des inéquations du premier degré.
- √ Résoudre des inéquations plus générales à l'aide de tableaux de signes.

Table des matières

I Equations ou inéquations équivalentes. Ensembles des solutions

A Equations

Une **équation** est une égalité dans laquelle apparaît une **inconnue**. Cette inconnue est notée avec une lettre, assez souvent la lettre x au lycée, mais pas toujours. **Résoudre** une équation, c'est trouver toutes les valeurs que peut prendre l'inconnue telles que l'égalité est vraie. L'ensemble de ces valeurs est l'**ensemble des solutions de l'équation**.

Par exemple, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = 1$ est $\{-1, 1\}$ ce qui signifie que si $x = -1$ ou $x = 1$, l'égalité est vraie, et que si x est n'importe quel nombre réel différent de -1 et 1, l'égalité est fausse. On dit aussi que les nombres -1 et 1 **sont solutions de l'équation** $x^2 = 1$.

De même, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = 2$ est $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ alors que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Q}$ de la même équation est $\varnothing$ car $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ ne sont pas des rationnels.

Définition 1

Deux équations sont **équivalentes** si et seulement si ces deux équations ont le même ensemble de solutions.

Quand une équation (E) est équivalente à une équation (E'), on écrit $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow (\mathrm{E}')$. Cette **équivalence** peut se détailler en deux implications $(\mathrm{E}) \Rightarrow (\mathrm{E}')$ et $(\mathrm{E}) \Leftarrow (\mathrm{E}')$ ou aussi $(\mathrm{E}) \Rightarrow (\mathrm{E}')$ et $(\mathrm{E}') \Rightarrow (\mathrm{E})$. $(\mathrm{E}) \Rightarrow (\mathrm{E}')$ signifie que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est contenu dans l'ensemble des solutions de l'équation (E'). Par exemple, $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ signifie que l'ensemble des solutions de l'équation $x = 1$, à savoir $\{1\}$, est contenu dans l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 1$, à savoir $\{-1, 1\}$.

Certaines manipulations transforment une équation en une équation équivalente :

- Ajouter à chaque membre de l'égalité un même réel.

  Par exemple, les équations $x + 1 = 3$ et $x + 1 + (-1) = 3 + (-1)$ sont équivalentes ou encore

$$x + 1 = 3 \Leftrightarrow x + 1 + (-1) = 3 + (-1).$$

- Faire passer de l'autre côté du signe = un réel pour l'addition (cette règle est un cas particulier de la règle précédente).

  Par exemple, les équations $2x + 1 = 4$ et $2x = 4 - 1$ sont équivalentes ou encore

$$2x + 1 = 4 \Leftrightarrow 2x = 4 - 1.$$

- Simplifier chaque membre de l'égalité par un même réel pour l'addition (il s'agit encore d'un cas particulier de la première règle).

  Par exemple, les équations $2x - 3 = -4x - 3$ et $2x = -4x$ sont équivalentes ou encore

$$2x - 3 = -4x - 3 \Leftrightarrow 2x = -4x.$$

- Multiplier chaque membre de l'égalité par un même réel **non nul**.

  Par exemple, les équations $2x = 4$ et $\dfrac{2x}{2} = \dfrac{4}{2}$ sont équivalentes

- Faire passer de l'autre côté du signe = un réel **non nul** pour la multiplication (cas particulier de la règle précédente).

  Par exemple, les équations $-3x = 6$ et $x = \dfrac{6}{-3}$ sont équivalentes ou encore

$$-3x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{-3}.$$

- Simplifier dans chaque membre de l'égalité un même réel **non nul** pour la multiplication (de nouveau un cas particulier de ce qui précède).

  Par exemple, les équations $4x = 4 \times 2$ et $x = 2$ sont équivalentes ou encore

$$4x = 4 \times 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

C'est la multiplication qui est la plus dangereuse. **On ne simplifie pas par 0 pour la multiplication.**
Considérons par exemple l'équation $x^2 = x$. Cette équation n'est pas équivalente à l'équation $x = 1$ (obtenue

en simplifiant x pour la multiplication). L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = x$ est $\{0, 1\}$ (car $x^2 = x$ équivaut à $x^2 - x = 0$ ou encore à $x(x-1) = 0$ ou encore à $x = 0$ ou $x - 1 = 0$) alors que l'ensemble des solutions de l'équation $x = 1$ est $\{1\}$.
Puisque les équations $x^2 = x$ et $x = 1$ n'ont pas le même ensemble de solutions (le nombre 0 est solution de la première équation et pas de la deuxième), les deux équations $x^2 = x$ et $x = 1$ ne sont pas des équations équivalentes.

Un peu d'histoire et d'éthymologie. Le mot algèbre vient du mot arabe « al-jabr ». Ce mot a de multiples significations proches les unes des autres que l'on peut résumer en « action de remettre en place ». Ainsi, l'algébriste est celui qui remet les choses en place ($2x - 4 = 0$ puis on remet 4 à sa place avec $2x = 4$ puis on remet 2 à sa place avec $x = \frac{4}{2}$). On note qu'en espagnol, « algebrista » est le nom donné à celui qui fait de l'algèbre tout autant qu'au rebouteux qui remet en place les fractures.

B Inéquations

Une inéquation est une inégalité dans laquelle apparaît une **inconnue**. **Résoudre** une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs que peut prendre l'inconnue telles que l'inégalité est vraie. L'ensemble de ces valeurs est l'**ensemble des solutions de l'inéquation**.

Ainsi, par exemple, l'ensemble des solutions de l'inéquation $x \geqslant 2$ est $[2, +\infty[$ et l'ensemble des solutions de l'inéquation $x < 4$ est $]-\infty, 4[$.

Définition 2

Deux inéquations sont équivalentes si et seulement si ces deux inéquations ont le même ensemble de solutions.

Comme pour les équations, entre deux inéquations équivalentes, on écrit le symbole $\Leftrightarrow$. Par exemple, $2x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x \geqslant -3 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{3}{2}$.

Les règles transformant une inéquation en une inéquation équivalente sont les suivantes :

- Ajouter à chaque membre de l'inégalité un même réel transforme une inéquation en une inéquation équivalente.

  Par exemple, les inéquations $x + 1 \geqslant 3$ et $x + 1 + (-1) \geqslant 3 + (-1)$ sont équivalentes.

- Faire passer un réel de l'autre côté du signe $\leqslant$ (ou $\geqslant$ ou $<$ ou $>$) pour l'addition transforme une inéquation en une inéquation équivalente.

  Par exemple, les inéquations $x + 1 < 3$ et $x < 3 - 1$ sont équivalentes.

- Multiplier chaque membre de l'inégalité par un même réel strictement positif transforme une inéquation en une inéquation équivalente.

  Par exemple, les inéquations $\frac{2x}{3} \leqslant 3$ et $3 \times \frac{2x}{3} \leqslant 3 \times 3$ sont équivalentes.

- Multiplier chaque membre de l'inégalité par un même réel strictement négatif en changeant le sens de l'inégalité transforme une inéquation en une inéquation équivalente.

  Par exemple, les inéquations $-2x > 3$ et $\left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2x) < \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3$ sont équivalentes.

- Faire passer un réel strictement positif de l'autre côté du signe $\leqslant$ (ou $\geqslant$ ou $<$ ou $>$) pour la multiplication transforme une inéquation en une inéquation équivalente.

  Par exemple, les inéquations $2x \leqslant 4$ et $x \leqslant \frac{4}{2}$ sont équivalentes.

- Faire passer un réel strictement négatif de l'autre côté du signe $\leqslant$ (ou $\geqslant$ ou $<$ ou $>$) pour la multiplication en changeant le sens de cette inégalité transforme une inéquation en une inéquation équivalente.

  Par exemple, les inéquations $-3x \leqslant 4$ et $x \geqslant \frac{4}{-3}$ sont équivalentes.

II Résolutions d'équations dans $\mathbb{R}$

A Equations du premier degré

On se donne deux réels a et b et on considère l'équation d'inconnue x réelle

$$(\mathrm{E})\ :\ ax+b=0.$$

L'équation (E) est une équation du premier degré uniquement dans le cas où $a \neq 0$. Mais on envisage également le cas où $a=0$. Les résultats qui suivent sont immédiats.

Théoreme 1

Si $a \neq 0$, l'équation $ax+b=0$ admet une solution et une seule à savoir $-\dfrac{b}{a}$.
Si $a=0$ et $b=0$, l'équation (E) s'écrit $0 \times x+0=0$. L'ensemble des solutions de (E) est $\mathbb{R}$.
Si $a=0$ et $b \neq 0$, l'équation (E) s'écrit $0 \times x+b=0$ avec $b \neq 0$. Elle n'admet pas de solution.

Ainsi, on trouve ou bien une solution et une seule, ou bien une infinité de solutions, ou bien pas de solution. Ces différentes situations se retrouvent dans les exercices qui suivent.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{2x+3}{5}=\dfrac{4x+1}{3}$.

Solution 1 : Les équations suivantes sont équivalentes :

$$\frac{2x+3}{5}=\frac{4x+1}{3}$$

$3(2x+3)=5(4x+1)$ (on a multiplié par 5×3 les deux membres de l'équation)

$$6x+9=20x+5$$

$$6x-20x=-9+5$$

$$-14x=-4$$

$$x=\frac{-4}{-14}$$

$$x=\frac{2}{7}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{2}{7}\right\}$.

■

Une autre rédaction est possible mais cette rédaction vous sera peut-être interdite au cours de l'année de seconde. Néanmoins, la rédaction ci-dessous prendra petit à petit la place de la rédaction ci-dessus au fur et à mesure que vous avancerez dans vos études.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{5}=\frac{4x+1}{3} &\Leftrightarrow 3(2x+3)=5(4x+1)\\ &\Leftrightarrow 6x+9=20x+5\\ &\Leftrightarrow 6x-20x=5-9\\ &\Leftrightarrow -14x=-4\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-4}{-14}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{2}{7},\end{aligned}$$

et même mieux

$$\frac{2x+3}{5}=\frac{4x+1}{3} \Leftrightarrow 3(2x+3)=5(4x+1) \Leftrightarrow 6x+9=20x+5 \Leftrightarrow 6x-20x=5-9 \Leftrightarrow -14x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{-4}{-14}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{7}.$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2x-4=3(x-2)-x+2$.

2) $2x-3=-5(-4x+6)-18x+12$.

Solution 2 :

1) Les équations suivantes sont équivalentes :

$$2x-4=3(x-2)-x+2$$
$$2x-4=3x-6-x+2$$
$$2x-3x+x=4-6+2$$
$$0\times x=0$$

Tous les réels sont solutions de l'équation $0\times x=0$ et donc l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\mathscr{S}=\mathbb{R}$.

2) Les équations suivantes sont équivalentes :

$$2x-3=-5(-4x+6)-18x+12$$
$$2x-3=20x-30-18x+12$$
$$2x-20x+18x=3-30+12$$
$$0\times x=-15$$

Aucun réel n'est solution de l'équation $0\times x=-15$ et donc l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\mathscr{S}=\varnothing$.

■

Dans les trois résolutions, la technique a été la même : **on a isolé l'inconnue x dans le premier membre de l'équation**. Cette technique fonctionne pour le premier degré mais ne fonctionnera plus pour les équations de degré supérieur comme par exemple $x^2-4x=-4$.

B Equations produits

On dispose du résultat essentiel :

Théoreme 2

Pour tous réels A et B, $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=0$ équivaut à $\mathrm{A}=0$ ou $\mathrm{B}=0$.

On a ainsi à disposition le résultat : « **un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul** ».

Démonstration : Soient A et B deux réels. Si $\mathrm{A}=0$ ou $\mathrm{B}=0$, alors $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=0$.

Inversement, supposons que A et B sont deux réels tels que $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=0$. Si $\mathrm{A}=0$, alors $\mathrm{A}=0$ ou $\mathrm{B}=0$. Sinon, $\mathrm{A}\neq 0$ et l'égalité $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=0$ entraine l'égalité $\dfrac{1}{\mathrm{A}}\times\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\dfrac{1}{\mathrm{A}}\times 0$ ou encore $\mathrm{B}=0$. Dans ce cas aussi, on a obtenu $\mathrm{A}=0$ ou $\mathrm{B}=0$.
■

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x(-2x+3)(x-5)=0$.

Solution 3 : Soit x un réel. $4x(-2x+3)(x-5)=0$ équivaut à $4x=0$ ou $-2x+3=0$ ou $x-5=0$ c'est-à-dire à $x=0$ ou $x=\dfrac{3}{2}$ ou $x=5$.

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\mathscr{S}=\left\{0,\dfrac{3}{2},5\right\}$.

■

Tout ceci fournit une technique de résolution dans le cas général : tout faire passer en premier membre puis **factoriser, factoriser, factoriser**.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $9x^2+6x+1-(6x+2)(x-3)=27x^2-3$.

Solution 4 : Les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
&9x^2+6x+1-(6x+2)(x-3)=27x^2-3\\
&\left(9x^2+6x+1\right)-2(3x+1)(x-3)=3\left(9x^2-1\right)\\
&(3x+1)(3x+1)-2(3x+1)(x-3)-3(3x+1)(3x-1)=0\\
&(3x+1)((3x+1)-2(x-3)-3(3x-1))=0\\
&(3x+1)(3x+1-2x+6-9x+3)=0\\
&(3x+1)(-8x+10)=0
\end{aligned}$$

Ensuite, $(3x+1)(-8x+10)=0$ équivaut à $3x+1=0$ ou $-8x+10=0$ ou encore à $x=-\dfrac{1}{3}$ ou $x=\dfrac{-10}{-8}$ ou enfin à $x=-\dfrac{1}{3}$ ou $x=\dfrac{5}{4}$.

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{4}\right\}$.

■

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : **1)** $x^2=3x$ **2)** $x^3=4x$ **3)** $x^3=-5x$.

Solution 5 :

1) Soit x un réel. $x^2=3x$ équivaut à $x^2-3x=0$ puis à $x(x-3)=0$ puis à $x=0$ ou $x=3$. L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\mathscr{S}=\{0,3\}$.

2) Soit x un réel. $x^3=4x$ équivaut à $x^3-4x=0$ puis à $x\left(x^2-4\right)=0$ puis à $x(x-2)(x+2)=0$ puis à $x=0$ ou $x=-2$ ou $x=2$. L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\mathscr{S}=\{-2,0,2\}$.

2) Soit x un réel. $x^3=-5x$ équivaut à $x^3+5x=0$ puis à $x\left(x^2+5\right)=0$ puis à $x=0$ ou $x^2+5=0$. Pour tout réel x, $x^2+5\geqslant 5$ et en particulier, pour tout réel x, $x^2+5\neq 0$. L'équation $x^2+5=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et donc, l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\mathscr{S}=\{0\}$.

■

C Equations diverses

Equations du type $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=0$. On a la règle simple

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=0 \quad \text{équivaut à} \quad \mathrm{A}=0 \text{ et } \mathrm{B}\neq 0.$$

Les conditions $\mathrm{A}=0$ et $\mathrm{B}\neq 0$ se gèrent ensuite de la façon suivante : on résout l'équation $\mathrm{A}=0$ (et pas l'équation $\mathrm{B}=0$), on obtient des valeurs et on teste si ces valeurs sont telles que $=0$ ou $\mathrm{B}\neq 0$. **On garde les valeurs qui n'annulent pas le dénominateur et on élimine les valeurs qui annulent le dénominateur**.

Exemple 1. $\dfrac{2x-1}{x+3}=0$ équivaut à $2x-1=0$ et $x+3\neq 0$ ou encore à $x=\dfrac{1}{2}$ et $x+3\neq 0$ ce qui équivaut à $x=\dfrac{1}{2}$ (car $\dfrac{1}{2}$ n'annule pas dénominateur $x+3$). L'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{2x-1}{x+3}=0$ est $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Exemple 2. $\dfrac{(2x-4)(x+1)}{(x-2)(x+3)}=0$ équivaut à $(2x-4)(x+1)=0$ et $(x-2)(x+3)\neq 0$ ou encore à ($x=2$ et $(x-2)(x+3)\neq 0$) ou alors ($x=-1$ et $(x-2)(x+3)\neq 0$). Ensuite, le nombre 2 annule le dénominateur et le nombre -1 ne l'annule pas. Donc, l'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{(2x-4)(x+1)}{(x-2)(x+3)}=0$ est $\mathscr{S}=\{-1\}$.

Exemple 3. $\dfrac{2x-4}{x-2}=0$ équivaut à $2x-4=0$ et $x-2\neq 0$ ou encore à ($x=2$ et $x-2\neq 0$). Le nombre 2 annule le dénominateur. Donc, l'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{2x-4}{x-2}=0$ est $\mathscr{S}=\varnothing$.

Dans chacun des trois exemples précédents, nous n'avons pas cherché à savoir quand le dénominateur était nul. Nous avons cherché les valeurs de x pour lesquelles le numérateur était nul puis nous avons testé si oui ou non, pour les valeurs de x obtenues, le dénominateur était nul. Nous n'avons gardé que les valeurs qui n'annulaient pas le dénominateur. Voici un dernier exemple.

Exemple 4. $\dfrac{x}{x^7-1231x^4+11x-15}=0$ équivaut à $x=0$ et $x^7-1231x^4+11x-15\neq 0$ ou encore à $x=0$ (il ne viendrait à personne l'idée de résoudre l'équation $x^7-1231x^4+11x-15=0$). L'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{x}{x^7-1231x^4+11x-15}=0$ est $\mathscr{S}=\{0\}$.

Equations du type $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=1$. On peut se ramener à la situation précédente en écrivant $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}-1=0$ puis $\dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{B}}=0$ ou bien directement

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=1 \qquad \text{équivaut à} \qquad \mathrm{A}=\mathrm{B} \text{ et } \mathrm{B}\neq 0.$$

Exemple 5. $\dfrac{2x+1}{x-1}=1$ équivaut à $2x+1=x-1$ et $x-1\neq 0$ ou encore à $x=-2$ et $x-1\neq 0$ ou enfin à $x=-2$. Donc, l'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{2x+1}{x-1}=1$ est $\mathscr{S}=\{-2\}$.

On pouvait procéder différemment. $\dfrac{2x+1}{x-1}=1$ équivaut à $\dfrac{2x+1}{x-1}-1=0$ ou encore à $\dfrac{2x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x-1}=0$ ou encore à $\dfrac{(2x+1)-(x-1)}{x-1}=0$ ou encore à $\dfrac{2x+1-x+1}{x-1}=0$ ou encore à $\dfrac{x+2}{x-1}=0$ ou encore à $x+2=0$ et $x-1\neq 0$ ou enfin à $x=-2$.

Exemple 6. $\dfrac{x}{x}=1$ équivaut à $x=x$ et $x\neq 0$ ou encore à $0\times x=0$ et $x\neq 0$. Tout réel x est solution de l'équation $0\times x=0$. Donc, l'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{x}{x}=1$ est $\mathscr{S}=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Passons maintenant à des équations du type $x^2=a$ où a est un réel donné. On a le résultat :

Théoreme 3

Soit a un réel.

Si $a>0$, l'équation $x^2=a$ a deux solutions distinctes et opposées, à savoir $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
Si $a=0$, l'équation $x^2=a$ a exactement une solution à savoir 0.
Si $a<0$, l'équation $x^2=a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : Soit a un réel.

1er cas. Supposons $a>0$. $x^2=a$ équivaut à $x^2-\left(\sqrt{a}\right)^2=0$ ou encore à $\left(x+\sqrt{a}\right)\left(x-\sqrt{a}\right)=0$ ou enfin à $x=-\sqrt{a}$ ou $x=\sqrt{a}$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation $x^2=a$ est $\mathscr{S}=\left\{-\sqrt{a},\sqrt{a}\right\}$.

2ème cas. Supposons $a=0$. $x^2=a$ équivaut à $x\times x=0$ ou encore à $x=0$ ou $x=0$ et finalement à $x=0$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation $x^2=a$ est $\mathscr{S}=\{0\}$.

3ème cas. Supposons $a<0$. Pour tout réel x, $x^2\geqslant 0$ et en particulier, pour tout réel x, $x^2\neq a$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation $x^2=a$ est $\mathscr{S}=\varnothing$.

■

Ainsi, l'équation $x^2-3=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, à savoir $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ alors que l'équation $x^2+3=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

III Résolutions d'inéquations dans $\mathbb{R}$

A Inéquations du premier degré

On veut résoudre une inéquation du type $ax+b \geqslant 0$ (ou $\leqslant$ ou $>$ ou $<$). La technique de résolution est la même que pour une équation du premier degré à une différence près : on rappelle que **faire passer de l'autre côté pour la multiplication un réel strictement négatif change le sens de l'inégalité**.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x+3 \leqslant 4x+13$.

Solution 6 : Soit x un réel. $2x+3 \leqslant 4x+13$ équivaut à $2x-4x \leqslant 13-3$ ou encore à $-2x \leqslant 10$ ou encore à $x \geqslant \dfrac{10}{-2}$ ou enfin à $x \geqslant -5$. L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est $\mathscr{S} = [-5,+\infty[$.

■

On pouvait aussi écrire

$$2x+3 \leqslant 4x+13 \Leftrightarrow 2x-4x \leqslant 13-3 \Leftrightarrow -2x \leqslant 10 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{10}{-2} \Leftrightarrow x \geqslant -5.$$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations $\left\{\begin{array}{l} 4x-1 \geqslant 7 \\ 2x-3 < 9 \end{array}\right.$.

Solution 7 : Soit x un réel. $4x-1 \geqslant 7$ équivaut à $x \geqslant 2$ et $2x-3 < 9$ équivaut à $x < 6$. Donc, le système proposé équivaut à $x \geqslant 2$ et $x < 6$ ou encore à $2 \leqslant x < 6$. L'ensemble des solutions du système d'inéquations proposé est $\mathscr{S} = [2,6[$.

■

B Utilisation d'un tableau de signes

Dans des situations plus générales, la plupart du temps, on fait tout passer en premier membre, on réduit au même dénominateur s'il y a des fractions, dans tous les cas on factorise puis on se sert de tableaux de signes (voir chapitre précédent).

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x+4)(-x+3) \geqslant 0$.

Solution 8 : On détermine pour tout réel x le signe de $(2x+4)(-x+3)$ grâce à un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(2x+4)(-x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x+4)(-x+3) \geqslant 0$ est $\mathscr{S} = [-2,3]$ (en dernière ligne du tableau de signes, on lit les $+$ et les 0 et on remonte en première ligne du tableau pour lire les valeurs de x correspondantes).

■

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x+1}{x+3} \geqslant 1$.

Solution 9 : Soit x un réel. $\dfrac{2x+1}{x+3} \geqslant 1$ équivaut à $\dfrac{2x+1}{x+3} - 1 \geqslant 0$ ou encore à $\dfrac{(2x+1)-(x+3)}{x+3} \geqslant 0$ ou enfin $\dfrac{x-2}{x+3} \geqslant 0$.

On détermine pour tout réel x le signe de $\dfrac{x-2}{x+3}$ grâce à un tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-2)/(x+3)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{2x+1}{x+3} \geqslant 1$ est $\mathscr{S} =]-\infty, -3[\cup [2, +\infty[$.

■